Baccalauréat ES 2000

L'intégrale de septembre 1999 à juin 2000

Baccalauréat ES Antilles–Guyane septembre 1999

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Effectuer les calculs à l'aide de la calculatrice. Aucun détail n'est demandé. Le tableau suivant donne le PNB ainsi que le nombre d'hôpitaux pour 1 million d'habitants dans quelques pays européens.

Pays	A	B	C	D	E	F	G	H
PNB, x, en euro par habitant	5 100	7 800	11 200	15 800	20 100	26 230	28 910	31 910
Nombre y d'hôpitaux par million d'habitants	620	1 080	1 550	2 100	3 000	3 800	4 200	4 400

1. Représenter le nuage de points associé à la série $(x,\ y)$.
Unités : en abscisse : 1 cm pour 1000 euros, en ordonnée : 1 cm pour 200 hôpitaux. On prendra pour origine le point $M_0(5\,000\ ;\ 600)$.
On appelle G le point moyen de ce nuage.

2. **a.** Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y (donner la valeur décimale arrondie à 10^{-2} près).
On admet qu'un ajustement affine par la méthode des moindres carrés est justifié.

b. Donner une équation de la droite D de régression de y en x.

c. Tracer D dans le repère précédent (question **1.**).

d. Calculer les coordonnées de G et vérifier graphiquement que G appartient à D.

3. Un pays a un PNB de 23 400 euros. Quelle estimation peut-on faire du nombre d'hôpitaux dans ce pays ?

EXERCICE 1 **5 points**

(obligatoire)

Un lycée propose trois options facultatives : arts plastiques, histoire des arts, musique. Un élève ne peut choisir qu'une seule de ces trois options.
Le groupe des élèves ayant fait l'un de ces choix à la rentrée 1997 se décompose de la façon suivante : 35 % en arts plastiques, 45 % en histoire des arts, 20% en musique.
À la rentrée 1998, 60 % des élèves en arts plastiques, 70 % en histoire des arts, 80 % en musique, conservent leur option.
Des animateurs, ne connaissant pas les élèves, organisent une réunion du groupe des élèves inscrits en 1997 dans une des options.
On note ainsi les événements suivants :
A « L'élève est inscrit en arts plastiques à la rentrée 1997 ».
H « L'élève est inscrit en histoire des arts à la rentrée 1997 ».
M « L'élève est inscrit en musique à la rentrée 1997 ».
C « L'élève a conservé son option à la rentrée 1998 ».

1. Décrire la situation à l'aide d'un arbre de répartition.

2. On admet que l'animateur choisit au hasard un élève.

a. Calculer la probabilité de l'événement « il était inscrit en arts plastiques en 1997 et a conservé cet enseignement en 1998 ».

b. Montrer que la probabilité de l'événement C est égale à 0,613 5.

3. Un des animateurs souhaite connaître les motivations des élèves qui n'ont pas conservé leur option en 1998.
Il demande à ces élèves de lever la main et il en appelle un au hasard.
Calculer la probabilité de l'événement « cet élève était inscrit en histoire de arts en 1997 ».

EXERCICE 1 **5 points**
(spécialité)
Les questions I et II sont indépendantes.

I. 25 élèves d'une classe de seconde sont admis en première. Ils se répartissent de la façon suivante :
10 en série L ;
9 en série ES ;
6 en série S.
On choisit au hasard trois élèves de cette classe de seconde qui sont admis en classe de première.
Calculer la probabilité de l'évènement : « Les trois élèves sont admis en série ES ».

II. Dans l'établissement, sur 300 élèves de seconde admis en première, on a la répartition suivante :
- 75 élèves en série L ;
- 120 élèves en série ES ;
- 105 élèves en série S.

1. Parmi les élèves admis en série L, 60 % sont des filles. De même, 55 % des admis en série ES et 40 % des admis en série S sont des filles.
On choisit au hasard un élève admis en classe de première. On note ainsi les événements suivants :
L : « L'élève est admis en série L » ;
E : « L'élève est admis en série ES » ;
S : « Un élève est admis en série S » ;
F : « L'élève est une fille ».

a. Quelle est la probabilité de l'évènement suivant : « L'élève est une fille admise en série ES » ?

b. Calculer la probabilité de l'évènement F.

2. On prend au hasard le dossier d'un des élèves admis en première. Après utilisation, on le remet avec les autres. On effectue, au total, cinq fois cette opération.
Calculer la probabilité de l'évènement : « Trois dossiers exactement sont des

dossiers de filles ».

PROBLÈME **10 points**

L'objet de ce problème est l'étude d'une fonction.

On considère la fonction f définie sur $\mathrm{I} =]-\infty\ ;\ +1[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-x} + x + 1.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 2 cm.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur I par

$$g(x) = x^2 - 2x + \ln(1-x).$$

1. Étudier la variation de g sur I (on ne demande pas le calcul des limites).

2. Calculer $g(0)$.
Étudier le signe de $g(x)$ sur $]-\infty\,; +1[$.

Partie B - Étude de la fonction f

1. **a.** Calculer la limite de f en $-\infty$.
On admettra le résultat suivant : la limite de $\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ quand x tend vers $-\infty$ vaut zéro.

b. Calculer la limite de f en + 1 et interpréter graphiquement le résultat.

2. On admet que la dérivée f' de la fonction f vérifie l'égalité ci-dessous :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(1-x)^2}.$$

En déduire les variations de f.
Dresser le tableau des variations de f sur I.

3. Soit la droite D d'équation $y = x + 1$.

a. Déterminer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à D suivant les valeurs de x.

b. Montrer que D est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$.

4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ avec ses asymptotes dans le repère orthonormal défini dans l'introduction. (Unité graphique : 2 cm.)

Partie C - Calcul d'une aire

Soit la fonction H définie sur I par

$$H(x) = -\frac{1}{2}[\ln(1-x)]^2.$$

1. Vérifier que H est une primitive de la fonction h définie sur I par

$$h(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

2. **a.** Donner la valeur exacte en unité d'aire, de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite D et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

b. Donner une valeur approchée de cette aire en cm^2 à 10^{-2} près par défaut.

c. Sur le graphique construit en **Partie B.4)**, hachurer le domaine correspondant.

Baccalauréat ES France septembre 1999

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le lycée IXE a décidé d'organiser un voyage en Australie pour assister aux Jeux olympiques de l'an 2000 qui se dérouleront à Sydney. Pour réduire le coût, élèves et adultes cherchent à organiser des activités qui rapportent de l'argent.
Le Club Poésie décide d'éditer et de vendre un recueil de textes écrits par les élèves. Pour cela il commence par réaliser une « étude de marché » auprès de la population du lycée, afin de savoir à quel prix vendre ce recueil pour avoir la plus importante rentrée d'argent.
Les résultats de cette étude figurent dans le tableau ci-dessous.
x_i est le prix de vente en francs d'un recueil.
y_i est le nombre de personnes prêtes à acheter le recueil au prix x_i.

x_i	15	20	25	30	35	40	45	50
y_i	1200	900	800	550	500	350	300	100

Tous les calculs statistiques seront faits à la calculatrice.

1. Construire le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra pour origine le point de coordonnées $(10\,;\,0)$, 2 cm pour 5 francs en abscisse et 1 cm pour 100 personnes en ordonnée.

2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire (donner une valeur arrondie à 10^{-3}.
   Pourquoi un ajustement linéaire est-il justifié ?

3. Donner une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode de moindres carrés. Le coefficient directeur sera arrondi à 10^{-2} près et l'ordonnée à l'origine à l'unité près.

4. **a.** Calculer alors, en fonction du prix de vente x, la somme que peut encaisser le Club Poésie si la réalité est conforme à la prévision. On nomme $S(x)$ cette somme.

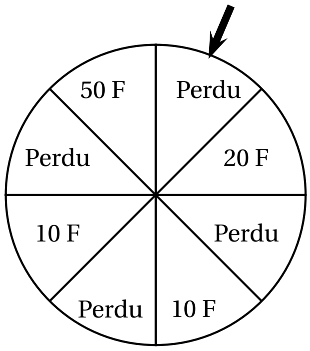
   b. Étudier les variations de cette fonction S et en déduire le prix x_0 pour lequel cette somme atteint son maximum (x_0 sera arrondi au franc le plus proche).

Exercice 2 **5 points**

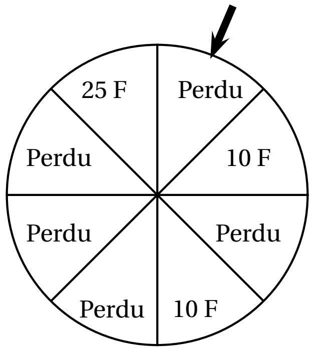
Commun à tous les candidats

Pour recueillir des fonds pour un voyage en Australie en l'an 2000, le lycée organise une fête. Le Club Maths décide de monter un stand de loterie. Le « futur gagnant » tire au hasard une boule dans une ume contenant 15 boules bleues et 10 boules rouges. S'il tire une boule bleue, il lance la roue bleue, S'il tire une boule rouge, il lance la roue rouge. Chaque roue est partagée en 8 secteurs de même dimension. Quand la roue est lancée, elle s'arrête de façon aléatoire et la flèche ne peut indiquer qu'un seul secteur. Tous les secteurs ont donc la même chance de « sortir ».

Roue bleue



Roue rouge



On note B l'évènement « Tirer une boule bleue », R l'évènement « une boule rouge » et G l'évènement « Gagner ».
On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement B, puis celle de l'évènement R.

   b. On a tiré une boule bleue : quelle est la probabilité de gagner ?

   c. En déduire la probabilité de l'évènement G $\cap$ B.

2. Calculer alors la probabilité de gagner à ce stand.

3. Vérifier que la probabilité de gagner 50 F est $\dfrac{3}{40}$.
   Soit X la variable aléatoire égale au gain (éventuellement nul) du joueur. Recopier le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X et calculer les résultats manquants.

gain x_i	0	10	20	25	50
$p(X = x_i)$	$\dfrac{11}{20}$		$\dfrac{3}{40}$		$\dfrac{3}{40}$

4. Calculer l'espérance mathématique de X.
   On peut compter sur 150 participants à ce stand pendant la fête, et on voudrait faire un bénéfice d'au moins 1000 francs. Quelle participation minimale, arrondie au franc supérieur, de chaque joueur faut-il alors envisager ?

