Baccalauréat S Géométrie

Index des exercices de géométrie de 1999 à juin 2010

Tapuscrit : Denis Vergès

N°	Lieu et date	Q.C.M.	Algébrique	Géométrie	Application
1	Polynésie juin 2010		×	×	
2	Liban juin 2010		×	×	
3	Centres étrangers juin 2010		×	×	
4	Pondichéry avril 2010		×	×	
5	Nouvelle-Calédonie nov. 2009		×	×	
6	Amérique du Sud novembre 2009		×	×	
7	Polynésie septembre 2009		×	×	
8	Métropole & La Réunion sept. 2009		×	×	
9	Antilles-Guyane septembre 2009		×	×	
10	La Réunion juin 2009		×	×	
11	Centres étrangers juin 2009		×	×	
12	Liban juin 2009		×	×	
13	Amérique du Nord juin 2009		×	×	
14	Pondichéry avril 2009		×	×	
15	Nouvelle-Calédonie mars 2009		×	×	
16	Amérique du Sud novembre 2008		×	×	
17	Nouvelle-Calédonie nov. 2008		×	×	
18	Polynésie septembre 2008		×	×	
19	Métropole & La Réunion sept. 2008	×	×	×	×
20	Polynésie juin 2008		×	×	
21	Métropole juin 2008		×	×	
22	Centres étrangers juin 2008		×	×	
23	Asie juin 2008			×	
24	Antilles-Guyane juin 2008		×	×	
25	Amérique du Nord mai 2008		×	×	
26	Pondichéry avril 2008			×	
27	Nouvelle-Calédonie mars 2008		×	×	
28	Nouvelle-Calédonie déc. 2007				×
29	Amérique du Sud novembre 2007				×
30	Polynésie septembre 2007				×
31	Polynésie juin 2007		×	×	
32	Métropole juin 2007		×		×
33	Antilles-Guyane juin 2007		×		
34	Amérique du Nord juin 2007				×
35	Liban juin 2007				×
36	Pondichéry avril 2007				×
37	Nouvelle-Calédonie mars 2007				×
38	Polynésie septembre 2006				×
39	Métropole septembre 2006				×
40	Polynésie juin 2006		×		×

Nº	Lieu et date	Q.C.M.	Algébrique	Géométrie	Application
41	La Réunion juin 2006	×			×
42	Métropole juin 2006	×			×
43	Centres étrangers juin 2006	×			×
44	Antilles-Guyane juin 2006	×			×
45	Pondichéry avril 2006	×			×
46	Amérique du Sud novembre 2005				×
47	Polynésie septembre 2005	×			×
48	Métropole septembre 2005				×
49	Antilles-Guyane septembre 2005	×			×
50	Asie juin 2005	×			×
51	Centres étrangers juin 2005			×	×
52	La Réunion juin 2005				×
53	Métropole juin 2005	×		×	
54	Polynésie juin 2005				×
55	Pondichéry avril 2005				×
56	Nouvelle-Calédonie nov. 2004				×
57	Antilles-Guyane septembre 2004			×	
58	Amérique du Nord mai 2004			×	
59	Antilles-Guyane juin 2004	×		×	
60	Métropole juin 2004				×
61	Nouvelle-Calédonie mars 2004		×		×
62	Nouvelle-Calédonie nov. 2003				×
63	Polynésie septembre 2003				×
64	Asie juin 2003				×
65	Métropole juin 2003				×
66	La Réunion juin 2003				×
67	Polynésie juin 2003				×
68	Nouvelle-Calédonie déc. 2001		×		×
69	Amérique du Nord juin 2001				×
70	Métropole juin 2001		×		×
71	Nouvelle-Calédonie déc. 2000				×
72	Métropole septembre 2000		×		×
73	Polynésie septembre 2000				×
74	Amérique du Nord juin 2000				×
75	Centres étrangers juin 2000				×
76	Nouvelle-Calédonie déc. 1999	×	×		
77	Métropole juin 1999				
78	Liban juin 1999		×		
79	Pondichéry juin 1999		×		
80	Amérique du Sud novembre 1999				
81	Métropole septembre 1998			×	
82	Polynésie septembre 1998				

1 Polynésie juin 2010

Retour au tableau

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

- les points A(1 ; 1 ; 1) et B(3 ; 2 ; 0) ;
- le plan (P) passant par le point B et admettant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal ;
- le plan (Q) d'équation : $x - y + 2z + 4 = 0$;
- la sphère (S) de centre A et de rayon AB.

1. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est : $2x + y - z - 8 = 0$

2. Déterminer une équation de la sphère (S).

3. **a.** Calculer la distance du point A au plan (Q).
En déduire que le plan (Q) est tangent à la sphère (S).

b. Le plan (P) est-il tangent à la sphère (S) ?

4. On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan (Q), noté C, a pour coordonnées (0 ; 2; −1).

a. Prouver que les plans (P) et (Q) sont sécants.

b. Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q).
Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& t \\ y &=& 12-5t \\ z &=& 4-3t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

c. Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite (D)

d. On appelle (R) le plan défini par le point A et la droite (D).
L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
« Tout point du plan (R) est équidistant des points B et C ».
Justifier votre réponse.

2 Liban juin 2010

Retour au tableau

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On note (D) la droite passant par les points A(1 ; −2 ; −1) et B(3 ; −5 ; −2).

1. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 1+2t\\ y &=& -2-3t\\ z &=& -1-t\end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. On note (D′) la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l c r}x &=& 2-k\\ y &=& 1+2k\\ z &=& k\end{array}\right. \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (D) et (D′) ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan (P) d'équation $4x+y+5z+3=0$.

a. Montrer que le plan (P) contient la droite (D).

b. Montrer que le plan (P) et la droite (D′) se coupent en un point C dont on précisera les coordonnées.

4. On considère la droite (Δ) passant par le point C et de vecteur directeur $\vec{w}\,(1\ ;\ 1\ ;\ -1)$.

a. Montrer que les droites (Δ) et (D′) sont perpendiculaires.

b. Montrer que la droite (Δ) coupe perpendiculairement la droite (D) en un point E dont on précisera les coordonnées.

3 Centres étrangers juin 2010

Retour au tableau

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Question 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ de représentations paramétriques :

$$(\mathscr{D}_1)\left\{\begin{array}{l c r}x &=& -1+2t\\ y &=& -3t\\ z &=& 1+t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathscr{D}_2)\left\{\begin{array}{l c r}x &=& 1-2t\\ y &=& 5-t\\ z &=& -2+t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Affirmation :
Les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont orthogonales.

Question 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère le point A de coordonnées $(2\,;\,-1\,;\,3)$ et la droite $(\mathscr{D})$ de représentation paramétrique :

$$(\mathscr{D})\left\{\begin{array}{l c r}x &=& 1+4t\\ y &=& -2+2t\\ z &=& 3-2t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Affirmation :
Le plan $(\mathscr{P})$ contenant le point A et orthogonal à la droite $(\mathscr{D})$ a pour équation : $2x+y-z=0$.

4 Pondichéry avril 2010

Retour au tableau

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une dé monstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.

1. La droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& t+2\\ y &=& -2t\\ z &=& 3t-1\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ est parallèle au plan dont une équation cartésienne est : $x+2y+z-3=0$.

2. Les plans P, P', P'' d'équations respectives $x-2y+3z=3$, $2x+3y-2z=6$ et $4x-y+4z=12$ n'ont pas de point commun.

3. Les droites de représentations paramétriques respectives
$\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 2-3t\\ y &=& 1+t\\ z &=& -3+2t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ et $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 7+2u\\ y &=& 2+2u\\ z &=& -6-u\end{array}\right.$, $u \in \mathbb{R}$ sont sécantes.

4. On considère les points :
A, de coordonnées $(-1~;~0~;~2)$, B, de coordonnées $(1~;~4~;~0)$, et C, de coordonnées $(3~;~-4~;~-2)$.
Le plan (ABC) a pour équation $x+z=1$.

5. On considère les points :
A, de coordonnées $(-1~;~1~;~3)$, B, de coordonnées $(2~;~1~;~0)$, et C, de coordonnées $(4~;~-1~;~5)$.
On peut écrire C comme barycentre des points A et B.

5 Nouvelle-Calédonie novembre 2009

Retour au tableau

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.
On considère le cube ABCDEFGH représenté sur l' ANNEXE, à rendre avec la copie.
On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [BF] et [HF].

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(2 ; 1 ; 1)$ est orthogonal à $\overrightarrow{\text{IK}}$ et à $\overrightarrow{\text{IJ}}$.
   En déduire qu'une équation du plan (IJK) est : $4x+2y+2z-5=0$.
3. **a.** Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (CD).
   b. En déduire que le point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD) est le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{4} ; 1 ; 0\right)$.
   c. Placer le point R sur la figure.
4. Tracer sur la figure la section du cube par le plan (IJK). On peut répondre à cette question sans avoir traité les précédentes.
5. **a.** Montrer que la distance du point G au plan (IJK) est $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.
   b. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre G passant par F.
   Justifier que la sphère $\mathscr{S}$ et le plan (IJK) sont sécants.
   Déterminer le rayon de leur intersection.

6 Amérique du Sud novembre 2009

Retour au tableau

Partie A – Restitution organisée de connaissances

Soit D le point de coordonnées $(x_D,\ y_D,\ z_D)$ et P le plan d'équation
$ax + by + cz + d = 0$, où a, b et c sont des réels qui ne sont pas tous nuls.
Démontrer que la distance du point D au plan P est donnée par :

$$d(\mathrm{D}, P) = \frac{\left|ax_D + by_D + cz_D + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Partie B

On considère les points A de coordonnées $(3~;~-2~;~2)$, B de coordonnées $(6~;~-2~;~-1)$, C de coordonnées $(6~;~1~;~5)$ et D de coordonnées $(4~;~0~;~-1)$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle. En déduire l'aire du triangle ABC.
2. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1~;~-2~;~1)$ est normal au plan (ABC).
   Déterminer une équation du plan (ABC).
3. Calculer la distance du point D au plan (ABC).
   Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

Partie C

Soit Q le plan d'équation $x - 2y + z - 5 = 0$.

1. Déterminer la position relative des deux plans Q et (ABC).
2. Q coupe les droites (DA), (DB) et (DC) respectivement en E, F et G.
   Déterminer les coordonnées de E et montrer que E appartient au segment [DA].
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer le volume du tétraèdre EFGD.

7 Polynésie septembre 2009

Retour au tableau

On considère le cube OABCDEFG d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.
Il n'est pas demandé de rendre le graphique complété avec la copie.
Soient les points P et Q tels que $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OQ} = 4\overrightarrow{OC}$.
On appelle R le barycentre des points pondérés (B, -1) et (F, 2).
L'espace est muni du repère orthonormal $\left(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right)$.

1. **a.** Démontrer que le point R a pour coordonnées (1 ; 1 ; 2).

   b. Démontrer que les points P, Q et R ne sont pas alignés.

   c. Quelle est la nature du triangle PQR ?

2. **a.** Démontrer qu'une équation du plan (PQR) est $4x + 2y + z - 8 = 0$.

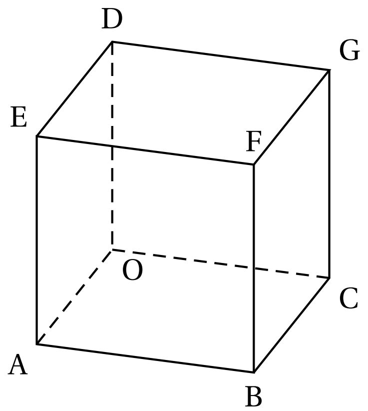
   b. Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (PQR).

3. On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (PQR).

   a. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (DH).

   b. Déterminer les coordonnées du point H.

   c. Démontrer que le point H appartient à la droite (PR).



8 Métropole & La Réunion septembre 2009

Retour au tableau

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. On désigne par P le plan d'équation $x + y - 1 = 0$ et par P' le plan d'équation $y + z - 2 = 0$.
Justifier que les plans P et P' sont sécants et vérifier que leur intersection est la droite D, dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{array}\right.$, où t désigne un nombre réel.

2. **a.** Déterminer une équation du plan R passant par le point O et orthogonal à la droite D.

b. Démontrer que le point I, intersection du plan R et de la droite D, a pour coordonnées $(0~;~1~;~1)$.

3. Soient A et B les points de coordonnées respectives $\left(-\dfrac{1}{2}~;~0~;~\dfrac{1}{2}\right)$ et $(1~;~1~;~0)$.

a. Vérifier que les points A et B appartiennent au plan R.

b. On appelle A$'$ et B$'$ les points symétriques respectifs des points A et B par rapport au point I.
Justifier que le quadrilatère ABA' B' est un losange.

c. Vérifier que le point S de coordonnées $(2~;~-1~;~3)$ appartient à la droite D.

d. Calculer le volume de la pyramide SABA$'$B$'$.
On rappelle que le volume V d'une pyramide de base d'aire b et de hauteur h est : $V = \dfrac{1}{3} b \times h$.

9 Antilles-Guyane septembre 2009

Retour au tableau

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(1 ; −1 ; 4), B(7 ; −1 ; −2) et C(1 ; 5 ; −2).

1. **a.** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

   b. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

   c. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ (1 ; 1 ; 1) est un vecteur normal au plan (ABC).

   d. En déduire que $x + y + z - 4 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soit $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2t\\ y &=& -2t-2 \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}.\\ z &=& -2t-3\end{array}\right.$$

   a. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au plan (ABC).

   b. Montrer que les coordonnées du point G, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC) sont (3 ; 1 ; 0).

   c. Montrer que G est l'isobarycentre des points A, B et C.

3. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre G passant par A.

   a. Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.

   b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection E et F, de la droite $\mathcal{D}$ et de la sphère $\mathcal{S}$.

10 La Réunion juin 2009

Retour au tableau

Soient A(1 ; 2 ; 0), B(2 ; 2 ; 0), C(1 ; 3 ; 0) et D(1 ; 2 ; 1) quatre points de l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
(P) désigne le plan orthogonal à (BC) contenant A ;
(Q) désigne le plan orthogonal à (DC) contenant A ;
(R) désigne le plan orthogonal à (BD) contenant A.

1. Montrer que le plan (P) a pour équation cartésienne $x - y + 1 = 0$.
On admet que le plan (Q) a pour équation cartésienne $-y + z + 2 = 0$ et que le plan (R) a pour équation cartésienne $-x + z + 1 = 0$.

2. **a.** Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x - y + 1 &=& 0\\ -y + z + 2 &=& 0\\ -x + z + 1 &=& 0\end{array}\right.$

b. En déduire que l'intersection des trois plans (P), (Q) et (R) est une droite (d) passant par le point E(2 ; 3 ; 1).

c. Vérifier que la droite (d) est orthogonale au plan (BCD).
En déduire une équation cartésienne du plan (BCD).

3. Déterminer une équation cartésienne pour chacun des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

On admet que ces plans sont respectivement parallèles aux plans de repères $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{k}\right)$ *et* $\left(O ; \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

a. Montrer que tout point M de la droite (d) est équidistant des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

b. Existe-t-il des points de l'espace équidistants des plans (ABC), (ABD), (ACD) et (BCD) ?

11 Centres étrangers juin 2009

Retour au tableau

On se propose dans cet exercice, d'étudier des propriétés d'un solide de l'espace.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(3 ; 4 ; 0) ; B(0 ; 5 ; 0) et C(0 ; 0 ; 5). On note I le milieu du segment [AB].

