∾ Baccalauréat ES 2001 ∾

L'intégrale de septembre 2000 à juin 2001

Antilles–Guyane septembre 2000 3
Métropole septembre 2000 7
Polynésie septembre 2000 10
Amérique du Sud novembre 2000 12
Nouvelle–Calédonie décembre 2000 16
Pondichéry avril 2001 20
Amérique du Nord juin 2001 23
Antilles–Guyane juin 2001 27
Asie juin 2001 30
Centres étrangers juin 2001 34
Liban juin 2001 37
Métropole juin 2001 41
Polynésie juin 2001 44

Baccalauréat ES Antilles–Guyane septembre 2000

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans une entreprise de conception de logiciels pour l'informatique, 20 % des employés ont un diplôme en gestion des affaires. 70 % des diplômés en gestion des affaires ont des postes de cadre, alors que seulement 15 % de ceux qui n'ont pas ce diplôme occupent ces postes.
Le comité d'entreprise organise en fin d'année une loterie pour tout le personnel. Chaque employé reçoit un billet de loterie et un seul.
Tous les billets sont placés dans une urne et on en tire un totalement au hasard.
L'employé gagnant se voit alors offrir un voyage.

1. **a.** Construire un arbre de probabilité décrivant cette situation.
   b. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   G : « L'employé gagnant a un diplôme de gestion des affaires ».
   C : « L'employé gagnant est un cadre de l'entreprise ».
2. Sachant que l'employé gagnant est un diplômé en gestion des affaires, quelle est la probabilité que ce soit un cadre ?
3. Quelle est la probabilité que l'employé gagnant soit un cadre si l'on sait qu'il n'est pas diplômé en gestion des affaires ?
4. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   « L'employé gagnant est cadre et diplômé en gestion des affaires ».
   « L'employé gagnant est cadre et non diplômé en gestion des affaires ».

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Dans cet exercice, les résultats numériques pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice et seront arrondis à 2 *chiffres après la virgule.*
Le tableau suivant donne le bénéfice, en millions de francs (MF), obtenu chaque année par une entreprise pour les années 1995 à 1999.

Année	1995	1996	1997	1998	1999
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Bénéfice y_i	10	9	12	8	11

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. Que peut-on en déduire quant à la pertinence d'un ajustement affine pour cette série statistique à deux variables ?
2. On considère ensuite la série z_i des effectifs cumulés croissants de la série y_i.
   a. Recopier et compléter le tableau suivant :

Année	1995	1996	1997	1998	1999
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Bénéfice y_i	10	19			

   b. Calculer le c ?fficient de corrélation linéaire entre x et z.
   c. Donner une équation de la droite de régression de z en x.
   d. À l'aide des résultats précédents, montrer qu'il est possible de calculer une estimation du bénéfice cumulé pour l'année 2000, puis du bénéfice pour l'année 2000, arrondi à une unité près.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Une usine produit des appareils ménagers comportant des composants électriques et des pièces mécaniques. Ces appareils peuvent être défectueux. Ces défauts peuvent avoir deux origines, défaut d'origine mécanique, défaut d'origine électrique.
Ces deux défauts sont indépendants et peuvent être simultanés sur un même appareil.
Un suivi statistique de la production journalière permet d'attribuer une valeur de probabilité aux évènements suivants :
• La probabilité, pour un appareil tiré au hasard dans la production journalière, d'être défectueux est de $1,5 \times 10^{-3}$.
• Pour un appareil pris au hasard parmi ceux qui sont défectueux, la probabilité pour que l'une des origines de la panne soit due aux composants électriques est égale à 0,7.
• La probabilité, pour un appareil pris au hasard parmi ceux qui ont un défaut électrique, d'avoir aussi un défaut mécanique est de 0,8.
On désigne par D l'évènement « L'appareil est défectueux ».
On désigne par E l'évènement « L'appareil présente un défaut électrique ».
On désigne par M l'évènement « L'appareil présente un défaut mécanique ».
Les résultats numériques seront donnés avec cinq chiffres après la virgule.