EXERCICE 2 **5 points**
(spécialité)

Le club de football du lycée décide d'organiser un match entre élèves et professeurs pour récolter des fonds pour partir en Australie en l'an 2000. Les joueurs s'entraînent, d'autant plus qu'une rencontre amicale sera organisée à Sydney contre une équipe de lycéens australiens. Pour s'entraîner aux tirs au buts, l'entraîneur dispose 5 ballons face aux buts, et chaque joueur tire ces 5 ballons.
Une étude statistique a montré que sur une série de 5 ballons, un joueur pris au hasard marque :
- 5 buts avec une probabilité de 0,2 ;
- 4 buts avec une probabilité de 0,5 ;
- 3 buts avec une probabilité de 0,3.
Chaque joueur, à chaque entraînement, tire 2 séries de 5 ballons. On admet que les résultats d'un joueur à chacune des 2 séries sont indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirs aux buts réussis par un un joueur au cours d'un

entraînement.

1. **a.** Calculer la probabilité, pour un joueur pris au hasard, de réussir tous ses tirs aux buts lors d'un entraînement.

   b. Préciser les valeurs possibles de X et établir sa loi de probabilité (on pourra s'aider d'un arbre).
   Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X arrondi avec deux chiffres après la virgule.

2. Un entraîneur considère que le joueur a réussi l'épreuve des tirs aux buts lorsque $X \geqslant 8$.
   Montrer que la probabilité pour un joueur de réussir cette épreuve lors d'un entraînement est égale à 0,61.

3. Chaque joueur participe à 10 séances d'entrainement. On admet que les épreuves de tirs aux buts sont indépendantes les unes des autres.
   On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de succès d'un joueur à l'épreuve des tirs aux buts au cours de ces 10 entraînements. Les résultats seront donnés par défaut, avec trois chiffres après la virgule.
   Calculer pour un joueur :

   a. la probabilité de n'avoir aucun échec lors des 10 séances ;

   b. la probabilité d'avoir exactement 6 succès ;

   c. la probabilité d'avoir au moins 1 succès.

4. Calculer le nombre minimum d'entraînements auxquels doit participer un joueur pour que la probabilité d'avoir au moins un succès soit supérieure à 0,99.

PROBLÈME **5 points**

Nota : les parties **B** *et* **C** *sont indépendantes.*
À la rentrée scolaire, une étude statistique s'intéresse au prix des classeurs.

$$f(x) = 4\ln\left(\frac{6}{x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = 4\ln(x-1)$$

représentent respectivement les quantités demandées et offertes, c'est-à-dire :
– pour $f(x)$ les quantités de classeurs exprimées en milliers que les consommateurs sont prêts à acheter en fonction du prix unitaire x du classeur exprimé en francs ;
– Pour $g(x)$ les quantités de classeurs exprimées en milliers, que les producteurs sont prêts à vendre en fonction du prix unitaire x du classeur exprimé en francs.

Partie A

1. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) \geqslant 0 \end{array}\right.$.
   L'intervalle I solution du système est l'intervalle d'étude du modèle.

2. Étudier les variations de f et de g sur I. Tracer les représentations graphiques respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de f et de g, dans un plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; on prendra 2 cm pour 1 franc en abscisse et 2 cm pour 1000 classeurs en ordonnée.

3. Déterminer les coordonnées $(x_0,\ y_0)$ du point A intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. La valeur de x_0 est appelée prix d'équilibre.

4. Quel est le revenu total des producteurs pour le prix d'équilibre ?

Partie B

1. Montrer que la fonction F définie par :

$$F(x) = 4\left[x\ln\left(\frac{6}{x}\right) + x\right]$$

est une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.

2. Les consommateurs se procurent les quantités offertes à un prix supérieur à celui d'équilibre. La somme totale alors perçue en plus par les producteur est représentée par l'aire de la paffie du plan située entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = x_0$ et la droite d'équation $x = 6$, où x_0, est l'abscisse du point d'équilibre ; elle traduit le surplus des consommateurs exprimé en francs.
Calculer ce surplus.

Partie C

1. Le prix x augmente de 1 %. Calculer, en fonction de x, la variation relative de la demande.

2. Donner la valeur de la variation de la demande en pourcentage, arrondie à 0,1 %, pour un prix initial de 5 francs qui augmente de 1 %.

Baccalauréat ES Polynésie septembre 1999

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise peint des jouets. Pour cela, elle utilise deux machines M_1 et M_2. La machine M_1 peint un quart de la production.

On sait que la machine M_1 peint correctement un jouet avec une probabilité de 0,85 alors que la machine M_2, plus récente, le fait avec une probabilité de 0,95.

Tous les jouets sont mélangés puis acheminés ensemble vers l'unité d'emballage.

On choisit alors un jouet au hasard, tous les choix étant équiprobables.

On note : A_1 l'évènement : « le jouet est peint par M_1 »

A_2 l'évènement : « le jouet est peint par M_2 »

B l'évènement : « le jouet est peint correctement ».

1.
   a. Représenter par un arbre pondéré la situation décrite.
   b. Définir par une phrase l'événement
   c. Calculer la probabilité de l'événement
   d. Montrer que la probabilité de l'événement B, notée p, est égale à 0,925.
   e. Le jouet choisi est peint correctement.
      Quelle est la probabilité pour qu'il ait été peint par la machine M_1 ?
2. *Dans cette question, on donnera les résultats arrondis à* 10^{-2} *près.*
   On choisit maintenant au hasard et de façon indépendante 4 jouets.
   a. Quelle est la probabilité pour que les 4 jouets soient peints correctement ?
   b. Quelle est la probabilité pour qu'un jouet au moins ne soit pas peint correctement ?

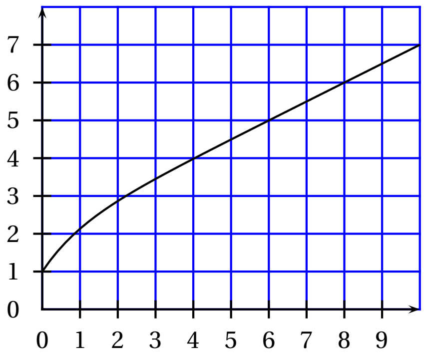
Exercice 2 **5 points**

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, croissante sur cet intervalle et telle que sa représentation graphique notée $\mathcal{C}_f$ est donnée par le graphique 1 sur la feuille annexe.

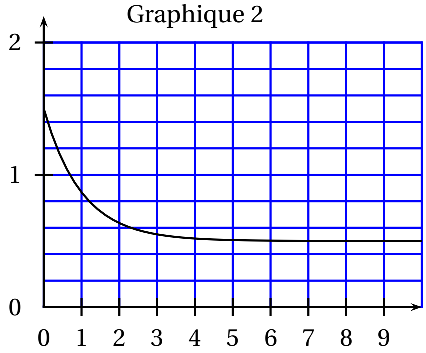
La feuille annexe est à remettre avec la copie, en mettant en évidence sur les graphiques toutes les constructions utilisées.

1. Les graphiques 2 et 3 donnent les représentations graphiques de la fonction $g = \ln f$ et de la fonction f' dérivée de f.
   Préciser quelle courbe est donnée par chacun des graphiques 2 et 3 avec les justifications nécessaires.
2. On sait que $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 2 - h(x)$ où h est une fonction définie et strictement négative sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, telle que la limite de h en $+\infty$ est égale à 0.
   Interpréter graphiquement les renseignements donnés sur h.
3. Quel graphique de l'annexe 1 permet de déterminer l'abscisse x_0 du point de la courbe $\mathcal{C}_f$ où la tangente a pour coefficient directeur 0,6 ?
   Indiquer parmi les intervalles suivants celui auquel appartient x_0 :
   $$I_1 = [0\ ;\ 1] \quad ; \quad I_2 = [1\ ;\ 4] \quad ; \quad I_3 = [4\ ;\ 7].$$
4. On considère l'intégrale I définie par $I = \displaystyle\int_4^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   À l'aide de la représentation graphique de f trouver, en expliquant la démarche utilisée, un nombre entier n tel que $n < I < n+1$.

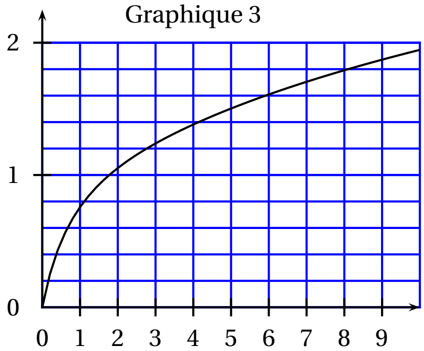
Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3



PROBLÈME **10 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = -(\ln x)^2 + 4\ln x - 3.$$

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de f est donnée en fin d'énoncé.

Partie A

1.

a. Déterminer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. (On pourra mettre $\ln x$ en facteur dans l'expression $f(x)$).

c. f' étant la fonction dérivée de f, montrer que $f'(x) = \dfrac{4-2\ln x}{x}$.

d. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - 4X + 3 = 0$ et déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.

b. En déduire par lecture graphique les valeurs de x telles que $f(x) > 0$.

3.

a. Interpréter graphiquement le nombre $A = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

b. Soit h la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $h(x) = -x\left[(\ln x)^2 - 6\ln x + 9\right]$.
Déterminer la dérivée h' de h et en déduire une primitive F de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

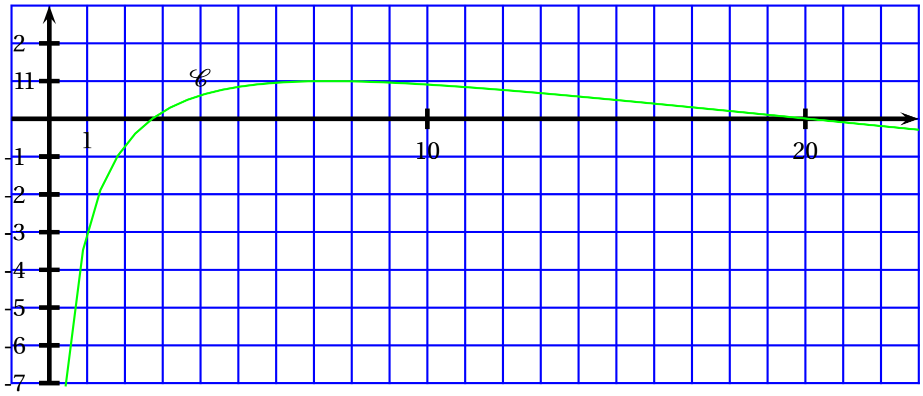
c. En déduire la valeur exacte de A.

Partie B

Une entreprise constate que la vente de sa production dégage un bénéfice moyen par objet (en milliers de francs) égal à : $(\ln x)^2 - 4\ln x + 3$ où x désigne le nombre de milliers d'objets fabriqués. Ce bénéfice moyen par objet n'est pas toujours positif.

1. Calculer le bénéfice total de l'entreprise pour une production de 1 000 objets puis de 3 000 objets. Indiquer, dans chaque cas, si l'entreprise fait un bénéfice positif.