1. Faire une figure où l'on placera les points A, B, C, I dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
2. Démontrer que les triangles OAC et OBC sont rectangles et isocèles.
   Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Soit H le point de coordonnées $\left(\dfrac{15}{19} ; \dfrac{45}{19} ; \dfrac{45}{19}\right)$.

   a. Démontrer que les points H, C, I sont alignés.

   b. Démontrer que H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

   c. En déduire une équation cartésienne du plan ABC.

4. Calculs d'aire et de volume.

   a. Calculer l'aire du triangle OAB. En déduire le volume du tétraèdre OABC.

   b. Déterminer la distance du point O au plan (ABC).

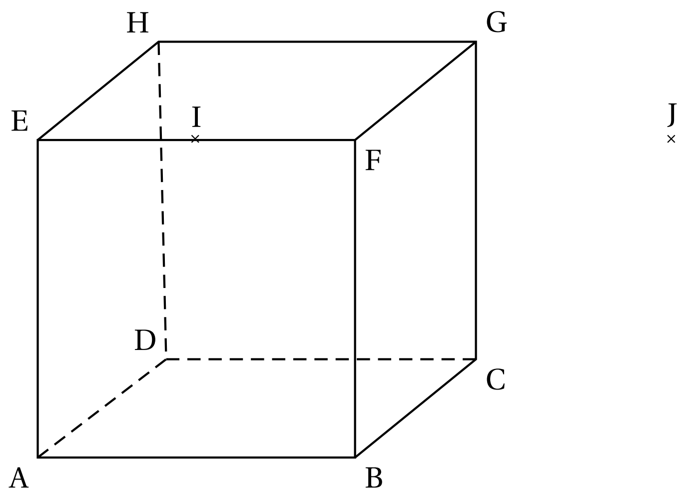
   c. Calculer l'aire du triangle ABC.

12 Liban juin 2009

Retour au tableau

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On désigne par I le milieu de [EF] et par J le symétrique de E par rapport à F.

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. **a.** Déterminer les coordonnées des points I et J.

   b. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

   c. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).

   d. Calculer la distance du point F au plan (BGI).

2. On note (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

   a. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).

   b. Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face ADHE.

   c. Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,\frac{5}{6}\right)$.

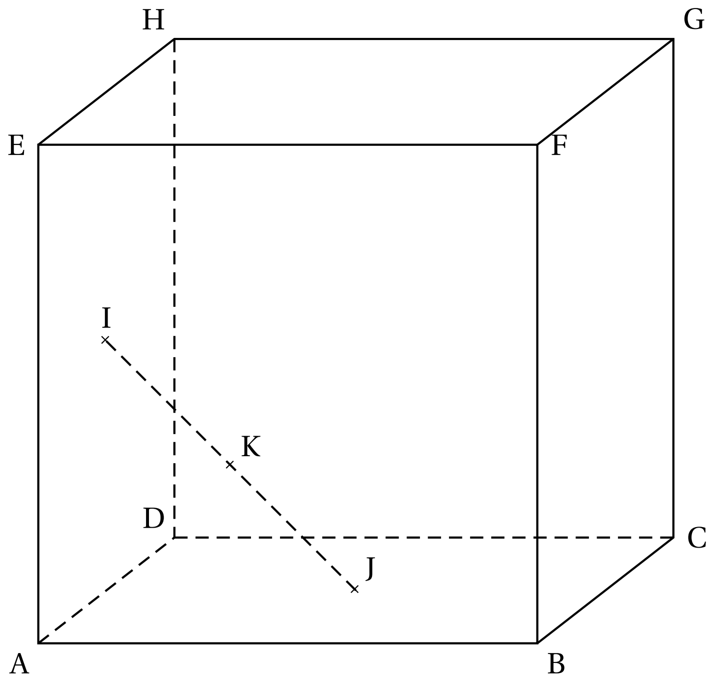
   d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?

13 Amérique du Nord juin 2009

Retour au tableau

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.



On note I le centre de la face ADHE, J celui de la face ABCD et K le milieu du segment [IJ].
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des points l, J et K dans ce repère.
2. Démontrer que les points A, K et G ne sont pas alignés.
3. **a.** Démontrer que le plan médiateur du segment [IJ] est le plan (AKG).

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (AKG).

   c. Vérifier que le point D appartient au plan (AKG).
4. Dans cette question, on veut exprimer K comme barycentre des points A, D et G.
   Soit L le centre du carré DCGH.

   a. Démontrer que le point K est le milieu du segment [AL].

   b. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Démontrer que K est le barycentre des points A. D et G affectés de coefficients que l'on précisera.

14 Pondichéry avril 2009

Retour au tableau

Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère les points :
A de coordonnées (1 ; 1 ; 0), B de coordonnées (2 ; 0 ; 3), C de coordonnées (0 ; −2 ; 5) et D de coordonnées (1 ; −5 ; 5).

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou par FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :
Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées $(x,\ y,\ z)$ tels que $y = 2x + 4$ est une droite.

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + 2\overrightarrow{M\text{C}}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système $\{(A,\ 1),\ (B,\ 1),\ (C,\ 2)\}$, et de rapport 3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées (3, 3, 0) et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x + 2y + z + 3 = 0$.

15 Nouvelle-Calédonie mars 2009

Retour au tableau

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. On considère les points :

$$\text{A}(4\ ;\ 0\ ;\ 0),\quad \text{B}(0\ ;\ 2\ ;\ 0),\quad \text{C}(0\ ;\ 0\ ;\ 3)\quad \text{et E}\left(\frac{2}{3}\ ;\ -\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{9}\right)$$

On se propose de déterminer de deux façons la distance δ_{E} du point E au plan (ABC).

RAPPEL : Soit $(\mathscr{P})$ un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ où $a,\ b,\ c$ et d sont des nombre réels avec $a,\ b$ et c non tous nuls et M un point de coordonnées $\left(x_M\ ;\ y_M\ ;\ z_M\right)$ la distance δ_{M} du point M au plan $(\mathscr{P})$ est égale à :

$$\frac{\left|ax_M+by_M+cz_M+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

1. **a.** Montrer que les points A, B et C déterminent bien un plan.

   b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;6\,;4)$.
   Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   c. Montrer qu'une équation du plan (ABC) est : $3x+6y+4z-12=0$.

   d. Déduire des questions précédentes la distance δ_{E}.

2. **a.** Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l c r}x&=&1+t\\ y&=&2t\\ z&=&\dfrac{5}{9}+\dfrac{4}{3}t\end{array}\right.\quad \text{où } t\in\mathbb{R},$$

   est perpendiculaire au plan (ABC) et passe par le point E.

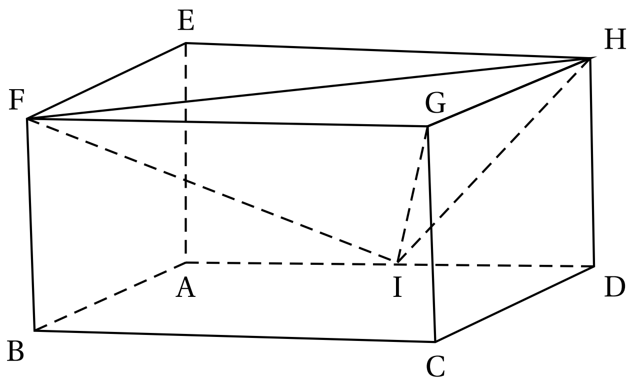
   b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal G du point E sur le plan (ABC).

   c. Retrouver à partir des coordonnées des points E et G la distance δ_{E}.

16 Amérique du Sud novembre 2008

Retour au tableau

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit ABCDEFGH tel que : AB = 1, AD = 2 et AE = 1.
On appelle I le milieu de [AD].



L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}} ; \overrightarrow{\text{AI}} ; \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H.
2. **a.** Montrer que le volume V du tétraèdre GFIH est égal à $\dfrac{1}{3}$.
   b. Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.
   En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH).
3. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2 ; 1 ; -1)$.
   a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (FIH).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).
   c. Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH).
4. **a.** La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?
   b. Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.
   c. Déterminer les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*
   Soit Γ la sphère de centre G passant par K.
   Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (FIH) ?
   (On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection)

17 Nouvelle-Calédonie novembre 2008

Retour au tableau

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère les points :

$$\text{A}(3\,;\,-2\,;\,1) \qquad \text{B}(5\,;\,2\,;\,-3)$$
$$\text{C}(6\,;\,-2\,;\,-2) \qquad \text{D}(4\,;\,3\,;\,2)$$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, puis que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\,;\,1\,;\,2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. En déduire une équation du plan (ABC).

c. Montrer que la distance du point D au plan (ABC) est égale à 3.

3. Calculer le volume du tétraèdre ABCD en unités de volume.

18 Polynésie septembre 2008

Retour au tableau

On donne la propriété suivante :
« par un point de l'espace il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée »

Sur la figure donnée en annexe, on a représenté le cube ABCDEFGH d'arête 1.
On a placé :

les points I et J tels que $\overrightarrow{\mathrm{BI}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EJ}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{EH}}$.
le milieu K de [IJ].

On appelle P le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ).

Partie A

1. Démontrer que le triangle FIJ est isocèle en F.
   En déduire que les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.

   On admet que les droites (GK) et (IJ) sont orthogonales.
2. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK).
3. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGP).
4. **a.** Montrer que les points F, G, K et P sont coplanaires.
   b. En déduire que les points F, P et K sont alignés.

Partie B

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
On appelle N le point d'intersection de la droite (GP) et du plan (ADB).
On note $(x\,;\,y\,;\,0)$ les coordonnées du point N.

1. Donner les coordonnées des points F, G, I et J.
2. **a.** Montrer que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ).
   b. Exprimer les produits scalaires $\overrightarrow{\mathrm{G}N}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{G}N}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FJ}}$ en fonction de x et y.
   c. Déterminer les coordonnées du point N.
3. Placer alors le point P sur la figure en annexe.

19 Métropole & La Réunion sept. 2008

Retour au tableau

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct $\left(\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \frac{\pi}{2}\right)$. On note I son centre et J le milieu de [AI].

1. C est le barycentre des points pondérés (A, m), (B, 1) et (D, 1) lorsque :

a. $m = -2$ **b.** $m = 2$ **c.** $m = -1$ **d.** $m = 3$

2. **a.** B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b. Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\frac{2}{3}$.

c. Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.

d. J est l'image de I par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{BA}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{DB}}$.

3. L'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{C}}\| = \text{AB}$ est :

a. la médiatrice de [AC].

b. le cercle circonscrit au carré ABCD.

c. la médiatrice de [AI].

d. le cercle inscrit dans le carré ABCD.

4. L'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left(2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{D}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{C}}\right) = 0$$

est :

a. la médiatrice de [AC].

b. le cercle circonscrit au carré ABCD.

c. la médiatrice de [AI].

d. le cercle inscrit dans le carré ABCD.

20 Polynésie juin 2008

Retour au tableau

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A$(1\,;2\,;3)$, B$(0\,;1\,;4)$, C$(-1\,;\,-3\,;\,2)$, D$(4\,;\,-2\,;\,5)$ et le vecteur $\vec{n}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$.

1. **a.** Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.

   b. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   c. Déterminer une équation du plan (ABC).

2. Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2-2t\\ y &=& -1+t \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.\\ z &=& 4-t\end{array}\right.$$
Montrer que le point D appartient à la droite (Δ) et que cette droite est perpendiculaire au plan (ABC).

3. Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABC.

21 Métropole juin 2008

Retour au tableau

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

$$\text{A}(1~;~1~;~0), \text{B}(1~;~2~;~1) \text{ et } \text{C}(3~;~-1~;~2).$$

1. **a.** Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y - z - 3 = 0$.

2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + 2y - z - 4 = 0$ et $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.
   Démontrer que l'intersection des plane (P) et (Q) est une droite $(\mathcal{D})$, dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{l c l}x & = & -2 + t\\ y & = & 3\\ z & = & t\end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R})$$

3. Quelle est l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) ?

4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Déterminer la distance du point A à la droite $(\mathcal{D})$.

22 Centres étrangers juin 2008

Retour au tableau

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points

$$\text{A}(2\,;\,1\,;\,-1),\ \ \text{B}(-1\,;\,2\,;\,4),\ \ \text{C}(0\,;\,-2\,;\,3),\ \ \text{D}(1\,;\,1\,;\,-2)$$

et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x-2y+z+1=0$.

Pour chacune des huit affirmations suivantes, dire, sans justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et l'un des deux mots **VRAI** *ou* **FAUX** *correspondant à la réponse choisie.*
Une réponse exacte rapporte 0,5 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.*
Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Affirmation 1 : les points A, B et C définissent un plan.
2. Affirmation 2 : la droite (AC) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
3. Affirmation 3 : une équation cartésienne du plan (ABD) est : $x+8y-z-11=0$.
4. Affirmation 4 : une représentation paramétrique de la droite (AC) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2k\\ y &=& 2+3k \quad (k \in \mathbb{R}).\\ z &=& 3-4k\end{array}\right.$$

5. Affirmation 5 : les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
6. Affirmation 6 : la distance du point C au plan $\mathcal{P}$ est égale à $4\sqrt{6}$
7. Affirmation 7 : la sphère de centre D et de rayon $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan $\mathcal{P}$.
8. Affirmation 8 : le point $\text{E}\left(-\dfrac{4}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathcal{P}$.

23 Asie juin 2008

Retour au tableau

A -Vrai ou faux ?

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse la démonstration consistera à proposer un contre-exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exempte.

Rappel des notations :

- $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ *désigne l'ensemble des points communs aux plans* $\mathcal{P}_1$ *et* $\mathcal{P}_2$.
- *L 'écriture* $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$ *signifie que les plans* $\mathcal{P}_1$ *et* $\mathcal{P}_2$ *n'ont aucun point commun.*

1. Si $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \emptyset \text{ et } \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \neq \emptyset,$$

alors on peut conclure que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ vérifient : $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3 \neq \emptyset$.

2. Si $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$$

alors on peut conclure que $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont tels que : $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$ et $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$.

3. Si $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \emptyset \text{ et } \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset,$$

alors on peut conclure que $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ vérifient : $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \neq \emptyset$.

4. Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux plans distincts et $\mathcal{D}$ une droite de l'espace vérifiant :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{D} \neq \emptyset \text{ et } \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset,$$

alors on peut conclure que $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$

B - Intersection de trois plans donnés

Dans un repère orthonorrnal de l'espace on considère les trois plans suivants :

- $\mathcal{P}_1$ d'équation $x + y - z = 0$
- $\mathcal{P}_2$ d'équation $2x + y + z - 3 = 0$,
- $\mathcal{P}_3$ d'équation $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

1. Justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'interseclion, notée Δ.

2. En déduire la nature de l'intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.

24 Antilles–Guyane juin 2008

Retour au tableau

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point.*
Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. L'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que : $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-6y+2z-7 &=& 0\\ -x+3y-z+5 &=& 0\end{array}\right.$ est :

Réponse A : l'ensemble vide — Réponse B : une droite
Réponse C : un plan — Réponse C : réduit à un point

2. Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-t\\ y &=& -1+t\\ z &=& 2-3t\end{array}\right.\ (t\in\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t\\ y &=& -2-t\\ z &=& 4+2t\end{array}\right.\ (t\in\mathbb{R}) \text{ sont :}$$

Réponse A : parallèles et distinctes — Réponse B : confondues
Réponse C : sécantes — Réponse D : non coplanaires

3. La distance du point A$(1\,;\,-2\,;\,1)$ au plan d'équation
$-x+3y-z+5=0$ est égale à :

Réponse A : $\dfrac{3}{11}$ — Réponse B : $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$
Réponse C : $\dfrac{1}{2}$ — Réponse D : $\dfrac{8}{\sqrt{11}}$

4. Le projeté orthogonal du point B$(1\,;6\,;0)$ sur le plan d'équation
$-x+3y-z+5=0$ a pour coordonnées :

Réponse A : $(3\,;1\,;5)$ — Réponse B : $(2\,;3\,;1)$
Réponse C : $(3\,;0\,;2)$ — Réponse D : $(-2;3;-6)$

25 Amérique du Nord mai 2008

Retour au tableau

Partie A

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment [AD].