1. Calculer la probabilité de l'évènement : « L'appareil ne présente aucun défaut ».
2. Construire un arbre pondéré représentant cette situation.
3. Calculer les probabilités suivantes :
   a. $P(E \cap M)$;
   b. $P(E)$;
   c. $P(M)$.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Soit f la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ dont une courbe représentative $(\mathcal{C})$ est donnée en annexe dans un repère orthogonal.
Dans tout le problème on se contentera d'étudier les fonctions sur $]0 ; 5]$.

1. Au moyen d'une lecture graphique et en utilisant le tableau de valeurs, donner le signe de f sur $]0 ; 5]$.
2. On note F la primitive de f sur $]0 ; +\infty[$ qui prend la valeur 0 pour $x = 1$.
   La courbe de F est donnée en annexe.
   Calculer, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathcal{A}$ compris entre la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}.$$

1. Calculer la limite de f en zéro par valeurs supérieures.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$?
2. Calculer la dérivée de f et étudier le signe de cette dérivée.
   Dresser le tableau des variations de f sur $]0 ; 5]$.

3. Calculer une primitive de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
Donner l'expression de F.

Partie C

Une entreprise qui fabrique des ustensiles de cuisine sait qu'elle peut en produire jusqu'à 5 000 par jour et que son bénéfice, exprimé en milliers de francs, est donné par :

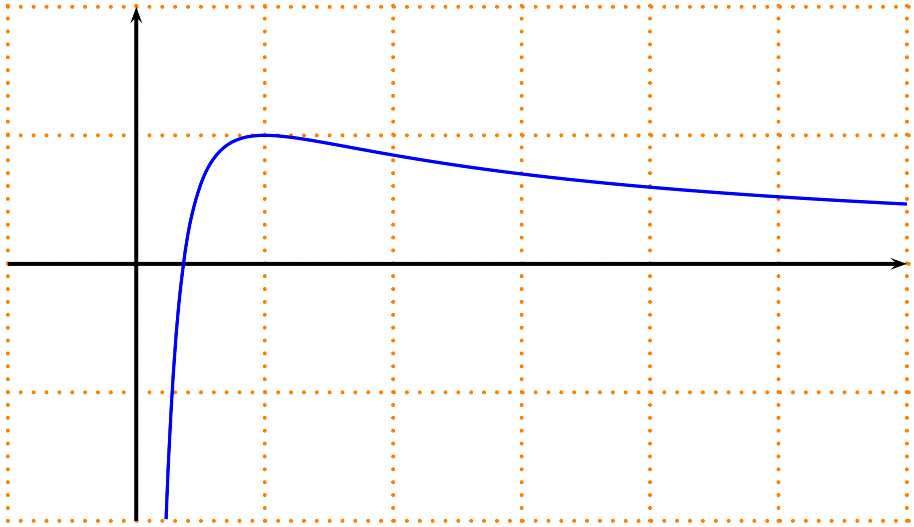
$$B(q) = 10 \times \frac{1+\ln(q)}{q}$$

où q est le nombre d'unités produites, en milliers.
Déduire de l'étude de la **partie B** :

1. Le nombre minimal d'unités à produire pour que l'entreprise atteigne le seuil de rentabilité (bénéfice positif) ;
2. Le nombre exact d'unités à produire pour que l'entreprise obtienne un bénéfice maximum, ainsi que la valeur de ce bénéfice.