2. Déduire de la partie A pour quelles quantités d'objets produits l'entreprise fait un bénéfice positif.

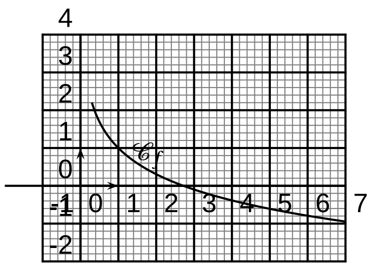


Baccalauréat ES Sportifs de haut–niveau octobre 1999

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le repère utilisé est orthonormal : unité 1 cm.
La figure ci-dessous est la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = 1 - \ln x$.



L'une des deux fonctions représentées ci-dessous a pour fonction dérivée la fonction f dont la représentation graphique est $\mathscr{C}_f$.

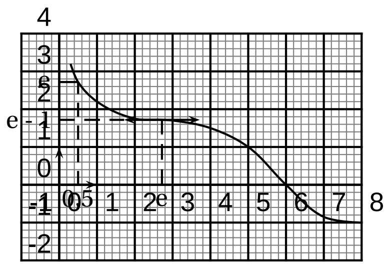


Figure 1

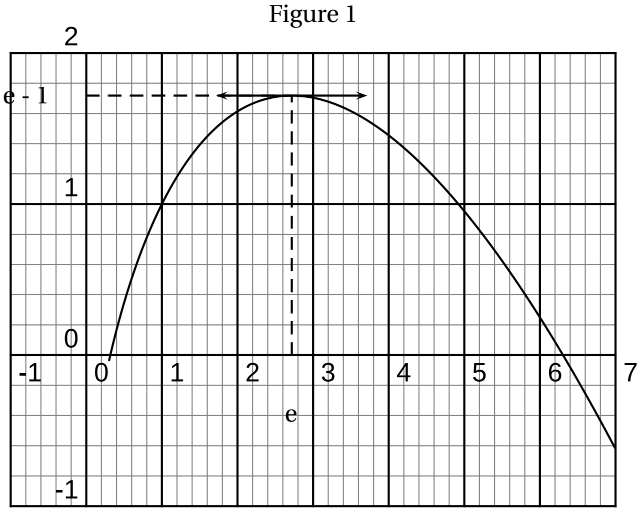


Figure 2

1. Justifier que la courbe représentée sur la figure 1 ne peut convenir.
   On note F la fonction dont la courbe représentative est tracée figure 2. Que représente la fonction F pour f ?

2. **a.** Déterminer par lecture graphique $F(\mathrm{e})$ et $F(1)$.

b. En déduire l'aire en cm^2 de l'ensemble E des points M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ tels que : $1 \leqslant x \leqslant \text{e}$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

3. Montrer que la tangente à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse 1 passe par l'origine.

4. **a.** Vérifier que la fonction G définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $G(x) = -\ x + \ln x + 2x + k$ où k est un réel, a pour dérivée la fonction f.

b. Déterminer le réel k pour que la courbe représentative de G soit celle de la figure 2.

EXERCICE 2 — 4 points
(obligatoire)

Un enquête faite auprès d'une population comprenant 51 % de femmes et 49 % d'hommes montre que 20% des femmes et 15% des hommes de cette population ne vont jamais au cinéma.

1. On choisit au hasard un individu de cette population. Tous les choix sont équiprobables. On note :
F l'évènement : « l'individu choisi est une femme » ;
C l'évènement : « l'individu choisi fréquente les salles de cinéma ».

a. Déterminer la probabilité de l'évènement $\text{F} \cap \text{C}$.

b. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,175 5.

c. Déterminer la probabilité que la personne choisie soit une femme, sachant qu'elle ne va jamais au cinéma.
(Le résultat sera arrondi à $10^{-\ 4}$ *près.)*

2. *Dans cette question les résultats seront arrondis à* 10-4 *près.*
On choisit trois individus au hasard dans cette population.
On suppose la population assez nombreuse pour pouvoir considérer que l'on répète alors trois fois de manière indépendante l'expérience « choisir au hasard un individu dans la population » dans des conditions identiques.

a. Quelle est la probabilité qu'aucun des trois individus choisis ne fréquente les salles de cinéma ?

b. En déduire la probabilité que l'un au moins des individus choisis fréquente les salles de cinéma.

EXERCICE 2 — 4 points
(spécialité)

Dans un lycée de 810 élèves, les effectifs par niveau sont :
- 280 élèves en seconde ;
- 240 élèves en première ;
- 220 élèves en terminale ;
- 70 élèves en BTS.

On a décidé d'interroger chaque jour un groupe de 5 élèves choisis au hasard Pour connaître leur opinion concernant les menus à la cantine.

A - Pour une journée

Dans cette partie on ne demande aucun calcul approché.

1. Calculer la probabilité que les 5 élèves interrogés soient des élèves de seconde.

2. Calculer la probabilité que, parmi les 5 élèves interrogés, un, exactement, soit un élève de première.

3. Calculer la probabilité p pour qu'au moins un élève de BTS soit interrogé.

B - On répète l'opération pendant 6 jours de manière indépendante

Dans cette partie les résultats seront arrondis à 10^{-5} *, près.*
Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de jours où au moins un élève de BTS est interrogé. Dans tous les calculs on prendra 0,364 3 comme valeur de la probabilité qu'au moins un élève de BTS soit interrogé.

1. Calculer la probabilité pour que l'évènement : « au moins un élève de BTS est interrogé » se produise 4 fois exactement au cours de ces 6 jours.

2. Calculer la probabilité pour que, au cours de ces 6 jours, aucun élève de BTS ne soit interrogé.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

Dans cette partie, on pourra utiliser les fonctions statistiques de la calculatrice. Le détail des calculs n'est pas exigé.

Une étude statistique portant sur la répartition des revenus d'une population a donné les résultats suivants : x représente un revenu annuel, exprimé en millions de francs, N représente le nombre, exprimé en milliers d'individus, dont le revenu est supérieur ou égal à x.

x_i en millions de F	0,35	0,6	0,9	1,5	2	3
N_i en milliers	4,448	1,359	0,557	0,181	0,148	0,039

1. a. Après l'avoir reproduit, compléter le tableau suivant, où z_i est l'arrondi à 10^{-2} près de $\ln(N_i)$.

x_i	0,35	0,6	0,9	1,5	2	3
z_i	1,49		-0,59		-1,91	

b. Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\,;z_i)$.

2. Donner une équation de la droite de régression de z en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à 10^{-1} près.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :
$f(x) = \mathrm{e}^{-1,6x+1,3}$.

1. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal. On prendra 4 cm pour unité graphique. Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 et tracer cette tangente.

3. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = -\,xf'(x)$.

   a. Vérifier que $g(x) = 1,6x\mathrm{e}^{-1,6x+1,3}$.

   b. Montrer que la fonction G définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

   $$G(x) = \left(-x - \frac{5}{8}\right)\mathrm{e}^{-1,6x+1,3}$$

   est une primitive de la fonction g.

Partie C

1. On admet que la fonction f définie dans la **partie B** est une bonne modélisation de la situation présentée dans la **partie A**, c'est-à-dire que : pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, le nombre, en milliers, d'individus de la population dont le revenu annuel est supérieur ou égal à x millions de francs est égal à $f(x)$.

   a. Déterminer le nombre d'individus dont le revenu est supérieur ou égal à 2 millions de francs.

   b. Déterminer le nombre d'individus dont le revenu est supérieur ou égal à 2 millions de francs et strictement inférieur à 2,5 millions de francs.

2. En économie, le nombre $\mathrm{R} = 1000\displaystyle\int_p^q g(x)\,\mathrm{d}x$, où g est la fonction définie dans la **partie B**, représente la somme des revenus annuels des individus dont le revenu annuel, en millions de francs, est compris entre p et q.

   a. Déterminer la somme des revenus annuels des individus dont le revenu annuel est compris entre 2 et 2,5 millions de francs.

   b. Calculer le revenu annuel moyen d'un individu de ce groupe.

Baccalauréat ES Amérique du Nord juin 2000

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne l'évolution du pourcentage de logiciels piratés en France de 1990 à 1998. On désigne par x le rang de l'année et par y le pourcentage de logiciels piratés.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Pourcentage y_i	85	78	73	66	57	51	47	44	43

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal tel que :
* 1 cm représente un an sur l'axe des abscisses
* 1 cm représente 5 % sur l'axe des ordonnées.

2. Dans cette question les résultats seront obtenus à l'aide d'une calculatrice et arrondis au millième. Aucun détail des calculs statistiques n'est demandé.

a. Donner le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$. Un ajustement affine est-il justifié ?

b. Écrire une équation de la droite de régression (D) de y en x par la méthode des moindres carrés.
Représenter (D) dans le repère précédent.

c. En utilisant cet ajustement affine, donner une estimation du pourcentage de logiciels piratés en 2004.

3. L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel.
On pose $z = \ln(y)$.
À l'aide d'une calculatrice, on a obtenu les résultats suivants :
- Le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x_i\ ;\ z_i)$, où $z_i = \ln(y_i)$, est $r' = -0,991$.
- Une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés est $z = 0,093x + 4,444$ (1).
En utilisant la relation (1), donner une estimation du pourcentage de logiciels piratés en 2004.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un industriel fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de ces tablettes, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 60 % permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40 % exactement deux places de cinéma.
La notation $p(\text{A}/\text{B})$ désigne la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

1. Un client achète une tablette de chocolat. On considère les événements suivants :
G : « Le client achète une tablette gagnante » ;
U : « Le client gagne exactement une place de cinéma » ;
D : « Le client gagne exactement deux places de cinéma ».

   a. Donner $p(\text{G})$, $p(\text{U}/\text{G})$ et $p(\text{D}/\text{G})$.

   b. Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à 0,3.

   c. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places de cinéma gagnées par le client.
   Déterminer la loi de probabilité de X.
   Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Un client achète deux jours de suite une tablette de chocolat. Les deux achats sont indépendants.

   a. Déterminer la probabilité qu'il ne gagne aucune place de cinéma.

   b. Déterminer la probabilité qu'il gagne au moins une place de cinéma.

   c. Montrer que la probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma est égale à 0,29 (on pourra s'aider d'un arbre).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les résultats de cet exercice seront donnés sous forme décimale arrondie au centième.
Un camp d'adolescents propose des stages d'activités nautiques pour débutants avec, au choix : planche à voile, plongée ou ski nautique.
Lors d'un stage donné, ce camp accueille vingt jeunes dont sept seront initiés à la planche à voile, huit à la plongée et cinq au ski nautique. Chaque stagiaire ne pratique qu'une seule des trois activités.