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{\text{MD}} \cdot \overrightarrow{\text{MA}} = \text{MI}^2 - \text{IA}^2$.
2. En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace, tels que
$\overrightarrow{\text{MD}} \cdot \overrightarrow{\text{MA}} = 0$.

Partie B :

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$\text{A}(3~;~0~;~0),~\text{B}(0~;~6~;~0),\text{C}(0~;~0~;~4) \quad \text{et} \quad \text{D}(-5~;~0~;~1).$$

1. **a.** Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

   b. Déterminer une équation du plan (ABC).
2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, orthogonale au plan (ABC) passant par D.

   b. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

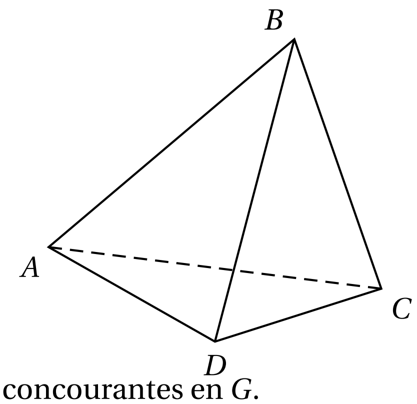
   c. Calculer la distance du point D au plan (ABC).

   d. Démontrer que le point H appartient l'ensemble (E) défini dans la partie A.

26 Pondichéry avril 2008

Retour au tableau

On considère un tétraèdre $ABCD$.
On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$.
On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.



1. Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$.
(On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équifacial, car ses faces sont isométriques).

2. **a.** Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.

b. En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

3. **a.** Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).

b. Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB). Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).

c. Montrer que G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$.

d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$?

27 Nouvelle-Calédonie mars 2008

Retour au tableau

L'espace est rapporté à un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormé. Soit t un nombre réel. On donne le point A$(-1~;~2~;~3)$ et la droite $\mathcal{D}$ de système d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 9+4t \\ y & = & 6+t \\ z & = & 2+2t \end{array}\right.$$

Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes la distance d entre le point A et la droite $\mathcal{D}$.

1. **a.** Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$, perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ et passant par A.

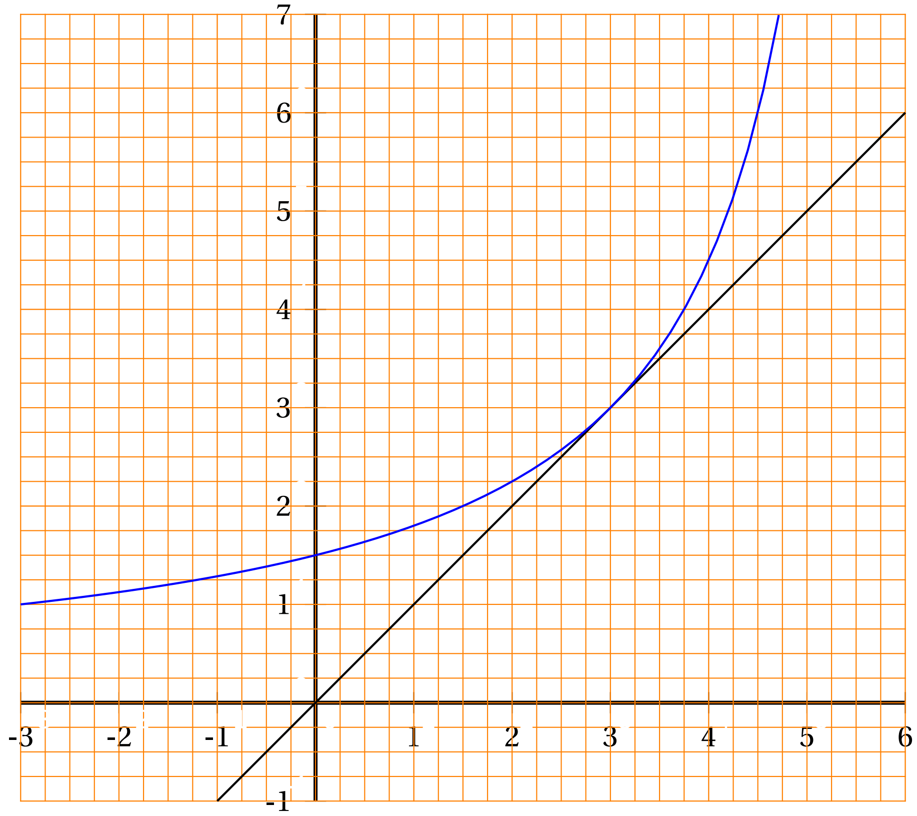
   b. Vérifier que le point B$(-3~;~3~;~-4)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

   c. Calculer la distance d_{B} entre le point B et le plan $\mathcal{P}$.

   d. Exprimer la distance d en fonction de d_{B} et de la distance AB. En déduire la valeur exacte de d.

2. Soit M un point de la droite $\mathcal{D}$. Exprimer AM^2 en fonction de t. Retrouver alors la valeur de d.

ANNEXE (à rendre avec la copie)



28 Nouvelle-Calédonie décembre 2007

Retour au tableau

Soit OABC un tétraèdre trirectangle (les triangles OAB, OBC, OCA sont rectangles en O). On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).
Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de ce tétraèdre.

1. **a.** Pourquoi la droite (OH) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?
Pourquoi la droite (OA) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?

b. Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales.
On démontrera de façon analogue que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales. Ce résultat est ici admis.

c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

2. L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 3).

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par O et orthogonale au plan (ABC).

c. Démontrer que le plan (ABC) et la droite (D) se coupent en un point H de coordonnées $\left(\dfrac{36}{49}~;~\dfrac{18}{49}~;~\dfrac{12}{49}\right)$.

3. **a.** Calculer la distance du point O au plan (ABC).

b. Calculer le volume du tétraèdre OABC. En déduire l'aire du triangle ABC.

c. Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

29 Amérique du Sud novembre 2007

Retour au tableau

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. On considère le point A de coordonnées $(-2\ ;\ 8\ ;\ 4)$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1\ ;\ 5\ ;\ -1)$.
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives $x - y - z = 7$ et $x - 2z = 11$.

   Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants. On donnera une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée (d').

   Montrer que le vecteur de coordonnées $(2\ ;\ 1\ ;\ 1)$ est un vecteur directeur de (d').
3. Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.
4. On considère le point H de coordonnées $(-3\ ;\ 3\ ;\ 5)$ et le point H$'$ de coordonnées $(3\ ;\ 0\ ;\ -4)$.
   a. Vérifier que H appartient à (d) et que H$'$ appartient à (d').
   b. Démontrer que la droite (HH$'$) est perpendiculaire aux droites (d) et (d').
   c. Calculer la distance entre les droites (d) et (d'), c'est-à-dire la distance HH$'$.
5. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{M\text{H}'} \cdot \overrightarrow{\text{HH}'} = 126$.

30 Polynésie septembre 2007

Retour au tableau

Pour cet exercice, les figures correspondant aux parties A et B sont fournies sur la feuille jointe en annexe . Cette feuille ne sera pas remise avec la copie.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère un triangle OAB et une similitude directe σ de centre O, de rapport 2 et d'angle θ. Soit :

- les points A$'$ et B$'$, images respectives des points A et B par la similitude σ ;
- les points I, milieu du segment [A$'$ B] et J, milieu du segment [A B$'$] ;
- le point M milieu du segment [AA$'$] ;
- le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AR) et le point H$'$ image du point H par la similitude σ.

Partie A. Étude d'un exemple

Dans cette partie, le point A a pour affixe $-6+4\text{i}$, le point B a pour affixe $2+4\text{i}$, et le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), a donc pour affixe 4i.
La similitude σ est la similitude directe de centre O, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Déterminer les affixes des points A$'$, B$'$ et H$'$.

2. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH$'$).

Partie B. Étude du cas général

1. **a.** Montrer que H$'$ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (A$'$ B$'$).

b. Montrer que $\overrightarrow{\text{MI}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AB}}$. On admet que $\overrightarrow{\text{MJ}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{A}'\text{B}'}$.

c. En déduire que $\dfrac{\text{MJ}}{\text{MI}} = \dfrac{\text{OH}'}{\text{OH}}$ et que $\left(\overrightarrow{\text{MI}},\ \overrightarrow{\text{MJ}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{OH}},\ \overrightarrow{\text{OH}'}\right) + k\times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. On appelle s la similitude directe qui transforme M en O et I en H.
On note K l'image du point J par la similitude s.

a. Montrer que OK= OH$'$, puis que $\left(\overrightarrow{\text{MI}},\ \overrightarrow{\text{MJ}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{OK}},\ \overrightarrow{\text{OH}'}\right) + k\times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

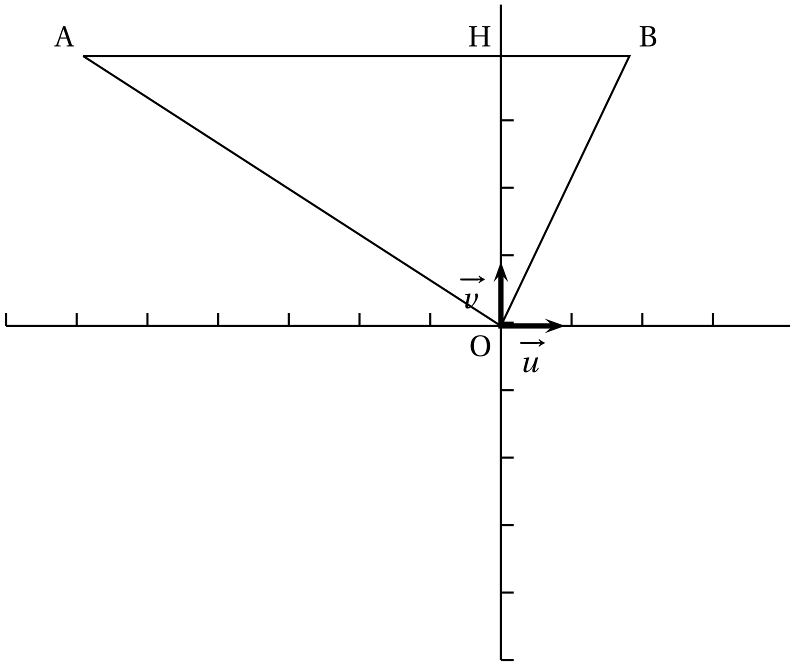
b. En déduire que le point H$'$ est l'image du point J par la similitude s.

3. Montrer que $\left(\overrightarrow{\text{IJ}},\ \overrightarrow{\text{HH}'}\right) = \left(\overrightarrow{\text{MJ}},\ \overrightarrow{\text{OH}}\right) + k\times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH$'$).

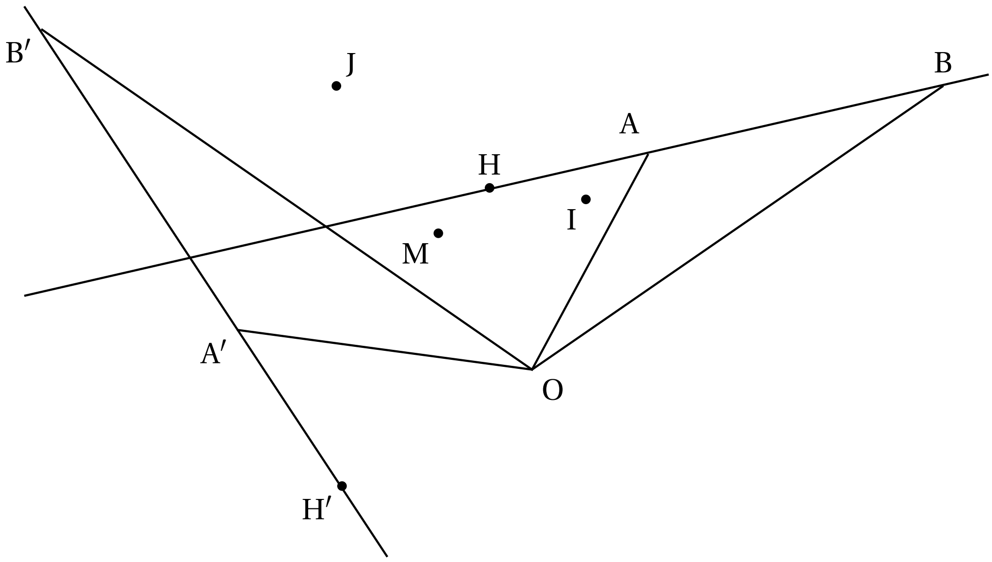
ANNEXE

Cette page ne sera pas remise avec la copie

Partie A



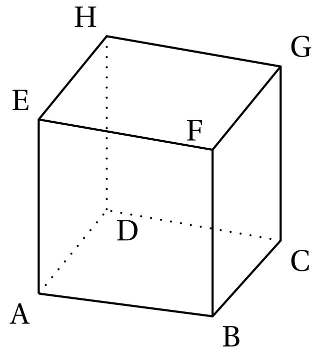
Partie B



31 Polynésie septembre 2007

Retour au tableau

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 3.



On choisit le repère orthonormal $\left(\mathrm{D}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ tel que $\vec{\imath}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DA}}$, $\vec{\jmath}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ et $\vec{k}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DH}}$.

1. **a.** Donner les coordonnées des points A, C et E.

   b. Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système $\{(\mathrm{C}\,;\,2),\,(\mathrm{E}\,;\,1)\}$.

   c. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DL}}$.

2. Soit $(a,\,b)$ un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}M}=a\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ et N le point de la droite (DL) tel que $\overrightarrow{\mathrm{D}N}=b\overrightarrow{\mathrm{DL}}$.

   a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DL}}$ si et seulement si le couple $(a,\,b)$ vérifie le système

   $$\left\{\begin{array}{lcl}-a+2b&=&1\\3a-b&=&0\end{array}\right.$$

   b. En déduire qu'il existe un seul point $\mathrm{M_0}$ de (AE) et un seul point $\mathrm{N_0}$ de (DL) tels que la droite $(\mathrm{M_0N_0})$ est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

   c. Déterminer les coordonnées des points $\mathrm{M_0}$ et $\mathrm{N_0}$ puis calculer la distance $\mathrm{M_0N_0}$.

32 Polynésie juin 2007

Retour au tableau

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points $\text{A}\left(\frac{2}{3}~;~-3~;~2\right)$ et $\text{B}\left(-\frac{4}{3}~;~0~;~-4\right)$.

On note I le milieu du segment [AB] et (S) la sphère de diamètre [AB].

1. Soit E le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; 1).

a. Calculer les coordonnées de E.

b. Montrer que l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{M\text{O}}\right\|$ est le plan médiateur du segment [OE].

c. Montrer qu'une équation du plan (P) est $y = -1$.