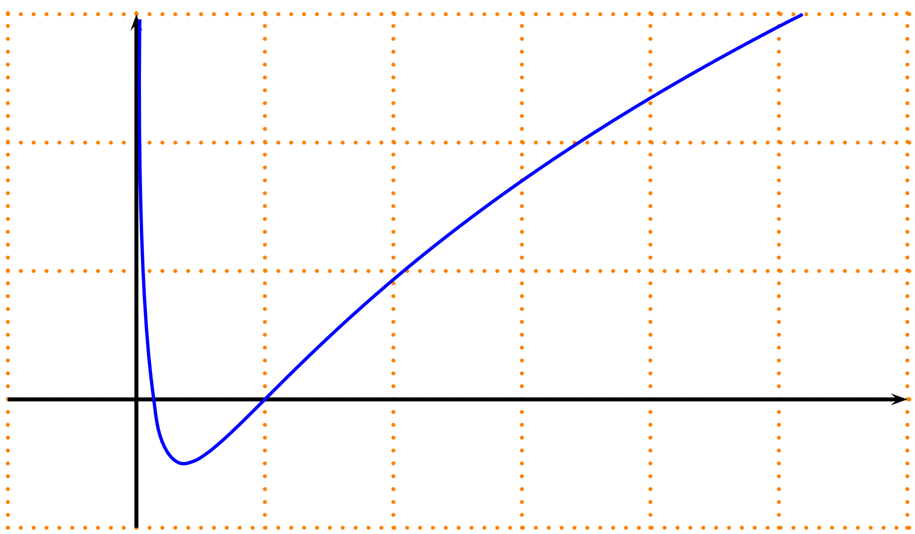
Annexe du problème

Courbe de la fonction f



x	$\frac{1}{\text{e}}$	1	e
$f(x)$	0	1	$\frac{2}{\text{e}}$

Courbe de la fonction F



x	$\frac{1}{\text{e}}$	1	e
$F(x)$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$

Baccalauréat ES Métropole septembre 2000

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une usine fabrique des moteurs électriques pour l'industrie spatiale. Ceux-ci doivent être très fiables et performants ; pour cela ils passent des contrôles très sévères.
Chaque moteur est testé en fin de fabrication. Si le test est positif, le moteur est acheminé chez le client ; si le test est négatif, le moteur retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si, cette fois, le test est positif, le moteur part chez le client mais, si le test est négatif, le moteur est définitivement écarté et détruit.
Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 85 % des moteurs neufs sortis directement des chaines de fabrication mais que, parmi les moteurs révisés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succès.
Sauf avis contraire, on donnera les valeurs décimales exactes des probabilités demandées.

1. On choisit un moteur au hasard dans la chaine de fabrication.
   - **a.** Construire un arbre de probabilité illustrant les différents cas qui peuvent se présenter pour ce moteur.

     Faire apparaître sur chaque branche les probabilités correspondantes.
   - **b.** Donner la probabilité pour que le premier test en fin de fabrication soit positif pour ce moteur.
   - **c.** Calculer la probabilité pour que ce moteur doive être révisé et soit ensuite acheminé chez le client.
   - **d.** Calculer la probabilité pour que ce moteur soit finalement écarté et détruit.
   - **e.** Calculer la probabilité pour que ce moteur soit envoyé chez le client.
2. La fabrication d'un moteur revient à 60 000 francs auxquels il faut rajouter 10 000 francs si le moteur est révisé. Un moteur est facturé au client la somme de t francs (t nombre réel positif). Soit X la variable aléatoire qui, à chaque moteur fabriqué, associe le gain (éventuellement négatif que réalise l'entreprise sur ce moteur.
   - **a.** Déterminer en fonction de t les trois valeurs que peut prendre X et déterminer la loi de probabilité de X.

     (On rappelle que le bénéfice est la différence entre le prix de vente et le prix de revient.)
   - **b.** Calculer en fonction de t l'espérance mathématique de X et en déduire la valeur de t à partir de laquelle l'entreprise fera un bénéfice positif en vendant un grand nombre de moteurs (arrondir au franc près).

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

M$^{\text{me}}$ X décide d'ouvrir un plan d'épargne. Le taux **mensuel** de celui-ci est de 0,4 %, les intérêts sont capitalisés tous les mois. Elle verse 10 000 F le 1$^{\text{er}}$ janvier 2000. Puis, tous les premiers de chaque mois à partir du 1$^{\text{er}}$ février 2000, elle verse 600 F sur ce plan.
Soit u_n la somme qui se trouve sur son plan après n mois d'ouverture. Ainsi $u_0 = 10000$ et $u_1 = 10640$.