1. On forme un groupe de trois stagiaires choisis au hasard parmi les vingt.

   a. Combien de groupes est-il possible de former ?

   b. Déterminer la probabilité de chacun des évènements A, B et C suivants :
   A « Les trois stagiaires pratiquent des activités différentes »
   B « Les trois stagiaires pratiquent la même activité » ;
   C « Au moins l'un des trois stagiaires pratique le ski nautique ».

2. Parmi les vingt stagiaires, un seul se prénomme Christian. Chaque jour, on choisit au hasard un groupe de trois stagiaires chargé du service au repas de midi.

a. Montrer que la probabilité que Christian soit choisi un jour donné pour le service de midi est égale à 0,15.

b. La durée du stage est de cinq jours.
• Quelle est la probabilité de ne jamais choisir Christian pour le service de midi pendant tout le séjour ?
• Quelle est la probabilité de le choisir exactement une fois ?
• En déduire que la probabilité de choisir Christian au moins deux fois est inférieure à 0,2.

PROBLÈME **11 points**
Commun à tous les candîdats

Partie A
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par :

$$f(x) = -x + 7 + 6\ln(2x+1) - 6\ln(2x+2).$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$.

1. Justifier que f est définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

2. Déterminer la limite de f en $-\frac{1}{2}$.
En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ admet pour asymptote une droite (D) dont on précisera une équation.

3. En remarquant que, pour tout x de l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

$$6\ln(2x+1) - 6\ln(2x+2) = 6\ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right).$$

déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. Soit (Δ) la droite d'équation : $y = -x + 7$.

a. Quelle est la limite de $[f(x) - (-x+7)]$ lorsque x tend vers $+\infty$
En donner une interprétation graphique.

b. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (Δ).

5. **a.** Montrer que, pour tout x de l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

$$f'(x) = \frac{-\,2x^2 - 3x + 5}{(2x+1)(x+1)}$$

où f' désigne la fonction dérivée de f.

b. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de f.

6. Soit (T) la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point M d'abscisse 0.
Déterminer une équation de la droite (T)

7. Tracer les droites (D), (Δ), (T) et la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique 2 cm. On placera l'axe des ordonnées à 2 cm du bord gauche de la feuille de papier millimétré.

Partie B

1. Soit H la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par :

$$H(x) = (2x+1)\ln(2x+1) - (2x+2)\ln(2x+2).$$

Montrer que la fonction H est une primitive sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ de la fonction h définie sur cet intervalle par : $h(x) = 2\ln\left(\dfrac{2x+1}{2x+2}\right)$.

2. On note (E) la partie du plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 5$.

a. Hachurer (E) sur la figure.

b. Calculer la valeur exacte de l'aire de (E) en unités d'aire.

c. Calculer l'aire de (E) en cm^2 (on rappelle que l'unité graphique est 2 cm).
On donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième.

∽ Baccalauréat ES Antilles–Guyane juin 2000 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

La documentaliste d'un lycée effectue une enquête auprès de 500 élèves entrant au CDI afin de connaître le nombre d'ouvrages consultés selon la fréquentation du CDI.
On obtient les résultats suivants :

- 18 % des élèves consultent un seul ouvrage par visite et, parmi ceux-ci, 90 % viennent au moins une fois par semaine ;
- 125 élèves viennent moins d'une fois par semaine et 16 % d'entre euxconsultent entre deux et cinq ouvrages par visite ;
- 45 % des élèves viennent au moins une fois par semaine et consultent chaque fois plus de cinq ouvrages.

1. Reproduire et compléter le tableau des **effectifs** ci-dessous

Fréquentation / Nombre d'ouvrages consultés	au moins une fois par semaine	moins d'une fois par semaine	Totaux
un ouvrage			
de deux à cinq ouvrages			
plus de cinq ouvrages			
Totaux			500

2. On prend au hasard un élève fréquentant le CDI et on considère les évènements :
A : « L'élève vient au moins une fois par semaine au CDI » ;
B : « L'élève consulte de 2 à 5 ouvrages » ;
C : « L'élève consulte au moins 2 ouvrages » ;
D : « L'élève vient au moins une fois par semaine au CDI et consulte entre 2 et 5 ouvrages ».
Calculer la probabilité des évènements A, B, C, D et $A \cup B$.

3. **a.** On considère un élève qui vient au moins une fois par semaine au CDI.
Quelle est la probabilité pour qu'il consulte de deux à cinq ouvrages ?

b. On considère un élève qui consulte de 2 à 5 ouvrages.
Quelle est la probabilité qu'il vienne au moins une fois par semaine au CDI ?
(N.B. : Les résultats seront donnés à 10^{-3} près.)

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le graphique donné en annexe est celui de (Γ), courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0 ; 4]$ et de ses tangentes aux points d'abscisses 1 et 1,5.

1. Lire graphiquement $f(1)$; $f'(1)$; $f(1,5)$.

2. Parmi les trois courbes données en annexe, laquelle est susceptible de représenter f', où f' est la fonction dérivée de f ?
Justifier votre réponse à l'aide d'arguments graphiques.

3. On admet que $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x+1}$ où a et b sont deux réels fixés.
Calculer $f(x)$ puis utiliser la question 1 pour déterminer a et b.

4. On pose

$$H(x) = -(2x+1)\mathrm{e}^{-x+1}$$

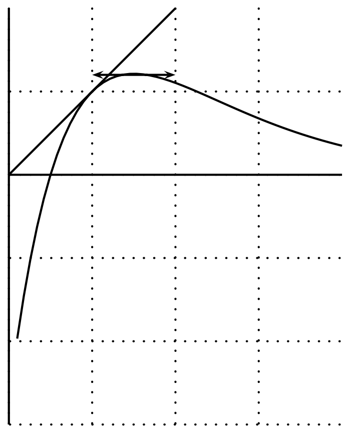
sur $\mathbb{R}$.
Vérifier que H est une primitive de h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-x+1}.$$

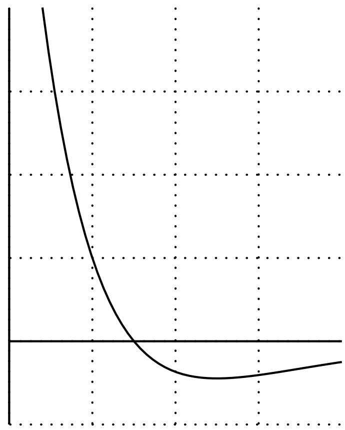
En déduire, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire de la portion de plan limitée par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$.

Annexe

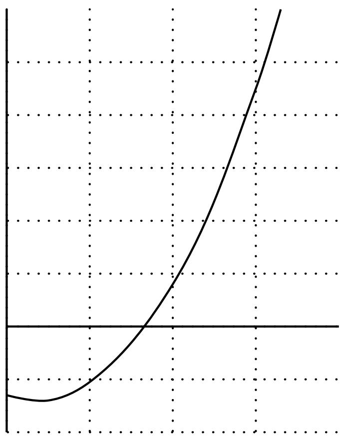
Courbe de la fonction f



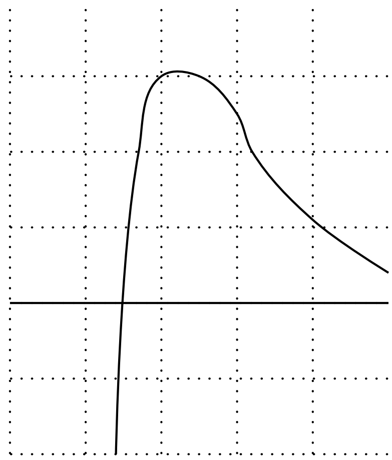
Courbe n° 1



Courbe n°2



Courbe n° 3



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 80 + a\mathrm{e}^{bx}$.
Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de f, dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, passe par les points A(0 ; 53) et B(3 ; 60). Donner les valeurs exactes, puis une valeur arrondie à 10^{-1} près pour b.

2. Dans une entreprise, on installe un nouvel atelier. Pendant la période de « mise en route », la production le n-ième jour (n, entier naturel non nul) est donnée par :

$$U_n = 80 - 27\mathrm{e}^{-0,1n} \text{ unités.}$$

a. Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante.

b. Au bout de combien de jours la production dépassera-t-elle les 72 unités ?

3. On pose : $V_n = \mathrm{e}^{-0,1n}$ (n, entier naturel non nul).

a. Montrer que V_n est une suite géométrique dont on donnera la raison et la limite.

b. Calculer $S = V_1 + V_2 + \ldots + V_{12}$.
À la suite d'une avarie, l'atelier doit être arrêté après 12 jours de fonctionnement. Quelle est la production totale obtenue pendant cette période ? Donner une valeur arrondie à l'unité.

Problème **10 points**
Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique un produit, en quantité x, exprimée en milliers de tonnes. Le coût total de fabrication est donné par :

$$C_T(x) = \frac{x}{4} + \frac{9}{2}\ln(x+1)$$

pour $x \in [0\,;5]$.
Les coûts sont exprimés en millions de francs.

A. Étude d'une fonction auxiliaire f définie sur $[0\,;5]$

On considère la fonction f définie sur $[0\,;5]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{9x}{x+1} - 9\ln(x+1).$$

1. Calculer $f'(x)$.
Vérifier que l'on peut écrire $f'(x) = \dfrac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$.

2. Établir le tableau de variations de f sur $[0\,;5]$.

3. En déduire que f s'annule sur $]0\,;5\,]$ pour une valeur unique α.

4. Déterminer un encadrement à 10^{-3} près de a (on précisera la méthode utilisée).

5. Déduire des résultats précédents le signe de f sur $[0\,;\,5]$.

B. Étude d'un coût moyen C_m

La fonction coût moyen C_m est définie sur $]0\,;\,5]$ par :

$$C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{x}{4} + \frac{9}{2}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right].$$

1. Calculer $C'_m(x)$.

   Vérifier que l'on peut écrire $C'_m(x) = \dfrac{f(x)}{2x^2}$ où f est la fonction auxiliaire de la question **A**

2. Étudier le sens de variation de C_m sur $]0\,;\,5]$.

3. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal, exprimé en francs par tonnes ?
   Quel est ce coût ?

∽ Baccalauréat ES Asie juin 2000 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Tiré d'une revue économique, le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de demandeurs d'emploi en France entre les mois d'octobre 1997 et mai 1998 (en milliers de personnes).

Mois	oct. 97	nov. 97	déc. 97	jan. 98	fév. 98	mar. 98	avr. 98	mai 98
Rang du mois x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Demandeurs d'emploi y_i	3 102	3 090	3 051	3 029	3 031	3 005	2 994	2 979

1. Le plan est rapporté à un repère orthogonal. Les unités graphiques sont :
   • 2 cm par mois sur l'axe des abscisses ;
   • 1 cm pour 20 milliers de demandeurs d'emploi sur l'axe des ordonnées (origine en 2 800).

   a. Représenter le nuage de points $(x_i\ ;\ y_i)$.

   b. Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série double et placer ce point sur le graphique.
   Vous orienterez le graphique en prenant pour axe des abscisses le « grand » coté de la feuille de papier millimétré (format paysage).