2. a. Calculer le rayon de la sphère (S) et la distance du centre I de la sphère au plan (P).
En déduire que l'intersection (C) du plan (P) et de la sphère (S) n'est pas vide.

b. Montrer qu'une équation de (C) dans le plan (P) est $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z+1)^2 = 12$.

En déduire que (C) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3. Soit D le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3}~;~-\frac{1}{2}~;~4\sqrt{3}-1\right)$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (ID).

b. En déduire que la droite (ID) est sécante au cercle (C) en un point noté F dont on donnera les coordonnées.

33 Métropole juin 2007

Retour au tableau

L'espace est muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. Soient (P) et (P′) les plans d'équations respectives $x+2y-z+1=0$ et $-x+y+z=0$. Soit A le point de coordonnées $(0\,;\,1\,;\,1)$.

1. Démontrer que les plans (P) et (P′) sont perpendiculaires.

2. Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lll} x &=& -\dfrac{1}{3}+t \\ y &=& -\dfrac{1}{3} \\ z &=& t \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

Démontrer que les plans (P) et (P′) se coupent selon la droite (d).

3. Calculer la distance du point A à chacun des plans (P) et (P′).

4. En déduire la distance du point A à la droite (d).

34 Antilles-Guyane juin 2007

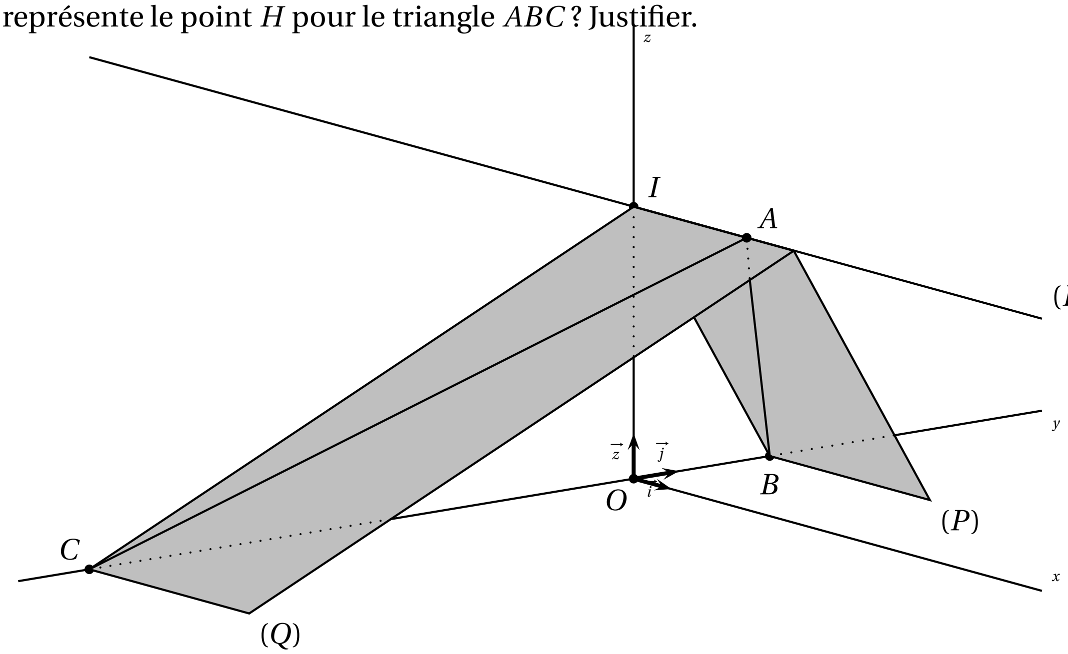
Retour au tableau

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points $A(3~;~0~;~6)$ et $I(0~;~0~;~6)$, et l'on appelle (D) la droite passant par A et I. On appelle (P) le plan d'équation $2y+z-6=0$ et (Q) le plan d'équation $y-2z+12=0$.

1. Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires.
2. Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D).
3. Démontrer que (P) et (Q) coupent l'axe $\left(\text{O}~;~\vec{\jmath}\right)$ et déterminer les coordonnées des points B et C, intersections respectives de (P) et (Q) avec l'axe $\left(\text{O}~;~\vec{\jmath}\right)$.
4. Démontrer qu'une équation du plan (T) passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$ est

$$x+4y+2z-12=0.$$

5. Donner une représentation paramétrique de la droite (OA). Démontrer que la droite $(\text{O}A)$ et le plan (T) sont sécants en un point H dont on déterminera les coordonnées.
6. Que représente le point H pour le triangle ABC ? Justifier.



35 Antilles-Guyane juin 2007

Retour au tableau

$\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal direct du plan complexe. Soit A le point d'affixe $1+\text{i}$. Au point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \text{i}\overline{z}\right)$.

1. On pose $z = x + \text{i}y$ et $z' = x' + \text{i}y'$ avec x, y, x' et y' réels.

a. Démontrer les égalités suivantes : $x' = \dfrac{1}{2}(x+y)$ et $y' = \dfrac{1}{2}(x+y)$. En déduire que le point M' appartient à la droite $(\text{O}A)$.

b. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $M = M'$.

c. Démontrer que pour tout point M du plan les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{\text{O}A}$ sont orthogonaux.

2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. M_1 est le point d'affixe z_1 image de M par r, M_2 le point d'affixe $z_2 = \overline{z}$, M_3 le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $\text{O}M_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.

a. Dans cette question uniquement M a pour affixe $4+\text{i}$, placer les points M, M_1, M_2, M_3.

b. Exprimer z_1 en fonction de z, puis z_3 en fonction de z.

c. $OM_1M_3M_2$ est-il un losange ? Justifier.

d. Vérifier que $z' - z = \dfrac{1}{2}\text{i}z_3$. En déduire que $MM' = \dfrac{1}{2}\text{O}M_3$.

3. Démontrer que les points M, M_1, M_2 e tM_3 appartiennent à un même cercle de centre O si et seulement si $MM' = \dfrac{1}{2}\text{O}M$. Donner alors la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{M'\text{O}M}$.

36 Amérique du Nord juin 2007

Retour au tableau

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 4 cm).

Soit A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \mathrm{i}$ et B le point d'affixe $z_{\mathrm{B}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r.

- **a.** Déterminer une écriture complexe de r.
- **b.** Montrer que l'affixe de C est $z_{\mathrm{C}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
- **c.** Écrire z_{B} et z_{C} sous forme algébrique.
- **d.** Placer les points A, B et C.

2. Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, -1 et 2.

- **a.** Montrer que l'affixe de D est $z_{\mathrm{D}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. Placer le point D.
- **b.** Montrer que A, B, C et D sont sur un même cercle.

3. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h.

- **a.** Déterminer une écriture complexe de h.
- **b.** Montrer que l'affixe de E est $z_{\mathrm{E}} = \sqrt{3}$. Placer le point E.

4.
- **a.** Calculer le rapport $\dfrac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{C}}}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.
- **b.** En déduire la nature du triangle CDE.

37 Liban juin 2007

Retour au tableau

Pour chacune des 5 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère la droite (d) dont un système d'équations paramétriques est : $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 2-\dfrac{t}{2}\\ y &=& 1\\ z &=& 5-\dfrac{3t}{2}\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$

On note A le point de coordonnées $(2~;~-1~;~1)$, B le point de coordonnées $(4~;~-2~;~2)$ et C le point de (d) d'abscisse 1.

1. Proposition 1 « La droite (d) est parallèle à l'axe $\left(\text{O}~;~\vec{\jmath}\right)$ ».
2. Proposition 2 « Le plan P d'équation $x+3z-5=0$ est le plan passant par A et orthogonal à (d) ».
3. Proposition 3 « La mesure de l'angle géométrique $\widehat{\text{BAC}}$ est $\dfrac{\pi}{3}$ radians ».
4. Soit G le barycentre des points pondérés $(\text{A}~;-1)$, $(\text{B}~;1)$ et $(\text{C}~;1)$. Proposition 4 « Les segments [AG] et [BC] ont le même milieu ».
5. Proposition 5 « La sphère de centre C et passant par B coupe le plan P d'équation $x+3z-5=0$ ».

38 Pondichéry avril 2007

Retour au tableau

1. *Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances*

   Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit R la rotation du plan de centre Ω, d'affixe ω et d'angle de mesure θ. L'image par R d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :

   – $R(\Omega) = \Omega$
   – pour tout point M du plan, distinct de Ω, l'image M' de M est définie par $\Omega M' = \Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \quad [2\pi]$.

   On rappelle que, pour des points A et B d'affixes respectives a et b, $AB = |b - a|$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b - a) \quad [2\pi]$.

   Question : Montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M' par la rotation R, sont liées par la relation

$$z' - \omega = \text{e}^{\text{i}\theta}(z - \omega).$$

2. On considère les points I et B d'affixes respectives $z_{\text{I}} = 1 + \text{i}$ et $z_{\text{B}} = 2 + 2\text{i}$. Soit R la rotation de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

   a. Donner l'écriture complexe de R.

   b. Soit A l'image de I par R. Calculer l'affixe z_{A} de A.

   c. Montrer que O, A et B sont sur un même cercle de centre I. En déduire que OAB est un triangle rectangle en A. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)$.

   d. En déduire une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{OA}}\right)$.

3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{IO}}$. On pose $\text{A}' = T(\text{A})$.

   a. Calculer l'affixe $z_{\text{A}'}$ de A′.

   b. Quelle est la nature du quadrilatère OIAA′ ?

   c. Montrer que $-\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de $z_{\text{A}'}$.

39 Pondichéry avril 2007

Retour au tableau

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x + y - 2z + 4 = 0$ et les points A de coordonnées $(3\,;\,2\,;\,6)$, B de coordonnées $(1\,;\,2\,;\,4)$, et C de coordonnées $(4\,;\,-2\,;\,5)$.

1. **a.** Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.

   b. Vérifier que ce plan est le plan $\mathscr{P}$.

2. **a.** Montrer que le triangle ABC est rectangle.

   b. Écrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

   c. Soit K le projeté orthogonal de O sur $\mathscr{P}$. Calculer la distance OK.

   d. Calculer le volume du tétraèdre OABC.

3. On considère, dans cette question, le système de points pondérés

$$S = \{(\text{O},\ 3),\ (\text{A},\ 1),\ (\text{B},\ 1),\ (\text{C},\ 1)\}$$

   a. Vérifier que ce système admet un barycentre, qu'on notera G.

   b. On note I le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G appartient à (OI).

   c. Déterminer la distance de G au plan $\mathscr{P}$.

4. Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\left\|3\overrightarrow{M\text{O}} + \overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = 5.$$

   Déterminer Γ. Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à $\mathscr{P}$ et Γ ?

40 Nouvelle-Calédonie mars 2007

Retour au tableau

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. *Question de cours*

Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}\,(a,\ b,\ c)$ et un point $M_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$.

2. On considère les points A(1 ; 2 ; −3), B(−3 ; 1 ; 4) et C(2 ; 6 ; −1).

a. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

b. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + 3 = 0$.

c. Soit I le point de coordonnées (−5 ; 9 ; 4). Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}$ passant par I et perpendiculaire au plan (ABC).

d. Déterminer les coordonnées du point J, intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (ABC).

e. En déduire la distance du point I au plan (ABC).

41 Polynésie septembre 2006

Retour au tableau

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Soit (P_1) le plan d'équation cartésienne $-2x+y+z-6=0$ et (P_2) le plan d'équation cartésienne $x-2y+4z-9=0$.

1. Montrer que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires. On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal non nul à l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.
2. Soit (D) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2).
   Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -7+2t\\ y &=& -8+3t \quad (t \in \mathbb{R}).\\ z &=& t \end{array}\right.$$

3. Soit M un point quelconque de (D) de paramètre t et soit A le point de coordonnées $(-9~;~-4~;~-1)$.
   a. Vérifier que A n'appartient ni à (P_1), ni à (P_2).
   b. Exprimer AM^2 en fonction de t.
   c. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=2t^2-2t+3$.
   - Étudier les variations de f.
   - Pour quel point M, la distance AM est-elle minimale ? Dans la suite, on désignera ce point par I.
   - Préciser les coordonnées du point I.
4. Soit (Q) le plan orthogonal à (D) passant par A.
   a. Déterminer une équation de (Q).
   b. Démontrer que I est le projeté orthogonal de A sur (D).

42 Métropole septembre 2006

Retour au tableau

On considère dans l'espace un cube de 3 cm de côté, noté ABCDEFGH et représenté sur l'annexe.
Soit I le barycentre des points pondérés (E ; 2) et (F ; 1), J celui de (F ; 1) et (B ; 2) et enfin K celui de (G ; 2) et (C ; 1).
On veut déterminer l'ensemble des points M équidistants de I, J *et* K. *On note* Δ *cet ensemble.*

1. Placer les points I, J et K sur la figure de **l'annexe qui sera rendue avec la copie.**
2. Soit Ω le point de Δ situé dans le plan (IJK). Que représente ce point pour le triangle IJK ?
   Pour la suite de l'exercice, on se place maintenant dans le repère orthonormal suivant :
   $\left(\text{A}\,;\,\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AD}}\,;\,\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.
3. Donner les coordonnées des points l, J et K.
4. Soit P(2 ; 0 ; 0) et Q(1 ; 3 ; 3) deux points que l'on placera sur la figure. Démontrer que la droite (PQ) est orthogonale au plan (IJK).
5. Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$.
   a. Démontrer que M appartient à Δ si, et seulement si, le triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ est solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de Δ ?
   b. Vérifier que P et Q appartiennent à Δ. Tracer Δ sur la figure.
6. **a.** Déterminer un vecteur normal au plan (IJK) et en déduire une équation cartésienne de ce plan.
   b. Déterminer alors les coordonnées exactes de Ω.

43 Polynésie juin 2006

Retour au tableau

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on donne les points A(0 ; 0 ; 2) B(0 ; 4 ; 0) et C(2 ; 0 ; 0).
On désigne par I le milieu du segment [BC], par G l'isobarycentre des points A, B et C, et par H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

Proposition 1 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{\text{A}M} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = 0$ est le plan (AIO) ».

Proposition 2 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \left\|\overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}\right\|$ est la sphère de diamètre [BC] ».

Proposition 3 : « le volume du tétraèdre OABC est égal à 4 ».

Proposition 4 : « le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y + 2z = 4$ et le point H a pour coordonnées $\left(\dfrac{8}{9}\ ;\ \dfrac{4}{9}\ ;\ \dfrac{8}{9}\right)$

Proposition 5 : « la droite (AG) admet pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& t\\ y &=& 2t\\ z &=& 2-2t\end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R}) \text{ ».}$$

44 La Réunion juin 2006

Retour au tableau

Pour chacune des questions 1,2,3 *et* 4, ***parmi les quatre affirmations proposées, deux sont exactes et deux sont fausses****. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et les deux affirmations qu'il pense exactes. Aucune justification n'est demandée. Les quatre questions sont indépendantes et sont notées sur* 1 *point.*
Toute réponse juste rapporte 0,5 *point.*
Donner plus de 2 *réponses à une question entraîne la nullité de la question.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. Soit P le plan d'équation $2x + 3y + 4z - 1 = 0$.

- **a.** La distance du point O au plan P est égale à 1.
- **b.** La distance du point O au plan P est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{29}}$.
- **c.** Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\ ;\ \dfrac{3}{2}\ ;\ 2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P.
- **d.** Le plan Q d'équation $-5x + 2y + z = 0$ est parallèle au plan P.