1. Calculer u_2 et u_3.

   Écrire une relation entre u_{n+1} et u_n.

2. On définit la suite (v_n) telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, on ait $v_n = u_n + 150000$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
3. Calculer le temps nécessaire pour économiser la somme de 100 000 F sur ce plan.
   En quelle année cela se produira-t-il ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Le conseil municipal d'une station touristique de montagne a décidé de faire équiper une falaise afin de créer un site d'escalade. L'équipement doit se faire depuis le pied de la falaise. Deux entreprises spécialisées dans ce genre de chantier ont été contactées et ont envoyé des devis. On se propose d'étudier ceux-ci.
Devis de l'entreprise A :
Le premier mètre équipé coûte 100 F, puis chaque mètre supplémentaire équipé coûte 20 F de plus que le mètre précédent (100 F pour équiper une falaise de un mètre, 100 F + 120 F = 220 F pour équiper une falaise de deux mètres, 100 F + 120 F + 140 F = 360 F pour une falaise de trois mètres, etc.)
Devis de l'entreprise B :
Le premier mètre équipé coûte 50 F, puis chaque mètre supplémentaire équipé coûte 5 % de plus que le mètre précédent (50 F pour équiper une falaise de un mètre, 50 F + 52,50 F = 102,50 F pour équiper une falaise de deux mètres, 50 F + 52,50 F + 55,125 F = 157,625 F pour une falaise de trois mètres, etc.).
On appelle u_n le prix du n-ième mètre équipé et S_n le prix de l'équipement d'une falaise de n mètres de hauteur indiqués par l'entreprise A.
On appelle v_n le prix du n-ième mètre équipé et R_n le prix de l'équipement d'une falaise de n mètres de hauteur indiqués par l'entreprise B.

1. Exprimer u_n puis S_n en fonction de n.
2. Exprimer v_n puis R_n en fonction de n.
3. Calculer le prix à payer pour équiper une falaise de 50 mètres de hauteur avec chacune des deux entreprises. Préciser l'entreprise la moins chère. On arrondira les prix au franc près.
4. Le conseil municipal a décidé d'accorder un budget de 120 000 F pour équiper ce site. Calculer la hauteur de la falaise qui peut être équipée avec cette somme par chacune des deux entreprises A et B (arrondir au mètre près).

PROBLÈME **10 points**

Une société est spécialisée dans l'exploitation de gravières (le gravier extrait est utilisé pour la construction d'autoroutes). Elle doit étudier le plan d'exploitation d'un nouveau site d'extraction. Voici les conditions d'exploitation définies par la direction :
« L'exploitation débutera le 1er janvier 2001. La production journalière de gravier devra rapidement augmenter pour atteindre son maximum après un an et demi de travail, puis elle devra décroître lentement. »
On traduit en langage mathématique ces consignes afin de modéliser la production journalière et la production totale. On choisit habituellement pour modéliser la production journalière du site une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = (at^2 + bt + c)\mathrm{e}^{-t}$$

où a, b et c sont trois nombres réels.

$f(t)$ représente la production journalière de gravier extrait (en milliers de tonnes), t étant la durée écoulée depuis le début de l'ouverture du site (t est en années, c'est un réel positif). On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f.
Les consignes peuvent se traduire ainsi :

- $(\mathscr{C})$ passe par le point O de coordonnées $(0\,;\,0)$.
- La tangente à $(\mathscr{C})$ en O a pour coefficient directeur 3.
- La courbe $(\mathscr{C})$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1,5.