2. Dans cette question, aucun calcul manuel n'est demandé. Les valeurs obtenues à l'aide de la calculatrice seront données sous forme décimale approchée à 10^{-3} près par défaut.

   a. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ y_i)$.

   b. Écrire une équation de la droite (D) de régression de y en x_i par la méthode des moindres carrés. La tracer sur le schéma précédent.

3. On suppose que la tendance se poursuit.
   Déterminer graphiquement, à 20 milliers près, le nombre de demandeurs d'emploi que l'on peut prévoir en septembre 1998. Vérifier ce résultat.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Un horloger fabrique deux types de montres M_1 et M_2. Ces montres possèdent :
- soit un bracelet en cuir, noté C ;
- soit un bracelet en or, noté O ;
- soit un bracelet en argent, noté A.

On sait que :
- les montres de type M_2 ne peuvent pas être pourvues d'un bracelet en cuir ;
- les bracelets en cuir représentent 40 % de la production totale, et ceux en or représentent 20 %
- la production de montres de type M_2 avec bracelet en argent représente 15 % de la production totale, et est le triple de celle des montres de même type qui ont un bracelet en or.

Les résultats des calculs seront donnés de manière exacte sous forme décimale.

Partie A

Recopier et compléter le tableau des pourcentages suivant :

	C	O	A	Total
M_1				
M_2				
Total				100 %

Partie B

Une montre est choisie au hasard.
Calculer la probabilité des évènements suivants :

1. C'est une montre de type M_2.
2. C'est une montre avec un bracelet en argent.
3. C'est une montre de type M_1 avec un bracelet en argent.
4. C'est une montre de type M_1, sachant que son bracelet est en argent.
5. C'est une montre de type M_2 avec un bracelet en or.
6. C'est une montre avec bracelet or, sachant qu'elle est de type M_2.
7. C'est une montre de type M_2 sachant que son bracelet est en cuir.

Exercice 2 **5 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Une entreprise de 36 salariés est constituée d'apprentis, d'ouvriers et de cadres. Parmi ces personnes, 22 sont des hommes dont 18 ouvriers et 3 cadres, 6 femmes sont cadres et une est apprentie. Dans cette société, on travaille 5 jours par semaine. Les résultats seront donnés suivant le cas, soit sous forme de fraction irréductible, soit sous forme décimale arrondie à 10^{-3} près par défaut, soit en écriture scientifique.

1. Tous les matins, une personne choisie au hasard est interrogée sur ses conditions de travail.
   Calculer la probabilité pour que, un jour donné, la personne interrogée soit :
   a. un apprenti ;
   b. un cadre, sachant que c'est un homme ;
   c. une femme, sachant que c'est une ouvrière.

2. Afin de connaître le sentiment du personnel sur le passage aux 35 heures, on interroge tous les matins 4 personnes choisies au hasard. Chaque tirage journalier est indépendant de ceux des jours précédents. L'une des femmes se prénomme Marianne.

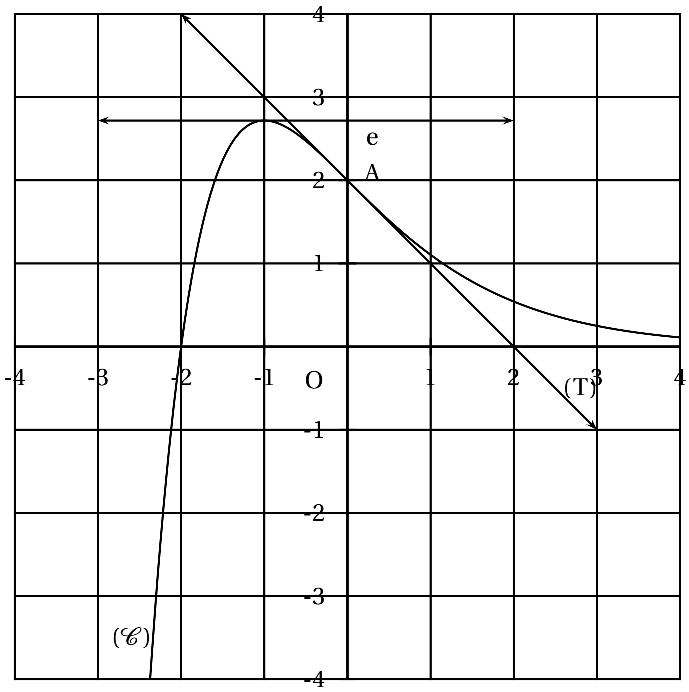
a. Montrer que la probabilité pour qu'un jour donné Marianne fasse partie du groupe des personnes interrogées est égale à $\dfrac{1}{9}$.

b. On rappelle que dans cette société, on travaille 5 jours par semaine. Quelle est la probabilité pour que Marianne soit interrogée au moins une fois en 2 semaines ? (On considère que les choix successifs des groupes de 4 personnes sont 2 à 2 indépendants.)

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Sur le graphique ci-dessous la courbe $(\mathscr{C})$ représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite (T) est la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A d'abscisse 0.



1. À partir des informations portées sur le graphique, reproduire sur votre copie et compléter le tableau suivant :

x	-1	0	1
$f(x)$			
$f'(x)$			$-\dfrac{2}{e^2}$

2. Résoudre graphiquement, dans $\mathbb{R}$, les équations ou inéquations suivantes :

a. $f(x) = 2$ puis $f(x) < 2$.

b. $f'(x) = 0$ puis $f'(x) > 1$.

Partie B

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\text{e}^{-x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f. On ne demande pas de construire $(\mathscr{C})$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$
Comment se traduit graphiquement ce résultat ?
On rappelle que la limite en $+\infty$ de $\dfrac{\text{e}^x}{x}$ est égale à $+\infty$.

3. Établir que tout x réel $f'(x) = -(x+1)\text{e}^{-x}$.
En déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variations de la fonction f.

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a deux solutions distinctes sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ et donner une valeur approchée à 10^{-2} près de celles-ci.

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (ax+b)\text{e}^{-x}$.

a. Déteminer les réels a et b pour que g soit une primitive de f.

b. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte puis une valeur approchée, à 10^{-2} près par défaut, de l'aire de la partie de plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 4$.

Baccalauréat ES Centres étrangers juin 2000

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ dont la représentation graphique, dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, est la courbe $(\mathcal{C})$ donnée en annexe. Cette annexe est à rendre avec la copie.

Les points M, N, P, Q et R appartiennent à $(\mathcal{C})$. Les coordonnées de M sont $\left(0\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$, celles de N sont $\left(1\,;\,\dfrac{7}{2}\right)$, celles de P sont $\left(2\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$, celles de Q sont $\left(3\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$ et celles de R sont $\left(4\,;\,\dfrac{7}{2}\right)$.

La courbe $(\mathcal{C})$ admet en chacun des points N et Q une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

La droite (Δ) est la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point P ; elle passe par le point S de coordonnées $(3\,;\,1)$.

1. **a.** Donner $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.

   b. Déterminer une équation de la droite (Δ).

2. **a.** Déterminer à l'aide du graphique le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$ sur l'intervalle $[\,0\,;\,4]$.

   b. Tracer la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}$ sur le document en annexe puis, à l'aide du graphique, résoudre l'inéquation $f(x) < \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}$.

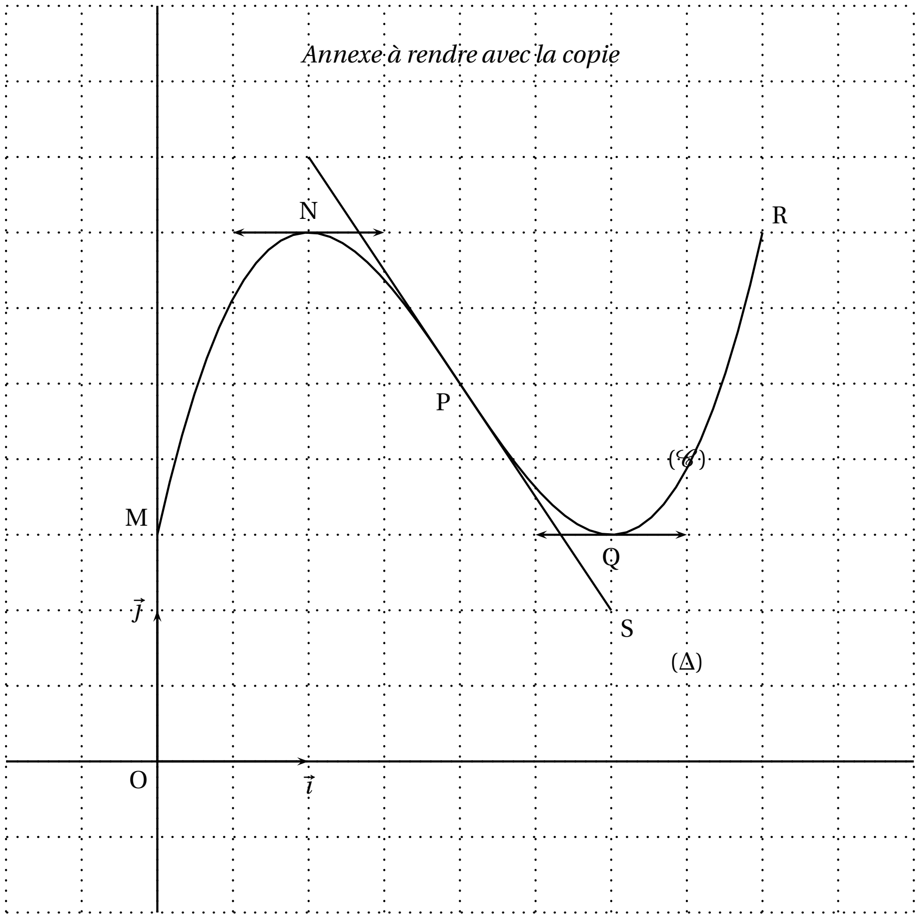
3. La fonction f est la dérivée d'une fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$. En justifiant la réponse, donner le sens de variation de F.

4. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[\,0\,;\,4]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

   a. Donner le tableau de variations de f.

   b. En déduire le tableau de variations de g.



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. Une entreprise a fabriqué 20 000 objets d'un modèle α en 1999. Elle réduit progressivement cette production de 2 500 pièces par an jusqu'à ce que la production devienne nulle. On note u_0 la production du modèle α pour l'année 1999 et u_n la production du modèle α pour l'année $(1999 + n)$.

a. Calculer u_1 et u_2.