2. On désigne par P le plan d'équation $2x + y - z = 0$, et par D la droite passant par le point A(1 ; 1 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (1 ; −4 ; −2).

- **a.** La droite D est parallèle au plan P.
- **b.** La droite D est orthogonale au plan P.
- **c.** La droite D est sécante avec le plan P.
- **d.** Un système d'équations paramétriques de D est $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 + t \\ y & = & 1 - 4t \\ z & = & 1 - 2t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$.

3. On désigne par E l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que : $x + y + z = 3$ et $2x - z = 1$. Soit le point A(1 ; 1 ; 1).

- **a.** L'ensemble E contient un seul point, le point A.
- **b.** L'ensemble E est une droite passant par A.
- **c.** L'ensemble E est un plan passant par A.
- **d.** L'ensemble E est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ (1 ; −3 ; 2).

4. ABCD est un tétraèdre quelconque. Soit P le plan passant par A et orthogonal à la droite (BC).

- **a.** Le plan P contient toujours le point D.
- **b.** Le plan P contient toujours la hauteur (AH) du triangle ABC.
- **c.** Le plan P est toujours l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{\text{B}M} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = \overrightarrow{\text{BA}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}}.$$

- **d.** Le plan P est toujours le plan médiateur du segment [BC].

45 Métropole juin 2006

Retour au tableau

Soit $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.
On considère les points

$$A(2~;~4~;~1),\ B(0~;~4~;~-3),\ C(3~;~1~;~-3),\ D(1~;~0~;~-2),\ E(3~;~2~;~-1),\ I\left(\frac{3}{5}~;~4~;~-\frac{9}{5}\right)$$

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire, sans le justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse. Pour chaque question, il est compté un point si la réponse est exacte et zéro sinon.

1. Une équation du plan (ABC) est : $2x+2y-z-11=0$.
2. Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
3. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
4. La droite (CD) est donnée par la représentation paramétrique suivante :

$$(CD)\quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1+2t \\ y & = & -1+t \\ z & = & 1-t \end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

5. Le point I est sur la droite (AB).

46 Centres étrangers juin 2006

Retour au tableau

ABCDEFGH est le cube d'arête 1 représenté sur la feuille annexe qui sera complétée et rendue avec la copie. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$

Partie A. Un triangle et son centre de gravité.

1. Démontrer que le triangle BDE est équilatéral.
2. Soit I le centre de gravité du triangle BDE.
   a. Calculer les coordonnées de I.
   b. Démontrer que $\overrightarrow{\text{AI}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AG}}$. Que peut-on en déduire pour les points A, I, G ?
3. Prouver que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).

Partie B. Une droite particulière

Pour tout nombre réel k, on définit deux points M_k et N_k, ainsi qu'un plan $\mathcal{P}_k$ de la façon suivante :

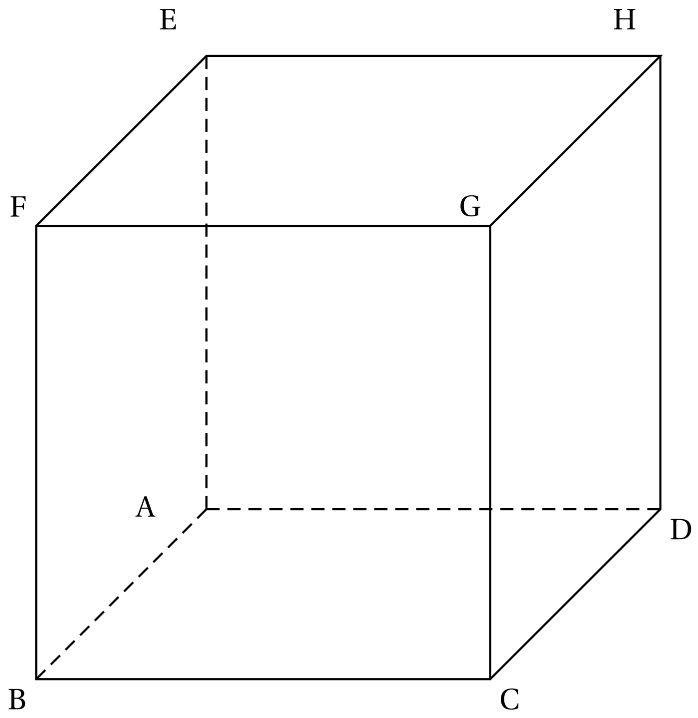
- M_k est le point de la droite (AG) tel que $\overrightarrow{\text{A}M_k} = k\overrightarrow{\text{AG}}$;
- $\mathcal{P}_k$ est le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE) ;
- N_k est le point d'intersection du plan $\mathcal{P}_k$ et de la droite (BC).

1. Identifier $\mathcal{P}_{\frac{1}{3}}$, $M_{\frac{1}{3}}$ et $N_{\frac{1}{3}}$ en utilisant des points déjà définis. Calculer la distance $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$.
2. Calcul des coordonnées de N_k.
   a. Calculer les coordonnées de M_k dans le repère $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.
   b. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}_k$ dans ce repère.
   c. En déduire que le point N_k a pour coordonnées $(1\,;\,3k-1\,;\,0)$.
3. Pour quelles valeurs de k la droite (M_kN_k) est-elle orthogonale â la fois aux droites (AG) et (BC) ?
4. Pour quelles valeurs de k la distance M_kN_k est-elle minimale ?
5. Tracer sur la figure donnée en annexe, la section du cube par le plan $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}}$. Tracer la droite $\left(M_{\frac{1}{2}}N_{\frac{1}{2}}\right)$ sur la même figure.

ANNEXE

Exercice 4 (commun à tous les candidats)

Feuille à compléter età rendre avec la copie



47 Antilles-Guyane juin 2006

Retour au tableau

On considère le tétraèdre ABCD ; on note I milieu du segment [AB] et J celui de [CD].

1. **a.** Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés
   $\{(\text{A},\ 1)\ ;\ (\text{B},\ 1)\ ;\ (\text{C},\ -1)\ ;\ (\text{D},\ 1)\}$.
   Exprimez $\overrightarrow{\text{IG}_1}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{CD}}$. Placez I, J et G_1 sur la figure (voir feuille annexe).

   b. Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés
   $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (D,\ 2)\}$.
   Démontrez que G_2 est le milieu du segment [ID]. Placez G_2.

   c. Démontrez que IG_1DJ est un parallélogramme.
   En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.

2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés
   $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (C,\ m-2)\ ;\ (D,\ m)\}$.

   a. Précisez l'ensemble $\mathscr{E}$ des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.
   Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$.

   b. Démontrez que G_m, appartient au plan (ICD).

   c. Démontrez que le vecteur $m\overrightarrow{\text{J}G_m}$ est constant.

   d. En déduire l'ensemble $\mathscr{F}$ des points G_m lorsque m décrit l'ensemble $\mathscr{E}$.

48 Pondichéry avril 2006

Retour au tableau

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Partie A

(cette partie constitue une restitution organisée de connaissances)

Soit a, b, c et d des réels tels que $(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$. On considère le point I de coordonnées $\left(x_1,\ y_1,\ z_1\right)$ et le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a,\ b,\ c)$.

Le but de cette partie est de démontrer que la distance de I au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{\left|ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

1. Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan $\mathscr{P}$. Déterminer, en fonction de $a,\ b,\ c,\ x_1,\ y_1$ et z_1, un système d'équations paramétriques de Δ.
2. On note H le point d'intersection de Δ et $\mathscr{P}$.
   - **a.** Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$.
   - **b.** Déterminer l'expression de k en fonction de $a,\ b,\ c,\ d,\ x_1,\ y_1$ et z_1.
   - **c.** En déduire que $IH = \dfrac{\left|ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Partie B

Le plan $\mathscr{Q}$ d'équation $x - y + z - 11 = 0$ est tangent à une sphère $\mathscr{S}$ de centre le point Ω de coordonnées $(1,\ -1,\ 3)$.

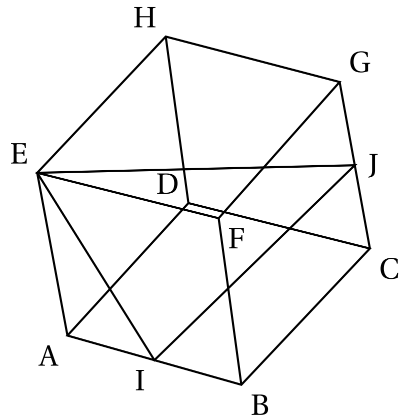
1. Déterminer le rayon de la sphère $\mathscr{S}$.
2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan $\mathscr{Q}$
3. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{Q}$.

49 Amérique du Sud novembre 2005

Retour au tableau

Dans cet exercice, une réponse par « VRAI » ou « FAUX », sans justification, est demandée au candidat en regard d'une liste d'affirmations. Toute réponse conforme à la réalité mathématique donne 0,4 *point. Toute réponse erronée enlève* 0,1 *point. L'absence de réponse n'est pas comptabilisée. Le total ne saurait être négatif.*

On donne le cube ABCDEFGFH, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes [AB] et [CG]. Les éléments utiles de la figure sont donnés ci-contre.
Le candidat est appelé à juger chacune des 10 *affirmations suivantes.*



On utilisera pour répondre la feuille annexe, qui sera rendue avec la copie.

	Affirmation	VRAI ou FAUX
1.	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}$	
2.	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$	
3.	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC}$	
4.	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = AB \times IC \times \cos\dfrac{\pi}{3}$	

On utilise à présent le repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

	Affirmation	VRAI ou FAUX
5.	Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& t+1\\ y &=& 2t\\ z &=& t\end{array}\right.$, le paramètre t décrivant $\mathbb{R}$.	
6.	Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& \frac{1}{2}t+1\\ y &=& t+1\\ z &=& \frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\end{array}\right.$, le paramètre t décrivant $\mathbb{R}$	
7.	$6x-7y+8z-3=0$ est une équation cartésienne de la droite (IJ).	
8.	L'intersection des plans (FIJ) et (ABC) est la droite passant par I et par le milieu de l'arête [DC].	
9.	Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -4\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FIJ).	
10.	Le volume du tétraèdre EFIJ est égal à $\dfrac{1}{6}$.	

50 Polynésie septembre 2005

Retour au tableau

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

Partie A

Dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{H}$ d'équation $y^2 - x^2 = 16$.

1. Montrer que $\mathcal{H}$ est la réunion de deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ où $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+16}$ et où $\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C}$ par une transformation simple que l'on précisera.
2. Étudier la fonction f (limites aux bornes de l'ensemble de définition et sens de variation).
   - **a.** Montrer que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote de $\mathcal{C}$.
   - **b.** Tracer $\mathcal{H}$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On nomme A et B les points de la courbe d'abscisses respectives -3 et 3. On considère le domaine $\mathcal{D}$ du plan constitué des points $M(x\,;\,y)$ vérifiant :

     $$-3 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } \sqrt{x^2+16} \leqslant y \leqslant 5.$$

     Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ et exprimer l'aire de $\mathcal{D}$ à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

Partie B

On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

1. - **a.** Donner l'écriture complexe de r.
   - **b.** On désigne par x' et y' les coordonnées du point M', image du point $M(x\,;\,y)$ du plan.

     Vérifier que $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y' & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \end{array}\right.$

     Déterminer les coordonnées des points A′ et B′, images respectives de A et B par la rotation r. Placer les points A′ et B′ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
2. Soit $\mathcal{H}'$ l'hyperbole d'équation $xy = 8$.
   - **a.** Tracer $\mathcal{H}'$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   - **b.** Montrer que $\mathcal{H}'$ est l'image de $\mathcal{H}$ par la rotation r.
3. Soit $\mathcal{D}'$ l'image de $\mathcal{D}$ par la rotation r. On admet que $\mathcal{D}'$ est l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan vérifiant $\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 4\sqrt{2}$ et
   $\dfrac{8}{x} \leqslant y \leqslant 5\sqrt{2} - x$.
   - **a.** Hachurer $\mathcal{D}'$.
   - **b.** Calculer l'aire de $\mathcal{D}'$,exprimée en cm^2. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de l'aire de $\mathcal{D}$.

51 Métropole septembre 2005

Retour au tableau

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par le point B$(1~;~-2~;~1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(-2~;~1~;~5)$ et le plan $\mathcal{R}$ d'équation cartésienne
$x+2y-7=0$.

a. Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.

b. Démontrer que l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ est la droite Δ passant par le point C$(-1~;4~;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(2~;~-1~;~1)$.

c. Soit le point A$(5~;~-2~;~-1)$. Calculer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$, puis la distance du point A au plan $\mathcal{R}$.

d. Déterminer la distance du point A à la droite Δ.

2. **a.** Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(1+2t~;~3-t~;~t)$. Déterminer en fonction de t la longueur AM. On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Étudier le sens de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$; préciser son minimum.

c. Interpréter géométriquement la valeut de ce minimum.

52 Antilles-Guyane septembre 2005

Retour au tableau

Pour cet exercice, vous recopierez pour chaque question, votre réponse.
Chaque réponse juste rapporte 1 *point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré* 0,5 *point par réponse fausse. La note finale de l'exercice ne pourra pas être inférieure à zéro.*

Soit $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$un repère orthonormal.

1. La droite passant par A(1 ; 2 ; −4) et B(−3 ; 4 ; 1) et la droite représentée par $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& -11-4t\\ y&=&8+2t\\ z&=&11+5t\end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$ sont :

☐ sécantes ☐ strictement parallèles ☐ confondues ☐ non coplanaires

2. Soient le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x+3y-z+4=0$ et la droite $\mathcal{D}$ représentée par $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& t\\ y&=&t\\ z&=&8+t\end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$

☐ $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont sécants. ☐ $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont strictement parallèles.

☐ $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$. ☐ Aucune de ces possibilités n'est vraie.

3. La distance du point A(1 ; 2 ; −4) au plan d'équation $2x+3y-z+4=0$ est :

☐ $\dfrac{8\sqrt{14}}{7}$ ☐ 16 ☐ $8\sqrt{14}$ ☐ $\dfrac{8}{7}$

4. Soient le point B(−3 ; 4 ; 1) et la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2=16$;

☐ B est à l'intérieur de $\mathcal{S}$ ☐ B est à l'extérieur de $\mathcal{S}$

☐ B est sur $\mathcal{S}$. ☐ On ne sait pas.

53 Asie juin 2005

Retour au tableau

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on appelle $\mathscr{D}$ la droite d'équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 1+2t\\ y & = & 2-t\\ z & = & -3-t \end{array}\right.$ et $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $x+2y-3z-1=0$.