1. Montrer que sous ces contraintes f est définie par

$$f(t) = \left(2t^2 + 3t\right)\text{e}^{-t}.$$

2. Déterminer la dérivée f' de f et montrer que

$$f'(t) = (-2t + 3)(t + 1)\text{e}^{-t}.$$

Étudier les variations de la fonction f pour $t \geqslant 0$. On admet que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Préciser le signe de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. Calculer le maximum de f sur $[0\,;\,+\infty[$. En donner la valeur arrondie à 10^{-3} près. Quelle est la production journalière maximum prévue sur ce site, et à quelle date sera-t-elle atteinte ?

4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ sur une feuille de papier millimétré (unités : 3 cm sur l'axe des abscisses, 5 cm sur l'axe des ordonnées).

5. Montrer qu'il existe une seule valeur t_0, comprise entre 3 et 4, telle que $f(t_0)$ soit égale à 1 (soit 1 000 tonnes par jour).

Donner à l'aide de la calculatrice une valeur de t_0 arrondie à 10^{-2} près.

6. Montrer que la fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$F(t) = \left(-2t^2 - 7t - 7\right)\text{e}^{-t}$$

est une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

7. Considérant que la gravière sera exploitée 200 jours par an, on admettra que la production totale prévue pendant la durée t est donnée par la formule

$$P(t) = 200 \times \int_0^7 f(x)\,\text{d}x.$$

a. Transformer l'écriture de $P(t)$ en utilisant le résultat de la question 6 et étudier les variations de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

b. On prévoit que l'exploitation de ce site doit être interrompue au bout de cinq ans. Calculer à 1 000 tonnes près par défaut la quantité de gravier qui aura été extraite, ainsi que la production moyenne annuelle sur cette période.

Baccalauréat ES Polynésie septembre 2000

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un salarié a mis en réserve 10 000 F sur un compte rémunéré, au taux de 5 % par an, le 1er janvier 2000.
Au 1er janvier des années suivantes, les intérêts sont cumulés à son capital. Le salarié décide par ailleurs de faire prélever sur ce même compte les frais de gestion de sa carte bancaire. Ces frais sont annuels, s'élèvent à 200 F et sont prélevés le 1er janvier de l'année suivante.
On note u_0 le capital au 1er janvier 2000 et u_n le capital au 1er janvier de l'année $(2000+n)$.
Ainsi $u_0 = 10000$ et $u_1 = 10300$.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Montrer que $u_{n+1} = 1,05u_n - 200$.
3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $U_n = u_n - 4000$.
   Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
4. En déduire l'expression de U_n puis de u_n en fonction de n.
5. De quelle somme, arrondie au franc, le salarié disposera-t-il au 1er janvier 2010 ?
6. Au bout de combien d'années le capital initial aura-t-il doublé ?

Exercice 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Une enquête est faite auprès des inscrits à un stage multi-activités (randonnée, natation, parapente , ...).
On note :
• F l'ensemble des femmes participant à ce stage ;
• A l'ensemble des stagiaires, hommes et femmes, pratiquant la randonnée.
L'enquête rélève que :
• F représente 30 % de l'ensemble des stagiaires ;
• A représente 48 % de l'ensemble des stagiaires ;
• chez les stagiaires du groupe A, il y a deux fois plus d'hommes que de femmes.

1. On interroge un stagiaire au hasard.
   a. Quelle est la probabilité que ce stagiaire pratique la randonnée ?
   b. Quelle est la probabilité que ce stagiaire soit une femme pratiquant la randonnée ?
2. On interroge au hasard une stagiaire femme. Quelle est la probabilité qu'elle pratique la randonnée ?
3. On interroge trois stagiaires au hasard, de manière indépendante. Quelle est la probabilité que, parmi ces trois stagiaires, aucun ne pratique la randonnée ?

Problème **10 points**

Les représentations graphiques sont faites dans un même repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. Soit f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

a. Calculer $f'(x)$. Montrer que $f'(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le sens de variation de f.

c. Tracer la partie $\mathscr{C}$ de la courbe représentative de f limitée à $[0~;3]$.