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

c. Exprimer u_n en fonction de n.

d. Déterminer le nombre total d'objets de modèle α qui auront été produits du 1er janvier 1999 au 31 décembre 2007.

2. Dès 1999, cette entreprise lance un nouveau modèle β. 11 000 objets du modèle β ont été produits en 1999. La production du modèle β augmente de 8 % chaque année. On note v_0 la production du modèle β pour l'année 1999 et v_n la production du modèle β pour l'année $(1999 + n)$. Les résultats numériques seront arrondis à l'unité près.

a. Vérifier que $v_1 = 11\,880$ et calculer v_2.

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

c. Exprimer v_n en fonction de n.

d. Calculer la production de l'année 2007.

e. Déterminer le nombre total d'objets de modèle β qui auront été produits du 1er janvier 1999 au 31 décembre 2007.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Soit la suite u_n définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$.

a. Tracer dans un même repère orthonormal d'unité 2 cm la représentation graphique (D) de la fonction f et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

b. Calculer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

c. En faisant apparaître le mode de construction, utiliser ce graphique pour représenter u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

d. Quels semblent être le sens de variation et la limite de la suite (u_n) ?

2. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel, $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$.
Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Préciser son premier terme v_0.

b. Exprimer v_n en fonction de n.

c. Exprimer v_n en fonction de u_n et en déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = -\,3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4.$$

d. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)

e. Déterminer la limite de la suite (u_n).

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 1 - \ln x.$$

1. Calculer la fonction dérivée de g et étudier son signe.

2. Donner le tableau de variations de g (on ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$). En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}$$

et soit $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. (On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$.)

2. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ où f' est la fonction dérivée de f. En déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variation de f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[2\,;\,3]$.
   À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de x_0.

4. a. Calculer la limite de $\left[f(x) - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)\right]$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

   b. Calculer les coordonnées du point A, intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec la droite (D) d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$.

   c. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.

   d. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (D).

5. Tracer $(\mathscr{C})$, (D) et (T) dans le repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Partie C

Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$F(x) = \frac{x^2 + x + (\ln x)^2}{2}$$

1. Montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$

2. a. Hachurer, sur le graphique précédent, le domaine E limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

   b. Calculer l'aire de E en unité d'aire, de manière exacte.

   c. Donner la valeur exacte de cette aire en cm^2 et en donner la valeur décimale arrondie au dixième.

Baccalauréat ES France juin 2000

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau suivant, publié en août 1999 dans une revue économique, donne la part du temps partiel au sein de la population active (les valeurs pour 2000 et 2004 sont le résultat d'une estimation).

Année x_i	1980	1985	1990	1995	1997	2000	2004
Part du temps partiel en % y_i	8,3	11	12	15,6	16,8	18	20

On étudie la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ pour $\mathbf{1980 \leqslant x_i \leqslant 1997}$.
Les calculs seront effectués à la calculatrice.

1. Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ pour $1980 \leqslant x_i \leqslant 1997$. On prendra : 1 cm pour une part de 2 % en ordonnée, 2 cm pour 5 ans en abscisse en prenant pour origine le point (1980 ; 0).

2. Déterminer les coordonnées de G, point moyen de la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$. Le placer sur le graphique.

3. **a.** Donner la valeur arrondie à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ y_i)$. Un ajustement affine est-il justifié ?
   Dessiner cette droite sur le graphique.

   b. Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (a et b arrondis à 10^{-3} près).

   c. Peut-on considérer que les estimations pour 2000 et 2004 faites par la revue ont été réalisées en utilisant l'équation obtenue à la question **3. b.** ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

En 1998 un constructeur automobile français a vendu dans la catégorie « petites voitures » 283 049 véhicules répartis de la façon suivante :
86 214 du modèle A, 166 937 du modèle B, le reste du modèle C.
Le constructeur estime que la probabilité de choix d'un de ces modèles par un client ayant l'intention d'acheter une voiture de cette catégorie, est égale à la fréquence de vente de ce modèle dans la catégorie « petites voitures » de cette marque.
Les résultats seront arrondis à trois décimales.

1. Déterminer la probabilité qu'un client acheteur choisisse le modèle B.
   Quelle est la probabilité qu'il ne choisisse pas le modèle B ?

2. Trois clients achètent un véhicule dans la catégorie « petites voitures », leur choix se fait de façon indépendante. On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de clients parmi les trois qui achètent le modèle B.

   a. Construire un arbre de probabilité et déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

3. Représenter la fonction de répartition de X

4. Quelle est la probabilité pour qu'au plus deux clients sur les trois achètent un véhicule du modèle B ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le système bancaire, recevant un dépôt initial $S_0 = 50\,000$ F, en remet 80 % en circulation sous forme de prêts et en conserve 20% (le montant de cette réserve sera notée E_0). L'activité économique se traduit par le fait que les sommes prêtées reviennent dans le système où elles apparaissent comme un nouveau dépôt S_1, dépôt qui sera traité selon le même processus 80 % remis en circulation, 20 % mis en en réserve).
Le dépôt initial de 50 000 F engendre ainsi une suite S_n de dépôts successifs et une suite E_n de mises en réserve.

1. **a.** Calculer S_1, S_2, E_0, E_1, et E_2.

b. Exprimer S_n à l'aide de S_{n-1}.

c. En déduire les expressions de S_n et de E_n en fonction de n.

2. On fait le bilan après que la banque ait reçu les n premiers dépôts $S_0, \dots, S_{n-1}$, (et ait procédé aux mises en réserve correspondantes).

a. Calculer en fonction de n la somme totale D_n que la banque a reçue.

b. Calculer la somme totale R_n que la banque a inscrite en réserve.

3. **a.** Montrer que la limite R de la suite (R_n) est égale au dépôt initial S_0.

b. Déterminer la limite D dans la suite (D_n). Quelle est l'interprétation de la différence $D - S_0$?

PROBLÈME **11 points**

Partie A

1. Soit C_m la fonction définie sur $[0 ; 6]$ par :

$$C_m(q) = 0,8 + 4(1-2q)\mathrm{e}^{-2q}$$

Cette fonction traduit le coût marginal quotidien d'une usine pour la fabrication d'un produit chimique sous forme liquide, q étant la quantité de produit exprimée en milliers de litres et $C_m(q)$ exprimé en milliers de francs.

Dresser le tableau de variations de C_m, la valeur de $C_m(1)$ figurera dans le tableau.
En déduire le signe de $C_m(q)$ sur $[0\,;6]$.

2. **a.** Montrer que la fonction g définie sur $[0\,;\,6]$ par $g(q) = 4q\mathrm{e}^{-\,2q}$ admet pour fonction dérivée la fonction définie par :

$$g'(q) = 4(1-2q)^{\mathrm{e}-2q}.$$

b. Le coût marginal est assimilé à la fonction dérivée du coût total. Sachant que les coûts fixes $C_T(0)$ s'élèvent à un millier de francs, déterminerla fonction C_T traduisant le coût total en fonction de q.

3. **a.** Déterminer les variations de C_T sur $[0\,;6]$ en utilisant la question **1.**).

b. Représenter la fonction coût total dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ (unité graphique 2 cm).

Partie B

Le prix de vente de ce liquide est de 1,80 F par litre. La fabrication quotidienne est vendue en totalité.

1. **a.** Représenter sur le graphique précédent la fonction traduisant la recette quotidienne.

b. Montrer que le bénéfice noté $B(q)$ s'exprime par :

$$B(q) = q - 1 - 4q\mathrm{e}^{-2q}.$$

2. Soit la fonction h définie sur $[0\,;6]$ par :

$$h(q) = 1,8 - C_m(q).$$

a. Étudier les variations de h en utilisant celles de C_m.

b. Démontrer que l'équation $h(q) = 0$ a une unique solution α sur $[0\,;\ 1]$. (On ne demande pas de calculer α.)

c. En déduire le signe de $h(q)$ pour $q \in [0\,;\,6]$.

3. **a.** En utilisant la question précédente donner les variations de B.

b. Donner une valeur de $B(\alpha)$ avec deux décimales en prenant 0,28 comme valeur de α.
Que représente cette valeur pour cette usine ?

∽ Baccalauréat ES La Réunion juillet 2000 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

En vue d'étudier ses préférences alimentaires, le chien Motus a le choix chaque soir entre un et un seul des deux menus suivants :

- des croquettes ;
- une soupe avec de la viande et des pâtes aux légumes.

Une étude réalisée sur un nombre élevé de jours permet de constater que Motus a préféré la soupe dans 70 % des cas et les croquettes dans 30 % des cas.
On admet que le comportement du chien reste identique dans l'avenir.

1. On considère un jour donné choisi au hasard, et on appelle C l'événement « Motus choisit les croquettes ».
Calculer les probabilités de C et de $\overline{\text{C}}$.

2. On observe les choix du chien pendant trois jours consécutifs. On admet que ces choix sont indépendants d'un jour à l'autre.
Construire un arbre pondéré pour décrire tous les choix possibles du chien.

3. Si Motus choisit les croquettes, il boit 1 litre d'eau après son repas, s'il choisit la soupe il ne boit que 1/2 litre d'eau.
On note la quantité bue par le chien après ses repas pendant 3 jours consécutifs, choisis au hasard.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de litres d'eau bue par le chien. On suppose que les choix du chien sont indépendants d'un jour à l'autre pendant ces 3 jours.

a. Quelles sont les valeurs possibles de X ?

b. Établir la loi de probabilité de X.

c. Calculer $\text{E}(X)$ et interpréter cette valeur.