Dans chacune des lignes du tableau ci-dessous, une seule affirmation est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la ligne et la lettre correspondant à l'affirmation choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

Numéro de la ligne	Affirmation A	Affirmation B	Affirmation C
1.	Le point M de coordonnées $(-1 ; 3 ; 2)$ appartient à $\mathscr{D}$	Le point N de coordonnées $(2 ; -1 ; -1)$ appartient à $\mathscr{D}$	Le point R de coordonnées $(3 ; 1 ; -4)$ appartient à $\mathscr{D}$
2.	Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1 ; 2 ; -3)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$	Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(-2 ; 1 ; 1)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$	Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(3 ; 1 ; -4)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$
3.	$\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$	$\mathscr{D}$ est strictement parallèle à $\mathscr{P}$	$\mathscr{D}$ est sécante à $\mathscr{P}$
4.	Le point G de coordonnées $(1 ; 3 ; -2)$ appartient à $\mathscr{P}$	Le point G de coordonnées $(1 ; 3 ; 2)$ appartient à $\mathscr{P}$	Le point G de coordonnées $(1\ 3 ; -1)$ appartient à $\mathscr{P}$
5.	Le plan Q_1 d'équation cartésienne $x+2y-3z+1=0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$	Le plan Q_2 d'équation cartésienne $4x-5y-2z+3=0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$	Le plan Q_3 d'équation cartésienne $-3x+2y-z-1=0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$
6.	La distance du point T de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ plan $\mathscr{P}$ est : $\sqrt{14}$	La distance du point T de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ au plan $\mathscr{P}$ est : 14	La distance du point T de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ au plan $\mathscr{P}$ est : $2\sqrt{3}$

54 Centres étrangers

Retour au tableau

Soit ABCD un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A avec AB = AC = AD = a. On appelle A_1 le centre de gravité du triangle BCD.

1. Montrer que la droite (AA_1) est orthogonale au plan (BCD).
$\left(\text{On pourra par exemple calculer } \overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}.\right)$

2. En exprimant de deux façons différentes le volume du tétraèdre ABCD, calculer la longueur du segment $[AA_1]$.

3. On appelle G l'isobarycentre du tétraèdre ABCD et I le milieu de [BC].

a. Montrer que G appartient au segment $[AA_1]$ et déterminer la longueur AG.

b. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|.$$

4. Soit H le symétrique de A par rapport à G.

a. Démontrer que $4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}$.

b. Démontrer l'égalité $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BA}$.

c. En déduire que HC = HD.

On rappelle que le volume d'une pyramide de hauteur h et d'aire de base associée b est

$$V = \frac{1}{3}bh.$$

55 La Réunion juin 2005

Retour au tableau

On appelle hauteur d'un tétraèdre toute droite contenant l'un des sommets de ce tétraèdre et perpendiculaire au plan de la face opposée à ce sommet. Un tétraèdre est orthocentrique si ses quatre hauteurs sont concourantes.

Partie A On considère un tétraèdre ABCD et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD). Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre ABCD issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD.

Partie B
Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on donne les points A(3 ; 2 ; −1), B(−6 ; 1 ; 1), C(4 ; −3 ; 3) et D(−1 ; −5 ; −1).

1. **a.** Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est :
   $-2x - 3y + 4z - 13 = 0$.

   b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD}$.

   d. Le tétraèdre ABCD est-il orthocentrique ?

2. On définit les points I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0), K(0 ; 0 ; 1). Le tétraèdre OIJK est-il orthocentrique ?

56 Liban juin 2005

Retour au tableau

Pour chacune des huit affirmations (entre guillemets) ci -dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention « vrai » ou « faux ».
Une réponse correcte rapporte 0,5 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points. Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.

1. « Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a\,;\,+\infty[$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. »
2. Soient f et g deux fonctions définies sur $[0\,;\,+\infty[$, g ne s'annulant pas :

   « Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$ ».
3. « Si f est une fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ telle que $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x}$ sur $[0\,;\,+\infty[$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ »
4. On considère un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.

   « Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ ».
5. « La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 + 3x + 1\right)\mathrm{e}^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = (2x + 3)\mathrm{e}^x$ ».
6. Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et -2.

   « Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients $3, -2$ et 1 alors G est le milieu du segment [CI] ».
7. Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1

   « L'ensemble des points M du plan tels que $\|3\overrightarrow{M\mathrm{A}} - 2\overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}}\| = 1$ est le cercle de centre G et de rayon 1 ».
8. Soient A et B deux points distincts du plan. On désigne par M un point quelconque du plan.

   « Le produit scalaire $\overrightarrow{M\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{M\mathrm{B}}$ est nul si et seulement si $M = \mathrm{A}$ ou $M = \mathrm{B}$ ».

57 Polynésie juin 2005

Retour au tableau

Pour chacune des cinq questions, une seule des trois propositions est exacte. **Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.**

Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,5 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.* L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points A(3 ; 1 ; 3) et B(−6 ; 2 ; 1). Le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne $x+2y+2z=5$.

1. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=2$ est :

   a. un plan de l'espace **b.** une sphère **c.** l'ensemble vide.

2. Les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$ sont :

   a. $\left(\dfrac{11}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$ **b.** $\left(\dfrac{8}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{7}{3}\right)$ **c.** $\left(\dfrac{7}{3}\,;\,-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$.

3. La sphère de centre B et de rayon 1 :

   a. coupe le plan $\mathcal{P}$ suivant un cercle ;

   b. est tangente au plan $\mathcal{P}$;

   c. ne coupe pas le plan $\mathcal{P}$.

4. On considère la droite $\mathcal{D}$ de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ (1 ; 2 ; −1) et la droite $\mathcal{D}'$ d'équations paramétriques $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3+2t\\ y &=& 3+t\\ z &=& t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$.

   Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont :

   a. coplanaires et parallèles **b.** coplanaires et sécantes **c.** non coplanaires.

5. L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est :

   a. la droite d'équations paramétriques $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -\dfrac{3}{2}-t\\ y &=& \dfrac{3}{2}-7t\\ z &=& 2+t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$.

   b. le plan d'équation cartésienne $9x-y+2z+11=0$.

   c. le plan d'équation cartésienne $x+7y-z-7=0$.

58 Pondichéry avril 2005

Retour au tableau

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives (1 ; 0 ; 2), (1 ; 1 ; 4) et (−1 ; 1 ; 1).

1. **a.** Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (3 ; 4 ; −2).
   Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x + y + 2z + 1 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.

   a. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.

   b. La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?

3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t.

   a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t.
   Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{IC}$.

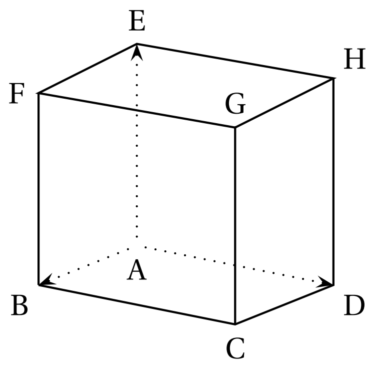
   b. Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment [IC] privé du point C.
   Pour quelle valeur de t, le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec G ?

59 Nouvelle–Calédonie novembre 2004

Retour au tableau

Cet exercice est un questionnaire choix multiples (Q.C.M.)

Les réponses cet exercice sont à inscrire sur la feuille jointe en annexe . Toute réponse ambigu sera considérée comme une absence de réponse.
Pour chacune des cinq questions une ou plusieurs réponses sont exactes. Le candidat doit inscrire V (vrai) ou F (faux) dans la case correspondante.
Aucune justification n'est demandée. Pour chaque question, 3 réponses correctes rapportent 1 point et 2 réponses correctes rapportent $\frac{1}{2}$ point.



Soit ABCDEFGH un cube de côté 1.
On choisit le repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$

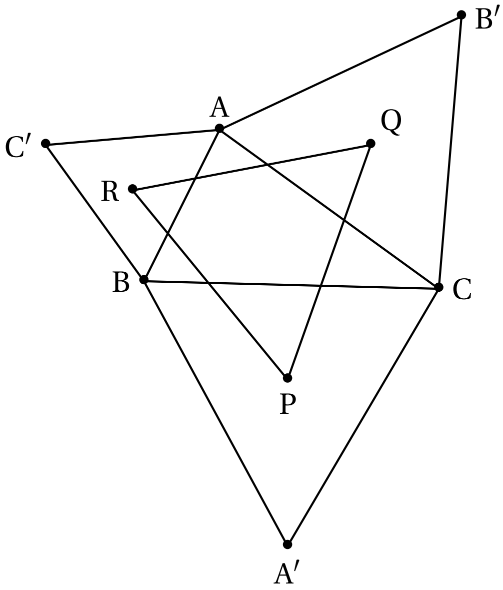
On appelle I et J les milieux respectifs des segments [EF] et [FG].
L est le barycentre de $\{(\mathrm{A},\ 1)\ ;\ (\mathrm{B},\ 3)\}$.
Soit (π) le plan d'équation $4x-4y+3z-3=0$.

1. Les coordonnées de L sont :
   a. $\left(\frac{1}{4}\,;\,0\,;\,0\right)$ **b.** $\left(\frac{3}{4}\,;\,0\,;\,0\right)$ **c.** $\left(\frac{2}{3}\,;\,0\,;\,0\right)$
2. Le plan (π) est le plan
   a. (GLE) **b.** (LEJ) **c.** (GFA)
3. Le plan parallèle au plan (π) passant par I coupe la droite (FB) en M de coordonnées
   a. $\left(1\,;\,0\,;\,\frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(1\,;\,0\,;\,\frac{1}{5}\right)$ **c.** $\left(1\,;\,0\,;\,\frac{1}{3}\right)$
4. **a.** Les droites (EL) et (FB) sont sécantes en un point N qui est le symétrique de M par rapport B.
   b. Les droites (EL) et (IM) sont parallèles.
   c. Les droites (EL) et (IM) sont sécantes.
5. Le volume du tétraèdre FIJM est :
   a. $\frac{1}{36}$ **b.** $\frac{1}{48}$ **c.** $\frac{1}{24}$

60 Antilles–Guyane septembre 2004

Retour au tableau

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct, on considère ABC un triangle direct sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux BCA$'$, ACB$'$ et ABC$'$. On considère respectivement les points P, Q et R centres de gravités respectifs des triangles B CA$'$, ACB$'$ et ABC$'$.



On note $a,\ b,\ c,\ a',\ b',\ c',\ p,\ q$ et r les affixes respectives des points A, B, C, A$'$, B$'$, C$'$, P, Q et R.

1. **a.** Traduire, avec les affixes des points concernés, que C$'$ est l'image de A dans une rotation d'angle de mesure dont on précisera le centre.

   b. Montrer que $a' + b' + c' = a + b + c$.
2. En déduire que $p + q + r = a + b + c$.
3. En déduire que les triangles ABC, A$'$B$'$C$'$ et PQR ont même centre de gravité.
4. Montrer que :
$$3(q - p) = (b' - c) + (c - a') + (a - b).$$
   On admettra que, de même :
$$3(r - p) = (a - c) + (b - a') + (c' - b).$$
5. Justifier les égalités suivantes :
$$a - c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b' - c)\ ;\ b - a' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c - a')\ ;\ c' - b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a - b).$$
6. Déduire des **questions 4.** et **5.** que le triangle PQR est équilatéral.

61 Amérique du Nord mai 2004

Retour au tableau

Dans le plan affine, on considère ABC un triangle rectangle en A, I le milieu du segment [AB] et J le centre de gravité de ABC.

Pour tout réel m, différent de $-\dfrac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés

$$S_m = \{(\text{A},\ 1),\ (\text{B},\ m),\ (\text{C},\ 2m)\}.$$

Pour tout point M du plan on note $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} - 2\overrightarrow{M\text{C}}$.

Pour chacune des six affirmations suivantes, dites si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Chaque bonne réponse donne 0,5 *point, chaque réponse fausse ou illisible enlève* 0,25 *point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Un éventuel total négatif serait ramené à* 0. Répondre aux affirmations sur la page annexe.

Affirmation	**V ou F**
G_1 est le milieu du segment [CI].	
G_1 est barycentre de $\left\{(\text{J},\ 2),\ \left(\text{C},\ \dfrac{2}{3}\right)\right\}$	
Pour tout point M, $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{\text{AB}} + 2\overrightarrow{\text{AC}}$.	
Pour tout m, distinct de $-\dfrac{1}{3}$, $\overrightarrow{\text{A}G_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\text{AG}_{-1}}$.	
$\text{IBG}_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle.	
Pour tout point P de (AG_{-1}), il existe un réel m tel que $P = G_m$.	

62 Antilles–Guyane juin 2004

Retour au tableau

On considère le tétraèdre ABCD ; on note I milieu du segment [AB] et J celui de [CD].

1. **a.** Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés
   $\{(\text{A},\ 1)\ ;\ (\text{B},\ 1)\ ;\ (\text{C},\ -1)\ ;\ (\text{D},\ 1)\}$.
   Exprimez $\overrightarrow{\text{IG}_1}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{CD}}$. Placez I, J et G_1 sur la figure (voir feuille annexe).

   b. Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (D,\ 2)\}$.
   Démontrez que G_2 est le milieu du segment [ID]. Placez G_2.

   c. Démontrez que IG_1DJ est un parallélogramme.
   En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.

2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés
   $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (C,\ m-2)\ ;\ (D,\ m)\}$.

   a. Précisez l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.
   Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.

   b. Démontrez que G_m, appartient au plan (ICD).

   c. Démontrez que le vecteur $m\overrightarrow{\text{J}G_m}$ est constant.

   d. En déduire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points G_m lorsque m décrit l'ensemble $\mathcal{E}$.

63 Métropole juin 2004

Retour au tableau

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 1/2 point l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on donne le point S(1 ; −2 ; 0) et le plan P d'équation $x+y-3z+4=0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point S et perpendiculaire au plan P est :

$$\text{A}:\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+t\\ y &=& 1-2t\\ z &=& -3\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R} \qquad \text{B}:\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+t\\ y &=& -1+t\\ z &=& 1-3t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}$$

$$\text{C}:\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+t\\ y &=& -2-2t\\ z &=& 3t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R} \qquad \text{D}:\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+t\\ y &=& -1+t\\ z &=& -3-3t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

2. Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P sont :

$$\text{A}:(-4\,;\,0\,;\,0) \quad \text{B}:\left(\frac{6}{5}\,;\,\frac{-9}{5}\,;\,\frac{3}{5}\right) \quad \text{C}:\left(\frac{7}{9}\,;\,\frac{-2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right) \quad \text{D};\left(\frac{8}{11}\,;\,\frac{-25}{11}\,;\,\frac{9}{11}\right)$$

3. La distance du point S au plan P est égale à :

$$\text{A}:\frac{\sqrt{11}}{3} \qquad \text{B}:\frac{3}{\sqrt{11}} \qquad \text{C}:\frac{9}{\sqrt{11}} \qquad \text{D}:\frac{9}{11}$$

4. On considère la sphère de centre S et de rayon 3. L'intersection de la sphère S et du plan P est égale

A : au point I(1 ; −5 ; 0)

B : au cercle de centre H et de rayon $r=3\sqrt{\dfrac{10}{11}}$

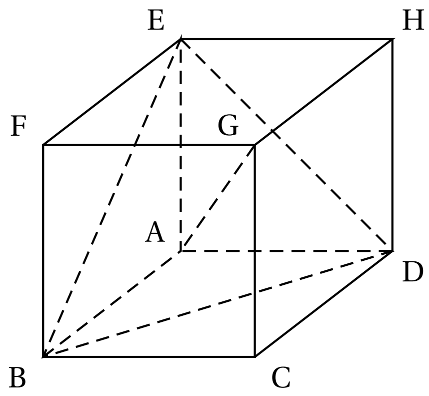
C : au cercle de centre S et de rayon $r=2$

D : au cercle de centre H et de rayon $r=\dfrac{3\sqrt{10}}{11}$.

64 Nouvelle–Calédonie mars 2004

Retour au tableau

On considère Ie cube ABCDEFGH ci-contre. O_1 et O_2 sont les centres des carrés ABCD et EFGH, et I est le centre de gravité du triangle EBD. Soit m un nombre réel et G_m le barycentre du système de points pondérés :



$$\{(\text{E}\,;\,1),\ (\text{B}\,;\,1-m),\ (\text{G}\,;\,2m-1),\ (\text{D}\,;\,1-m)\}$$

.