2. Soit g la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = \ln(x+1)$.

a. Représenter graphiquement la fonction ln sur $[0~;~+\infty[$.

b. En déduire la partie $\mathscr{C}'$ de la courbe représentative de g limitée à $[0~;3]$.

3. **a.** Soit Ψ la fonction définie sur l'intervalle $[0~;3]$ par :

$$\Psi(x) = f(x) - g(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(x+1).$$

Calculer $\Psi(x)$, puis dresser le tableau de variations de Ψ (on y fera figurer la valeur $\Psi(0)$).

En déduire le signe de $\Psi(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0~;3]$.

b. Quelles sont les positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$?

4. **a.** Soit $G(x) = (x+1)ln(x+1) - x$.

Montrer que G est une primitive de g sur $[0~;~+\infty[$.

b. Calculer, en cm^2 , la valeur exacte de l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

Donner une valeur approchée décimale de cette aire à 10^{-3} près.

Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2000

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Dans chacun des calculs, donner les résultats sous forme de fiactions irréductibles.

1. Le jeune Bob obtient des résultats moyens à l'école. Pour le motiver, sa maman lui propose le jeu suivant : à chaque fois qu'il obtient une « bonne » note, il peut tirer successivement sans remise deux pièces dans un sac contenant 7 pièces de 5 francs et 3 pièces de 10 francs.

   Si les deux pièces sont de valeurs différentes, il garde ces deux pièces et sa maman complète le sac pour une autre fois.
   Si les deux pièces sont de même valeur, il remet les deux pièces dans le sac.

   Déterminer la probabilité des évènements suivants :

   A : « Bob tire deux pièces de 5 francs » ;

   B : « Bob tire deux pièces de 10 francs » ;

   C : « Bob tire deux pièces de valeurs différentes ».

2. On conserve le principe du jeu du 1).

   On se propose de faire gagner un peu plus d'argent à Bob en changeant juste le nombre de pièces de 10 francs dans le sac, le nombre de pièces de 5 francs étant toujours de 7.

   On suppose qu'il y a n pièces dans le sac dont toujours 7 pièces de 5 francs (n est un entier naturel supérieur ou égal à 10).

   a. Montrer que la probabilité p_n de l'évènement « Bob tire deux pièces de valeurs différentes » est :

   $$p_n = \frac{14(n-7)}{n(n-1)}$$

   b. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[10\,;\,+\infty[$ par :

   $$f(x) = \frac{14(x-7)}{x(x-1)}.$$

   Étudier les variations de f et en déduire les deux valeurs entières consécutives de n entre lesquelles la fonction f présente son maximum. Donner alors la valeur maximale de p_n.

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de passagers sur une ligne aérienne entre 1994 et 1998 :

Année	1994	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Nombre de passagers p_i	7550	9230	10 745	12 840	15 665

Dans cet exercice, les résultats numériques pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice, sans justification. Ils seront donnés sous forme décimale approchée à 10^{-3} *près par défaut sauf à la question* 3.

1. **a.** On pose $y_i = \ln(p_i)$.

   Recopier et compléter le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
y_i					

b. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées ; les graduations commencent à 0 sur l'axe des abscisses et à 8 sur l'axe des ordonnées).
Placer le point moyen G de ce nuage.

2. **a.** Justifier pourquoi un ajustement affine est acceptable.
b. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement affine (ou droite de régression) (D) de y en x.
Tracer la droite (D) sur le graphique précédent.

3. En supposant la même évolution du nombre de passagers, donner une estimation de ce nombre de passagers en l'an 2000 (arrondir le résultat à 100 près).

EXERCICE 2 **6 points**
Enseignement de spécialité

À l'entraînement, un jeune basketteur effectue des tentatives pour marquer un panier. Pour chaque tentative, il dispose de deux essais. On considère que la tentative est réussie si le premier essai est réussi ou, sinon, lorsque le second essai est réussi.
Après plusieurs jours, son entraîneur a constaté que :
• la probabilité de réussir le premier essai est 0,5 ;
• la probabilité de réussir le deuxième essai, sachant que le premier a été raté, est 0,4.
Dans tout l'exercice, on considère que les tentatives successives sont indépendantes.