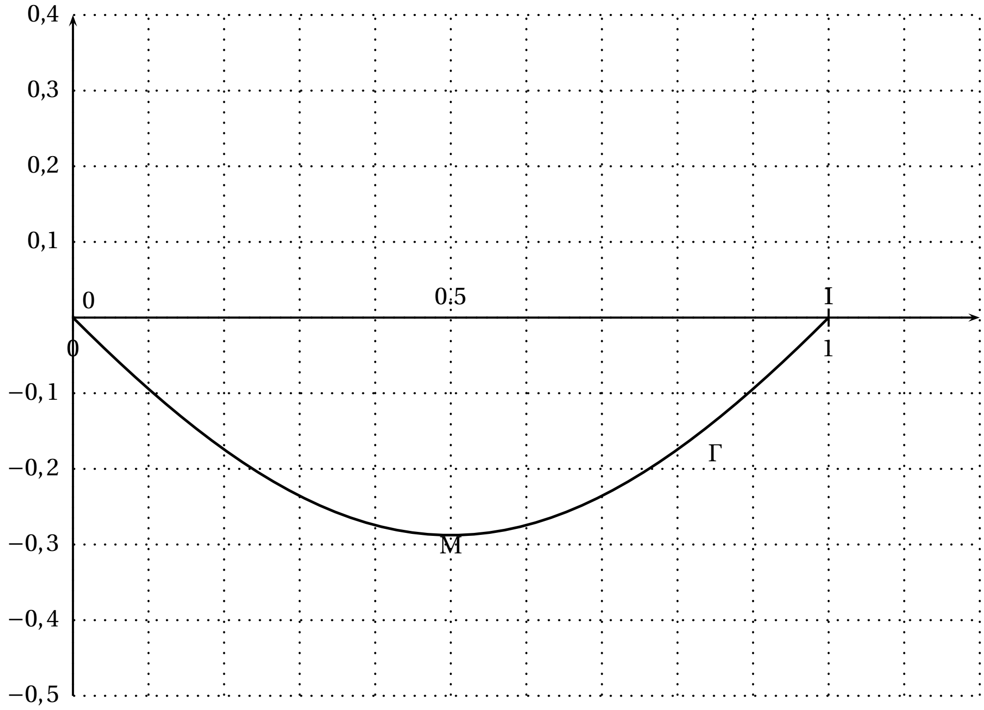
EXERCICE 2 **5 points**

(enseignement obligatoire)

Le but de cet exercice est de déterminer laquelle des fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

- $f_1(x) = x^2 - x$
- $f_2(x) = \ln(x^2 - x + 1)$
- $f_3(x) = x\text{e}^{x-1} - x$

est représentée par la courbe Γ donnée ci-dessous dans un repère orthonormé.



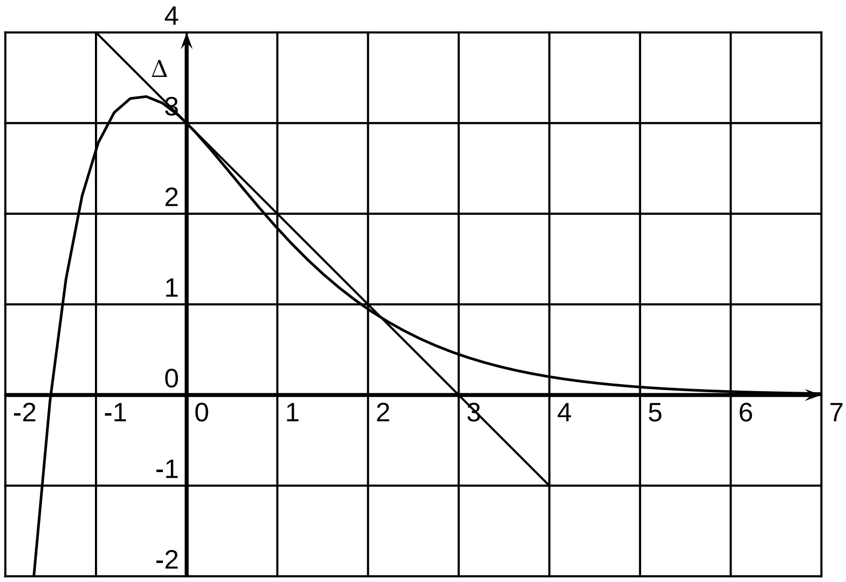
1. Calculer les fonctions dérivées f_1', f_2', f_3'. des fonctions f_1, f_2, f_3.

2. L'examen de la courbe Γ permet d'obtenir cinq informations : A, B, C, D, E.
• A : les points de coordonnées $(0\,;\,0)$ et $(1\,;\,0)$ appartiennent à Γ.
• B : la courbe Γ admet en O une tangente d'équation $y = -x$.
• C : la courbe Γ admet en I une tangente d'équation $y = x - 1$. • D : la courbe Γ admet en M une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
• E : l'ordonnée du point M est inférieure à - 0,26.
En utilisant chacune des cinq informations, dans chaque cas, vous préciserez pour chacune des fonctions f_1, f_2, f_3, celles qui vérifient la condition correspondante et celles qui ne vérifient pas cette condition.
Conclure en donnant une équation de la courbe Γ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Exercice 2 — 5 points
(enseignement de spécialité)

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(ax+b)$, où a et b sont deux réels. La droite Δ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

Cette tangente passe par les points $\mathrm{A}\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{7}{2}\right)$ et $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$.



Partie A

1. Lire sur le graphique les valeurs de $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$, $f(0)$, $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Calculer $f'(0)$.

3. Déterminer une équation de la droite Δ.

4. Déterminer les valeurs des réels a et b.

Partie B

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\mathrm{e}^{-x}(2x+1)+1$.
   Établir le tableau de variation de h (on ne calculera pas les limites aux bornes de $\mathbb{R}$).
   En déduire que, pour tout x de $[0\,;\,1]$, on a $h(x) \leqslant 0$.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x}(2x+3)+x-3$.
   . Calculer $g'(x)$ et exprimer $g'(x)$ en fonction de $h(x)$.

3. En déduire le sens de variation puis le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,1]$.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de la droite Δ pour les points d'abscisse x appartenant à $[0\,;\,1]$.

2. En déduire l'inégalité : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{5}{2}$.

PROBLÈME **10 points**

Au 1/01 /1999, une entreprise s'est équipée d'un certain nombre de machines-outils identiques, coûtant chacune à l'achat 400 000 F.
Au bout de t années, chacune se revend en ayant perdu chaque année 26 % de sa valeur de l'année précédente ; on désigne par $R(t)$ cette valeur de revente.
On estime que l'entretien d'une machine coûte forfaitairement 20 000 F, pour toute l'utilisation jusqu'à sa revente.
On appelle coût d'investissement $I(t)$ d'une machine pour l'année t, le coût d'achat de cette machine augmenté du montant forfaitaire de son entretien diminué de sa valeur de revente l'année t. On donne $I(t) = 420 - R(t)$, exprimé en milliers de francs.

1. Exprimer $R(t)$ en fonction de t.

2. On modélise $R(t)$ par la fonction suivante, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$R(t) = 400\text{e}^{-0,3t}.$$

On désigne par $\text{C}(t)$ le coût total d'utilisation d'une machine au bout de t années.
$\text{C}(t)$ est donné par :

$$C(t) = 420 - 400\text{e}^{-0,3t}.$$

a. Calculer la limite de $\text{C}(t)$ en $+\infty$.
Calculer la dérivée de $\text{C}(t)$ et étudier son signe.
Étudier les variations de la fonction C pour $t \in [0\ ;\ +\infty[$.

b. Vérifier qu'au bout de 15 ans, le coût total est pratiquement égal au coût d'achat augmenté du coût d'entretien, à 5 000 F près.

3. L'entreprise décide de revendre les machines dès que le coût total d'utilisation d'une machine dépasse 330 000 F.

a. Résoudre l'inéquation $\text{C}(t) > 330$. Donner la réponse en nombre entier d'années.

b. Pour des raisons comptables, l'entreprise revend ses machines au mois de janvier. En quelle année doit-elle le faire ?
Quel sera le prix de revente d'une machine à cette date ?
(On donnera la meilleure approximation de ce prix en nombre entier de milliers de francs.)

Baccalauréat ES Liban juin 2000

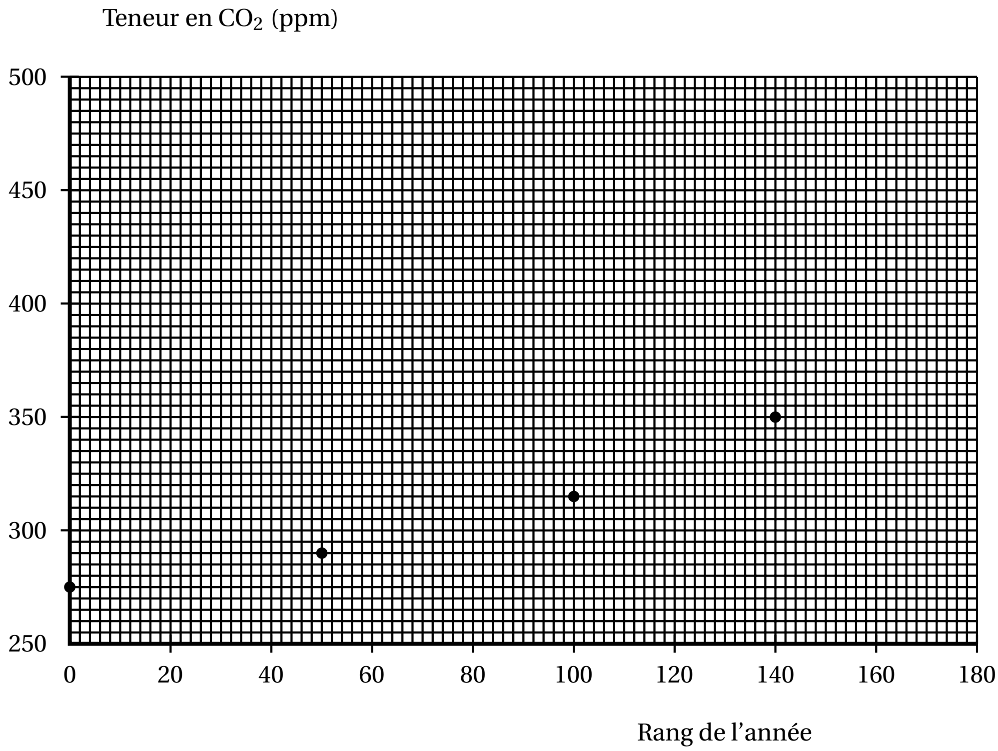
EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau suivant indique la teneur de l'air en dioxyde de carbone (CO_2), observée depuis le début de l'ère industrielle.
Dans le tableau ci-dessous, x_i représente le rang de l'année et y_i la teneur en CO_2 exprimée en parties par million (ppm).

Année	1850	1900	1950	1990
Rang de l'année x_i	0	50	100	140
Teneur en CO_2 y_i	275	290	315	350

On a représenté dans le repère ci-après le nuage de points associé à la série statistique $(x_i,\ y_i)$.



On veut modéliser cette évolution par une fonction dont la courbe est voisine du nuage de points. Plusieurs types de fonctions semblent utilisables.

1. Modélisation par une fonction affine

a. À l'aide d'une calculatrice, donner le coefficient de corrélation linéaire, arrondi au centième, de la série $(x_i,\ y_i)$.

b. À l'aide d'une calculatrice, donner une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$, avec a arrondi au centième et b à l'unité. Représenter cette droite dans le repère ci-dessus.

c. Selon ce modèle, quelle teneur en CO_2 peut-on prévoir en 2010 ? Placer dans le repère ci-dessus le point M correspondant à cette prévision.