Partie A

1. Justifier l'existence du point G_m.
2. Préciser la position du point G_1.
3. Vérifier que $G_0 = A$. En déduire que les points A, I et G sont aIignés.
4. Démontrer que $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$. En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m parcourt l'ensemble des nombres réels.
5. **a.** Vérifier que les points A, G_m , E et O_1, sont coplanaires.

   b. Déterminer la valeur de m pour laquelle G_m se trouve sur la droite (EI).

65 Nouvelle–Calédonie novembre 2003

Retour au tableau

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$; on considère les points A(3 ; 0 ; 10), B(0 ; 0 ; 15) et C(0 ; 20 ; 0).

1. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

   b. Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses au point E(9 ; 0 ; 0).

   c. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC.

   a. Justifier que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (OEH). En déduire que (EH) est la hauteur issue de E dans le triangle EBC.

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (OEH).

   c. Vérifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne

$$20x + 9y + 12z - 180 = 0.$$

   d. Montrer que le système $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ 4y - 3z & = & 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 & = & 0 \end{array}\right.$ a une solution unique. Que représente cette solution ?

   e. Calculer la distance OH, en déduire que EH = 15 et l'aire du triangle EBC.

3. En exprimant de deux façons le volume du tétraèdre OEBC, déterminer la distance du point O au plan (ABC). Pouvait-on prévoir le résultat à partir de l'équation obtenue en **2. c.** ?

66 Polynésie septembre 2003

Retour au tableau

L'espace est rapporté à un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ orthonormé. Soit s un nombre réel.
On donne les points A (8 ; 0 ; 8), B(10 ; 3 ; 10) ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & -5+3s \\ y & = & 1+2s \\ z & = & -2s \end{array}\right.$$

1. **a.** Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ définie par A et B.

   b. Démontrer que $\mathscr{D}$ et Δ sont non coplanaires.

2. **a.** Le plan $\mathscr{P}$ est parallèle à $\mathscr{D}$ et contient Δ. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\ ;\ -2\ ;\ 1)$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

   b. Montrer que la distance d'un point quelconque M de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{P}$ est indépendante de M.

   c. Donner un système d'équations paramétriques de la droite définie par l'intersection de $\mathscr{P}$ avec le plan $(x\mathrm{O}y)$.

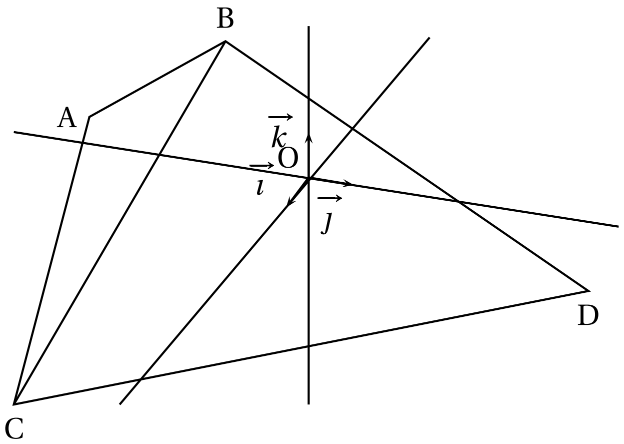
3. La sphère $\mathscr{S}$ est tangente à $\mathscr{P}$ au point C(10 ; 1 ; 6). Le centre Ω de $\mathscr{S}$ se trouve à la distance $d = 6$ de $\mathscr{P}$, du même côté que O.
   Donner l'équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

67 Asie juin 2003

Retour au tableau

L'espace E est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

$$A(3\,;\,-2\,;\,2) \quad ; \quad B(6\,;\,1\,;\,5) \quad ; \quad C(6\,;\,-2\,;\,-1).$$



Partie A

1. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Soit P le plan d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$.
   Montrer que P est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
3. Soit P′ le plan orthogonal la droite (AC) et passant par le point A.
   Déterminer une équation cartésienne de P′.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, droite d'intersection des plans P et P′.

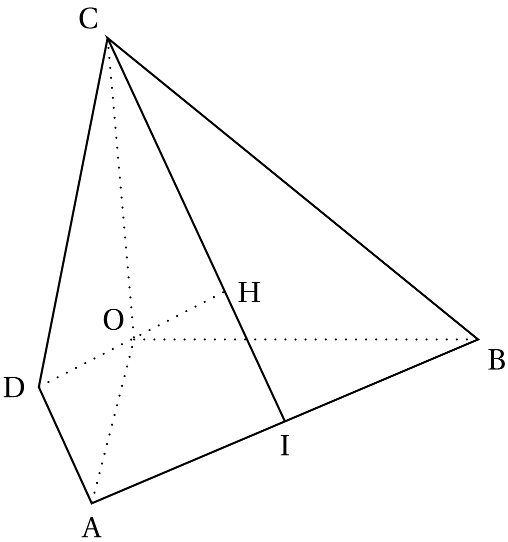
Partie B

1. Soit D le point de coordonnées $(0\,;\,4\,;\,-1)$.
   Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2. Calculer le volume du tétraèdre ABDC.
3. Montrer que l'angle géométrique BDC a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radian.
4. **a.** Calculer l'aire du triangle BDC.
   b. En déduire la distance du point A au plan (BDC).

68 Métropole juin 2003

Retour au tableau

Soient a un réel strictement positif et OABC un tétraèdre tel que :
• OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O,
• OA = OB = OC = a.
On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3. Calcul de OH
   a. Calculer le volume V du tétraèdre OABC puis l'aire S du triangle ABC.
   b. Exprimer OH en fonction de V et de S, en déduire que OH = $a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
4. Étude du tétraèdre ABCD.
   L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$.
   a. Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{a}{3},\ \dfrac{a}{3}\right)$.
   b. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).
   c. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.

69 La Réunion juin 2003

Retour au tableau

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.
Le nombre a désigne un réel strictement positif.
On considère le point M de la demi-droite [AE) défini par $\overrightarrow{\text{A}M} = \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\text{AE}}$.

1. Déterminer le volume du tétraèdre ABDM en fonction de a.

2. Soit K le barycentre du système de points pondérés :

$$\left\{\left(M\,;\,a^2\right),\ (\text{B}\,;\,1),\ (\text{D}\,;\,1)\right\}.$$

a. Exprimer $\overrightarrow{\text{B}K}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{B}M}$ et de $\overrightarrow{\text{BD}}$.

b. Calculer $\overrightarrow{\text{B}K} \cdot \overrightarrow{\text{A}M}$ et $\overrightarrow{\text{B}K} \cdot \overrightarrow{\text{AD}}$ puis en déduire l'égalité $\overrightarrow{\text{B}K} \cdot \overrightarrow{M\text{D}} = 0$.

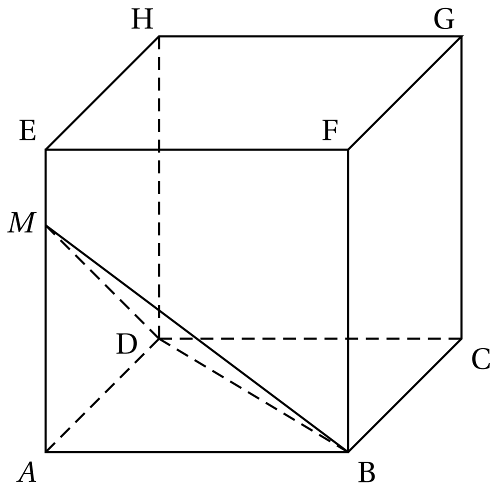
c. Démontrer l'égalité $\overrightarrow{\text{D}K} \cdot \overrightarrow{M\text{B}} = 0$.

d. Démontrer que K est l'orthocentre du triangle BDM.

3. Démontrer les égalités $\overrightarrow{\text{A}K} \cdot \overrightarrow{M\text{B}} = 0$ et $\overrightarrow{\text{A}K} \cdot \overrightarrow{M\text{D}} = 0$. Qu'en déduit-on pour la droite (AK) ?

4. a. Montrer que le triangle BDM est isocèle et que son aire est égale à $\dfrac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ unité d'aire.

b. Déterminer le réel a tel que l'aire du triangle BM soit égale à 1 unité d'aire. Déterminer la distance AK dans ce cas.



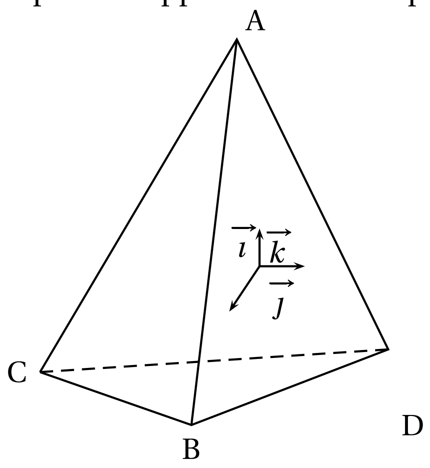
70 Polynésie juin 2003

Retour au tableau

Partie A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives :
A$(0\,;0\,;3)$, B$(2\sqrt{2}\,;\,0\,;\,-1)$, C$(-\sqrt{2}\,;\,-\sqrt{6}\,;\,-1)$, D$(-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{6}\,;\,-1)$.

1. Démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont de même longueur.
2. On note R, S, T et U les milieux respectifs des arêtes [AC], [AD], [BD] et [BC] ; démontrer que RSTU est un parallélogramme de centre O.
3. Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.



Partie B

On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés.
Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.
On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

1. Calculer la probabilité pour qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres.
2. Calculer la probabilité pour que la couleur bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre.
3. Calculer la probabilité de l'évènement E « les six faces rouges sont visibles ».
4. On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres.
   Calculer la probabilité p_n pour que l'évènement E soit réalisé au moins une fois.
   Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} p_n$.

71 Métropole juin 2002

Retour au tableau

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ [unité graphique : 2 cm].

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$. On pose $a = \sqrt{3} + \text{i}$ et $b = \sqrt{3} - \text{i}$. Écrire a et b sous forme exponentielle et placer les points A et B d'affixes respectives a et b.

2. **a.** Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Calculer l'affixe a' du point A' image du point A par r. Écrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente.

b. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\dfrac{3}{2}$. Calculer l'affixe b' du point B' image du point B par h. Placer B' sur la figure précédente.

3. Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle O$A'B'$ et R le rayon de ce cercle. On désigne par c l'affixe du point C.

a. Justifier les égalités suivantes :

$$c\overline{c} = R^2 \qquad (c - 2\text{i})\left(\overline{c} + 2\text{i}\right) = R^2 \qquad \left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\text{i}\right)\left(\overline{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\text{i}\right) = R^2.$$

b. En déduire que $c - \overline{c} = 2\text{i}$ puis, que $c + \overline{c} = -\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

c. En déduire l'affixe du point C et la valeur de R.

72 Nouvelle–Calédonie décembre 2001

Retour au tableau

Partie I

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$(-1\ ;\ 0\ ;\ 2),\quad (3\ ;\ 2\ ;\ -4),\quad (1\ ;\ -4\ ;\ 2),\quad (5\ ;\ -2\ ;\ 4).$$

On considère les points I, J et K définis par : I est le milieu du segment [AB], K est le milieu du segment [CD] et $\overrightarrow{\text{BJ}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{BC}}$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

2. **a.** Montrer que les points I, J et K ne sont pas alignés.

b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est :

$$8x + 9y + 5z - 12 = 0.$$

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) et montrer que le plan (IJK) et la droite (AD) sont sécants en un point L dont on déterminera les coordonnées.

d. Montrer que :

$$\overrightarrow{\text{AL}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{AD}}.$$

Partie II

Plus généralement, dans l'espace E, on considère un tétraèdre ABCD ainsi que les points I, J, K et L définis par I est le milieu du segment [AB], K est le milieu du segment [CD].

$$\overrightarrow{\text{AL}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{AD}} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\text{BJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{BC}}$$

Soit G le barycentre de (A, 3), (B, 3), (C, 1), D, 1).

1. Déterminer les barycentres de (A, 3), (D, 1) et le barycentre de (B, 3), (C, 1).

2. En associant les points A, B, C et D de deux façons différentes, montrer que G appartient aux droites (IK) et (JL). En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires.

73 Amérique du Nord juin 2001

Retour au tableau

L'espace E est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les trois points A (2 ; 0 ; 0), B (1 ; 1 ; 0) et C (3 ; 2 ; 6).
(D) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\,(0\,;\,1\,;\,1)$ et (Δ) la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{v}\,(1\,;\,-2\,;\,2)$.

1. Écrire une représentation paramétrique de chacune des droites (D) et (Δ) puis montrer que (D) et (Δ) sont sécantes en un point dont on précisera les coordonnées.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{\text{AB}} \wedge \overrightarrow{\text{AC}}$ (question hors programme en 2002), puis écrire une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Soit H le projeté orthogonal du point F(2 ; 4 ; 4) sur le plan (ABC).
   a. Expliquer pourquoi il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{\text{FH}} = k\vec{w}$.
   b. Déterminer la valeur de k et en déduire les coordonnées de H.
   c. Calculer le volume du tétraèdre FABC.

74 Métropole juin 2001

Retour au tableau

Soient trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit k un réel de l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$. On note G_k le barycentre du système $\{(\text{A},\ k^2+1),\ (\text{B},\ k),\ (\text{C},\ -k)\}$.

1. Représenter les points A, B, C, le milieu I de [BC] et construire les points G_1 et G_{-1}.

2. **a.** Montrer que, pour tout réel k de l'intervalle [- 1 ; 1], on a l'égalité :

$$\overrightarrow{\text{A}G_k} = -\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{\text{BC}}.$$

b. Établir le tableau de variations de la fonction f définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par

$$f(x) = -\frac{x}{x^2+1}.$$

c. En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$. Pour la suite de l'exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.

3. Déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que :

$$\|2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}\| = \|2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\|.$$

4. Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que :

$$\|2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}\| = \|2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}\|.$$

5. L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(0\,;0\,;2)$, $(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$ et $(-1\ ;\ 2\ ;\ 5)$. Le point G_k et les ensembles (E) et (F) sont définis comme ci-dessus.

a. Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}. Montrer que les ensembles (E) et (F) sont sécants.

b. Calculer le rayon du cercle $\mathscr{C}$ intersection de (E) et (F).

75 Nouvelle–Calédonie décembre 2000

Retour au tableau

Dans l'espace muni du repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points :
A(4 , 0, 0), B(2, 4, 0), C(0, 6, 0), S(0, 0, 4), E(6, 0, 0) et F(0, 8, 0)

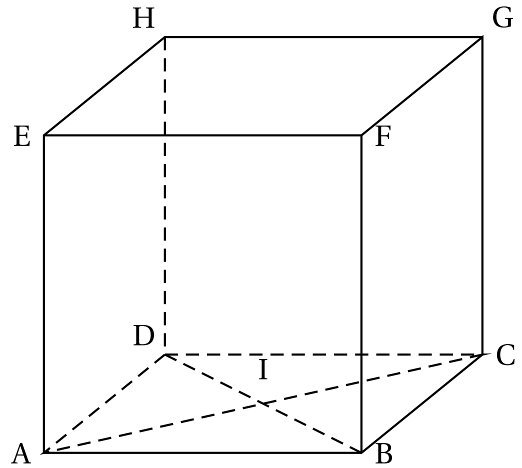
1. Réaliser une figure comportant les points définis dans l'exercice que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que E est le point d'intersection des droites (BC) et (OA).
3. On admettra que F est le point d'intersection des droites (AB) et (OC).
   - **a.** Déterminer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{\text{SE}} \wedge \overrightarrow{\text{EF}}$. En déduire l'équation cartésienne du plan (SEF).
   - **b.** Calculer les coordonnées du point A$'$ barycentre des points pondérés (A, 1) et (S,3).
   - **c.** On considère le plan P parallèle au plan (SEF) et passant par A$'$. Vérifier qu'une équation cartésienne de P est $4x+3y+6z-22=0$.
4. Le plan P coupe les arêtes [SO], [SA], [SB] et [SC] de la pyramide SOABC respectivement aux points O$'$, A$'$, B$'$ et C$'$.
   - **a.** Déterminer les coordonnées de O$'$.
   - **b.** Vérifier que C$'$ apour coordonnées $\left(0,\ 2,\ \dfrac{8}{3}\right)$.
   - **c.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (SB), en déduire les coordonnées du point B$'$.
5. Vérifier que O$'$A$'$B$'$C$'$ est un parallélogramme.

76 Métropole septembre 2000

Retour au tableau

Enseignement obligatoire (hors-programme en 2002)

Les questions **1)** et **2)** sont indépendantes. L'espace est muni d'un repère orthonormal direct. ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre. Son arête a pour longueur 1, le centre de la face ABCD est le point I. Aucune figure n'est demandée sur la copie.



1. **a.** Déterminer $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$.

b. En déduire l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M de l'espace tels que :

$$\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BC}\right) \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}.$$

c. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{F})$ des points M de l'espace tels que :

$$\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{BM} = 0.$$

2. On appelle P le barycentre du système $\{(A, 2) ; (C, -1)\}$.

a. Montrer que P est le symétrique de C par rapport à A.

b. Soit $(\mathcal{G})$ l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\| = \| - \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|.$$

Déterminer l'ensemble $(\mathcal{G})$. Montrer que le point A appartient à l'ensemble $(\mathcal{G})$.

77 Polynésie septembre 2000

Retour au tableau

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.

1. **a.** Exprimer plus simplement le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

   b. En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$ est nul.

   c. Démontrer de même que le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE}$ est nul.

   d. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2. Soit I le centre de gravité du triangle BDE. Déduire de **1) a.** que le point I est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE), et préciser la position du point I sur le segment [AG].

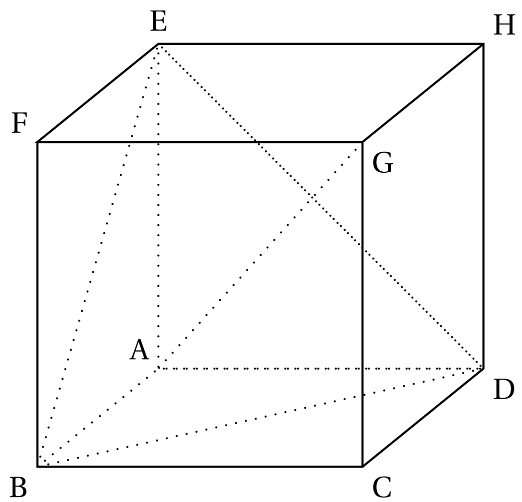
3. Dans cette question, l'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

   a. Écrire une équation du plan (BDE).

   b. Écrire une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point H et orthogonale au plan (BDE).

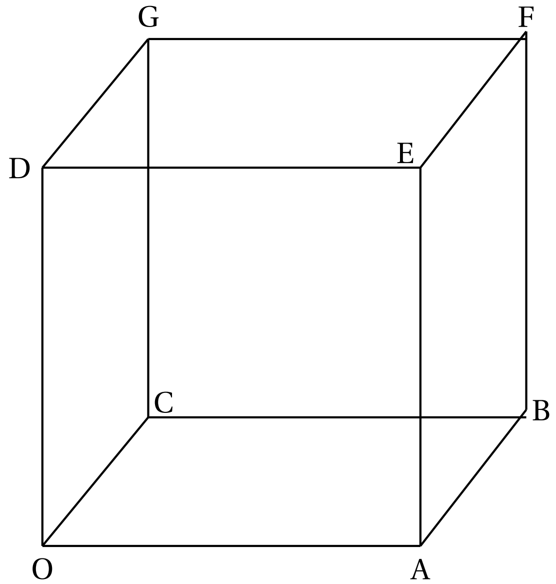
   c. Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite Δ avec le plan (BDE).

   d. En déduire la distance du point H au plan (BDE).



78 Amérique du Nord juin 2000

Retour au tableau



Soit le cube OABCDEFG représenté par la figure ci-dessus.
L'espace est orienté par le repère orthonormai direct $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\mathrm{OA}},~\overrightarrow{\mathrm{OC}},~\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$.
On désigne par a un réel strictement positif.
L, M et K sont les points définis par $\overrightarrow{\mathrm{O}L} = a\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{O}M} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, et $\overrightarrow{\mathrm{B}K} = a\overrightarrow{\mathrm{BF}}$.

1. **a.** Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{D}M} \wedge \overrightarrow{\mathrm{D}L}$.

b. En déduire l'aire du triangle DLM.

c. Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM).

2. On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM).

a. Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{O}M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}K} = \overrightarrow{\mathrm{O}H} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}K}$.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}H}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}K}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}H} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{OK}}$. Démontrer que $\lambda = \dfrac{a}{a^2+2}$. En déduire que H appartient au segment [OK].

c. Déterminer les coordonnées de H.

d. Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{O}K}$. En déduire que $HK = \dfrac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer le volume du tétraèdre DLMK en fonction de a.

79 Centres étrangers juin 2000

Retour au tableau

Dans le plan orienté, on considère un losange ABCD tel que AB = BC = CD = DA = 5 et $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
On désigne par I, J, K, L et O les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] , [DA] et [BD].
On note (Δ) la médiatrice de [AB] et (Δ') la médiatrice de [CD].

1. Soit f l'isométrie du plan définie par $f(\text{A}) = \text{B}$, $f(\text{B}) = \text{O}$, $f(\text{D}) = \text{C}$.

   a. Prouver que f est un antidéplacement.

   b. Démontrer que s'il existe un point M invariant par f, alors M est équidistant des points A, B, C, D.

   c. L'isométrie f admet-elle un point invariant ?

2. Soit σ la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et r la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

   a. Démontrer que $f = r \circ \sigma$.

   b. A-t-on $f = \sigma \circ r$?

3. Soit s_1, la symétrie orthogonale d'axe (BC).

   a. Déterminer l'axe de la symétrie orthogonale s_2, telle que $r = s_2 \circ s_1$.

   b. En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = s_1 \circ t_1$, , où t_1 est une translation que l'on précisera.

4. Soit t_2 la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AD}}$; on note t_2^{-1} sa réciproque et on pose $g = t_2^{-1} \circ f$.

   a. Déterminer $g(\text{D})$, $g(\text{I})$, $g(\text{O})$. En déduire la nature précise de la transformation g.

   b. Démontrer que $f = t_2 \circ g$. A-t-on $f = g \circ t_2$?

80 Nouvelle–Calédonie décembre 1999

Retour au tableau

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A(3 ; 0 ; 1), B(0 ; −1 ; 2) et C(1 ; −1 ; 0).

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{\text{AB}} \wedge \overrightarrow{\text{AC}}$.
En déduire une équation cartésienne du plan ABC.

2. Soit D le point de coordonnées (1, 1, - 2). Calculer le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{\text{DA}}$ et du vecteur $\overrightarrow{\text{DB}} \wedge \overrightarrow{\text{DC}}$.

3. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par D et dont un vecteur directeur est $\vec{n}$.

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de cette droite avec le plan ABC.

c. Calculer DH (distance du point D au plan ABC).

4. Calculer les coordonnées du point D′, symétrique du point D par rapport au plan ABC.

81 Métropole juin 1999

Retour au tableau

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On prendra 4 cm comme unité sur les deux axes.
On considère l'application F du plan dans lui-même qui, à tout point m d'affixe z associe le point M d'affixe $\dfrac{1}{2}z^2 - z$. L'objet de cet exercice est de tracer la courbe (Γ) décrite par M lorsque m décrit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1. Soit t un réel de $[-\pi\ ;\ \pi]$ et m le point de $(\mathcal{C})$ d'affixe $z = \text{e}^{\text{i}t}$.

1. Montrer que l'image M de m par F est le point de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \dfrac{1}{2}\cos 2t - \cos t \\ y(t) & = & \dfrac{1}{2}\sin 2t - \sin t \end{array}\right., \quad t \in [-\pi\ ;\ \pi].$$

Ces relations constituent une représentation paramétrique de la courbe (Γ).

2. Comparer $x(-t)$ et $x(t)$ d'une part, $y(-t)$ et $y(t)$ d'autre part.
En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie que l'on précisera.

3. Montrer que $x'(t) = \sin t(1 - 2\cos t)$. Étudier les variations de x sur $[0\ ;\ \pi]$.

4. Montrer que $y'(t) = (\cos t - 1)(1 + 2\cos t)$.
Étudier les variations de y sur $[0\ ;\ \pi]$.

5. Dans un même tableau faire figurer les variations de x et y sur $[0\ ;\ \pi]$.

6. Placer les points de (Γ) correspondant aux valeurs 0, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$ et π du paramètre t et tracer les tangentes en ces points (on admettra que pour $t = 0$ la tangente à (Γ) est horizontale). Tracer la partie de (Γ) obtenue lorsque t décrit $[0\ ;\ \pi]$ puis tracer (Γ) complètement.

82 Liban juin 1999

Retour au tableau

Sur une droite (D) muni d'un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, A_0 et B_0 sont les points d'abscisses respectives -4 et 3. Pour tout entier naturel n, on note

$$A_{n+1} \quad \text{le barycentre de} \quad \{(A_n\,;\,1),\ (B_n\,;\,4)\}$$

$$B_{n+1} \quad \text{le barycentre de} \quad \{(A_n\,;\,3),\ (B_n\,;\,2)\}$$

1. Placer les points A_0, B_0,A_1, B_1.
2. Les points A_n et B_n ont pour abscisses a_n et b_n respectivement.
   Ainsi, $a_0 = -4$ et $b_0 = 3$.
   Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{5}(a_n + 4b_n)$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$.
3. **a.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $3a_n + 4b_n = 0$.
   b. En déduire que : $a_{n+1} = -\dfrac{2}{5}a_n$ et $b_{n+1} = -\dfrac{2}{5}b_n$.
4. **a.** Exprimer a_n et b_n à l'aide de n.
   b. Déterminer les limites de a_n et b_n quand n tend vers $+\infty$.
   c. Interpréter ce résultat à l'aide des points A_n et B_n.

83 Pondichéry juin 1999

Retour au tableau

On considère un triangle ABC du plan.

1. **a.** Déterminer et construire le point G, barycentre de

$$[(\text{A}\ ;\ 1)\ ;\ (\text{B}\ ;\ -1)\ ;\ (\text{C}\ ;\ 1)].$$

   b. Déterminer et construire le point G′, barycentre de

$$[(\text{A}\ ;\ 1)\ ;\ (\text{B}\ ;\ 5)\ ;\ (\text{C}\ ;\ -2)].$$

2. **a.** Soit J le milieu de [AB].
   Exprimer $\overrightarrow{\text{GG}'}$ et $\overrightarrow{\text{JG}'}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ et en déduire l'intersection des droites (CG′) et (AB).

   b. Montrer que le barycentre I de [(B ; 2) ; (C ; - 1)] appartient ? (GG′).

   c. Soit D un point quelconque du plan. Soient O le milieu de [CD] et K le milieu de [GA].

3. Déterminer trois réels $a,\ d$ et c tels que K soit barycentre de

$$[(\text{A}\ ;\ a)\ ;\ (\text{D}\ ;\ d)\ ;\ (\text{C}\ ;\ c)].$$

4. Soit X le point d'intersection de (DK) et (AC).
   Déterminer les réels a' et c' tels que X soit barycentre de

$$[(\text{A}\ ;\ a')\ ;\ (\text{C}\ ;\ c')].$$

84 Amérique du Sud novembre 1998

Retour au tableau

Dans le plan (P), on considère le triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH] tel que AH = BC = 4. On prendra le centimètre pour unité.

1. En justifiant la construction, placer le point G, barycentre du système de points pondérés {(A ; 2) ; (B ; 1) ; (C ; 1)}.

2. On désigne le point M un point quelconque de (P).

a. Montrer que le vecteur $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est un vecteur dont la norme est 8.

b. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que

$$\left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right\| = \|\vec{V}\|$$

3. On considère le système de points pondérés {(A ; 2) ; (B ; n) ; (C ; n)} où n est un entier naturel fixé.

a. Montrer que le barycentre G_n de ce système de points pondérés existe. Placer G_0, G_1, G_2.

b. Montrer que le point G_n appartient au segment [AH].

c. Calculer la distance AG_n en fonction de n et déterminer la limite de AG_n quand n tend vers $+\infty$.

Préciser la position limite de G_n quand n tend vers $+\infty$.

d. Soit E_n l'ensemble des points M du plan tels que

$$\left\| 2\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} + n\overrightarrow{MC} \right\| = n \left\| \vec{V} \right\|.$$

Montrer que E_n est un cercle qui passe par le point A.

En préciser le centre et le rayon, noté R_n.

e. Construire E_2.

85 Métropole septembre 1998

Retour au tableau

1. **a.** Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les trois points A, B et C.

2. Soit (Q) le plan d'équation :

$$x + y - 3z + 2 = 0$$

   et (Q′) le plan de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

   a. Pourquoi (Q) et (Q′) sont-ils sécants ?

   b. Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection (Δ) des plans (Q) et (Q′).

3. Écrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.

4. On considère les points J et K de coordonnées respectives :

$$\mathrm{J}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{K}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Déterminer avec soin l'intersection de la sphère (S) et de la droite (JK).

86 Polynésie septembre 1998

Retour au tableau

Dans l'espace muni du repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, nous considérons les points A de coordonnées (0 ; 6 ; 0), B de coordonnées (0 ; 0 ; 8), C de coordonnées (4 ; 0 ; 8).

1. **a.** Réaliser la figure comportant les points définis dans l'exercice (unité graphique : 1 cm).

b. Démontrer que :

- les droites (BC) et (BA) sont orthogonales ;
- les droites (CO) et (OA) sont orthogonales ;
- la droite (BC) est orthogonale au plan (OAB).

c. Déterminer le volume, en cm^3, du tétraèdre OABC.

d. Démontrer que les quatre points O, A, B, C se trouvent sur une sphère dont vous déterminerez le centre et le rayon.

2. À tout réel k de l'intervalle ouvert]0 ; 8[, est associé le point $M(0~;~0~;~k)$.
Le plan (π) qui contient M et est orthogonal à la droite (OB) rencontre les droites (OC), (AC), (AB) respectivement en $N,~P,~Q$.

a. Déterminer la nature du quadrilatère $(MNPQ)$.

b. La droite (PM) est-elle orthogonale à la droite (OB) ? Pour quelle valeur de k, la droite (MP) est-elle orthogonale à la droite (AC) ?

c. Déterminer MP^2 en fonction de k. Pour quelle valeur de k, la distance PM est-elle minimale ?

Livret réalisé grâce à Cocoa booklet. Merci à son auteur Fabien Cornus.
http ://www.iconus.ch/fabien/cocoabooklet/