2. Modélisation par une fonction f définie par $f(x) = 250 + B\text{e}^{Ax}$.
On pose $z_i = \ln\left(y_i - 250\right)$. On admet que la série (x_i, z_i) a pour c ?fficient de corrélation linéaire 0,999 et qu'une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés est : $z = 0,01x + 3,2$.

a. Selon ce modèle, quelle teneur en $C0_2$ peut-on prévoir en 2010 ? Placer dans le repère ci-dessus le point N correspondant à cette prévision.

b. Donner une équation de la courbe d'ajustement de y en x, sous la forme $y = f(x) = 250 + B\text{e}^{Ax}$, avec A arrondi au centième et B à l'unité.

c. En déduire des valeurs approchées décimales arrondies à l'unité près de $f(0)$, $f(50)$, $f(100)$, $f(140)$.

3. Laquelle des deux prévisions de la teneur en CO_2 pour 2010 vous semble la plus plausible ? Pourquoi ?

EXERCICE 2 — 5 points

obligatoire

Un jeu forain utilise une roue divisée en dix secteurs : sept sont verts, trois sont rouges.
On fait tourner la roue, et lorsqu'elle s'arrête, un repère désigne un secteur, chaque secteur ayant la même probabilité d'être obtenu.
Jouer une partie est l'expérience aléatoire consistant à faire tourner la roue trois fois de suite, de façon indépendante, en notant à chaque arrêt la couleur obtenue.

1. a. Représenter à l'aide d'un arbre cette expérience aléatoire et indiquer sur chaque branche les probabilités correspondantes.

b. Montrer que la probabilité d'obtenir trois fois le vert est égale à 0,343.

c. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois le rouge.

d. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux fois le rouge.

2. Pour jouer une partie, un joueur doit miser une somme d'argent : soit m le montant de sa mise. S'il obtient trois fois le vert, il perd sa mise. S'il obtient une ou deux fois le rouge, il récupère sa mise. S'il obtient trois fois le rouge, il récupère sa mise et gagne une somme égale à dix fois sa mise.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur : les valeurs que peut prendre X sont $-\ m$, 0 et $10m$.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Exprimer l'espérance de X en fonction de m. Expliquer pourquoi, quelle que soit la mise du joueur, la règle du jeu avantage le forain.

EXERCICE 2 — 5 points
(spécialité)

Partie A - Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 900$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,6u_n + 200$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 500$.
   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le terme et la raison.
   b. Exprimer (v_n) en fonction de n. En déduire que $u_n = 400 \times (0,6)^n + 500$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B - Application économique

Dans un pays, deux sociétés A et B se partagent le marché des télécom-munications. Les clients souscrivent, le 1er janvier, soit auprès de A, soit auprès de B, un contrat d'un an au terme duquel ils sont libres à nouveau de choisir A ou B.
Cette année 2000, la société A détient 90 % du marché et la société B, qui vient de se lancer, 10 %. On estime que, chaque année, 20 % de la clientèle de A change pour B, et de même 20 % de la clientèle de B change pour A. On considère une population représentative de 1000 clients de l'année 2000. Ainsi, 900 sont clients de la société A et 100 sont clients de la société B. On veut étudier l'évolution de cette population les années suivantes.

1. a. Vérifier que la société A compte 740 clients en 2001. Calculer le nombre de clients de A en 2002.
   b. On note a_n le nombre de clients de A l'année $(2000 + n)$.
   Établir que $a_{n+1} = 0,8a_n + 0,2(1000 - a_n)$.
   En déduire que $a_{n+1} = 0,6a_n + 200$.
2. En utilisant le résultat de la **partie A**, que peut-on prévoir pour l'évolution du marché des télécommunications dans ce pays ?

PROBLÈME — 10 points

*Le but du problème est l'étude d'une fonction et le tracé de sa courbe représentative (**Partie B**), en s'appuyant sur l'étude du signe d'une fonction auxiliaire (**Partie A**).*

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{-\ 1 + \ln x}{x^2}.$$

Certains renseignements concernant la fonction f sont consignés dans le tableau suivant :

x	1		$\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$f\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

1. **a.** Montrer que, pour x élément de l'intervalle $[1\,;\ +\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{3 - 2\ln x}{x^3}$, où f' désigne la dérivée de f.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x, et retrouver les variations de f données dans le tableau (aucun calcul de limite n'est demandé).

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$.

3. En utilisant les résultats précédents et le tableau de variation de f, donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{\ln x}{x}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1. **a.** Déterminer la limite de g en $+\infty$. (On rappelle que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.)

b. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left[g(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\right] = 0$.

Interpréter ce résultat pour la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ et la courbe $\mathscr{C}$

c. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

2. Montrer que la fonction f étudiée dans la **partie A** est la fonction dérivée de g.
En déduire le sens de variation de g.

3. Soit M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse e, et T la tangente à $\mathscr{C}$ en M. Justifier que T est parallèle à $\mathscr{D}$.

4. Tracer les droites $\mathscr{D}$ et T dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
Indiquer le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse α (on utilisera 1,25 pour valeur approchée de α) et la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point. Enfin, tracer la courbe $\mathscr{C}$.

5. On désigne par $\mathscr{S}$ le domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \text{e}$.
Soit A la valeur exprimée en unités d'aire de l'aire du domaine $\mathscr{S}$.

a. Exprimer A à l'aide d'une intégrale (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale dans cette question).

b. Une primitive sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ de la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ est $H(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.
Calculer A.

Baccalauréat ES Polynésie juin 2000

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Un client désirant louer une voiture auprès de la société ALIZÉ doit formuler sa demande en précisant deux critères :

• la puissance du véhicule : il a le choix entre deux catégories A ou B ;

• l'équipement : voiture climatisée ou non climatisée.

Une étude statistique portant sur un grand nombre de clients a permis d'établir que 60 % des clients louent une voiture de catégorie A et que, parmi eux, 20 % désirent la climatisation. En revanche, 60 % des clients préférant la catégorie B optent pour la climatisation.

1. Traduire à l'aide d'un arbre pondéré la situation décrite ci-dessus.

2. Dans cette question, on donnera des résultats numériques exacts. On choisit au hasard un client et on définit les événements suivants :
   « Le client a choisi une voiture de catégorie A climatisée »
   « Le client a choisi une voiture climatisée ».

   a. Déterminer la probabilité de ces événements.

   b. QueIle est la probabilité pour que la voiture choisie soit de catégorie A, sachant qu'elle est climatisée ?

3. On suppose que le nombre des clients est suffisamment important pour que la probabilité de choisir une voiture climatisée de catégorie A soit, pour chacun d'eux, celle obtenue à la question 2 et que leurs choix sont indépendants les uns des autres. On choisit au hasard trois clients. Soit X le nombre de voitures de catégorie A climatisées louées par ces trois clients.

   a. Montrer que la probabilité de l'évènement $[X = 3]$ est $(0,12)^3$.

   b. Déterminer la probabilité de l'événement $[X = 0]$ et en donner l'arrondi à deux décimales.

   c. Déterminer la probabilité de l'évènement « Au moins un des clients a choisi une voiture de catégorie A climatisée » et en donner l'arrondi à deux décimales.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Tous les résultats pourront être obtenus à l'aide de calculatrice sans justification seront arrondis à deux décimales.

Chaque trimestre l'INSEE publie la moyenne annuelle des quatre derniers indices trimestriels du coût de la construction des immeubles à d'habitation (base 100 au 4^e trimestre 1953). Le tableau suivant donne ces moyennes pour les premiers trimestres des années 1995 à 1999.

Année	1995	1996	1997	1998	1999
rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
moyenne des indices y_i	1 017	1 024,5	1 038	1 063,25	1 065

(*Source* : *INSEE*)

1. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. Un ajustement affine est-il envisageable ? Expliquer pourquoi.

2. Donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés.

3. En supposant que l'évolution se poursuive de la même façon, estimer la moyenne des indices prévisible au 1$^{\text{er}}$ trimestre 2000.

4. Monsieur Dupont loue à monsieur Lejeune, 3 000 F par mois, un studio à compter du 1$^{\text{er}}$ août 1999. Le contrat prévoit une révision annuelle des loyers au 1$^{\text{er}}$ août : les loyers sont proportionnels aux moyennes des indices du coût de la construction du premier trimestre de l'année (la moyenne des indices correspondant au loyer initial est 1 065).
Le propriétaire envisage de fixer le loyer à 3 060 F à compter du 1$^{\text{er}}$ août 2000. Cette augmentation serait-elle conforme au contrat si l'on tient compte de la moyenne des indices obtenue à la question 3 ?

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Madame X décide de verser 5 000 F, chaque année, le 31 décembre, sur un compte en assurance-vie, à partir de l'année 1999. Toutes les sommes déposées sont rémunérées au taux annuel de 5 %, à intérêts composés, ce qui signifie que chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital le 31 décembre et produisent à leur tour des intérêts.
On désigne par C_n (n entier positif ou nul) le capital, exprimé en francs, dont Madame X dispose sur son compte au 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $(2000 + n)$. On a donc $C_0 = 5\,000$.

1. a. Montrer que le capital acquis au 1$^{\text{er}}$ janvier 2001 est 102 50 F.

b. Établir que, pour tout entier n positif ou nul :
$C_{n+1} = 1,05C_n + 5000$.

2. a. On pose $u_n = C_n + 100\,000$, pour n entier positif ou nul. Établir une relation entre u_{n+1} et u_n. En déduire que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b. Exprimer (u_n) en fonction de n.

c. Montrer que $C_n = 105\,000(1,05)^n - 100\,000$.

d. En quelle année le capital acquis dépasse-t-il 200 000 F pour la première fois ?

3. On pose $S = 5000+5000(1,05)+5000(1,05)^2+\ldots+5000(1,05)^{19}+5000(1,05)^{20}$.
Calculer la valeur exacte de S et montrer que $S = C_{20}$.

PROBLÈME **10 points**

On considère la fonction numérique f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 2\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$$

et on note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

A. Étude de f sur $[0\ ;\ +\infty[$

1. Justifier que $f(x) = x + 2 - \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$ puis déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D).

3. On désigne par M le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse x et N le point de (D) de même abscisse x. La distance entre les points M et N est le nombre $MN = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$. Résoudre l'inéquation $MN < 10^{-1}$.

4. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

5. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ une solution unique x_0 dont on déterminera un encadrement à 10^{-1} près.

B. Représentation de la courbe $(\mathscr{C})$

1. Donner le coefficient directeur de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

2. Tracer (T), (D) et la partie de la courbe $(\mathscr{C})$ correspondant aux points dont l'abscisse appartient à $[0\ ;\ 4]$. Faire figurer le point de la courbe d'abscisse x_0 sur le schéma.

C. Primitive de f

1. Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

a. Déterminer une primitive G de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b. Vérifier que $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1} = 1 - g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en cm^2, de la portion du plan délimiiée par $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis en donner l'arrondi à deux décimales.