1. Le joueur fait une tentative de marquer un panier. Montrer que la probabilité de succès est 0,7.

2. Le joueur effectue deux tentatives successives. Calculer la probabilité des évènements suivants :
A « Réussir les deux tentatives » ;
B « Réussir les deux tentatives au premier essai ».

3. Le joueur effectue cinq tentatives successives. Quelle est la probabilité d'en réussir exactement quatre ? (Donner un résultat arrondi à 0,0 1 près.)

4. Le joueur effectue n tentatives successives où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.
a. Montrer que la probabilité p_n de l'évènement : « Le joueur réussit au moins une tentative », est :

$$p_n = 1 - 0,3^n.$$

b. Déterminer le sens de variation de la suite (p_n).
Déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.
c. Déterminer le nombre minimal n de tentatives que doit effectuer le joueur pour que la probabilité p_n soit supérieure à 0,999.

PROBLÈME **10 points**

La répartition de la masse salariale d'une entreprise entre ses salariés peut être décrite par une fonction f qui permet d'apprécier si la distribution des salaires est plus ou moins régulièrement répartie. Une telle fonction, qui indique des pourcentages de salaires en fonction de pourcentages d'individus, est définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et satisfait aux conditions (C) suivantes :

(C_1) : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;
(C_2) : f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$;
(C_3) : pour tout x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $f'(x) \leqslant x$.
Ce problème a pour but d'étudier deux de ces fonctions, de tracer leur courbe représentative et de comparer la répartition des masses salariales des entreprises correspondantes.

Partie I

⋆ **Étude d'une fonction préliminaire**

On considère la fonction g définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$g(x) = 1 - \mathrm{e}^{x-1}.$$

Calculer $g'(x)$, où g' désigne la fonction dérivée de g ; étudier son signe.
Calculer $g(0)$ et $g(1)$; en déduire le signe de $g(x)$ sur $[0 ; 1]$.

Partie II

On considère deux entreprises P et Q pour lesquelles les fonctions p et q donnant les répartitions de masse salariale sont définies sur $[0 ; 1]$ par :

$$p(x) = x^2 \quad \text{et} \quad q(x) = x\mathrm{e}^{x-1}.$$

⋆ **A. Étude des conditions (C) pour les fonctions *p* et *q***

1. Montrer que la fonction p vérifie les trois conditions (C_1), (C_2), (C_3).

2. **a.** Montrer que la fonction q vérifie la condition (C_1).

b. Calculer $q'(x)$ où q' désigne la fonction dérivée de q.
Étudier le signe de $q'(x)$ sur $[0 ; 1]$.
Montrer que la fonction q vérifie la condition (C_2).

c. Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$: $x - q(x) = xg(x)$ où g est la fonction de la partie 1.
Montrer que la fonction q vérifie la condition (C_3).

⋆ **B. Tracé des courbes représentatives des fonctions *p* et *q***

On appelle (Δ) la droite d'équation $y = x$ et on appelle respectivement $\left(\Gamma_p\right)$ et $\left(\Gamma_q\right)$ les représentations graphiques des fonctions p et q dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, d'unité graphique 10 cm.
Recopier et compléter le tableau suivant (donner les valeurs arrondies à 0,01 près).

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$p(x)$											
$q(x)$											

Tracer (Δ), $\left(\Gamma_p\right)$ et $\left(\Gamma_q\right)$ dans le repère défini ci-dessus.

Partie III

⋆ **Coefficient de Gini**

Le coefficient de Gini d'une entreprise est un indicateur d'inégalité de répartition salariale dans l'entreprise. Plus il est grand, plus la répartition des salaires est inégale. Dans une entreprise dont la répartition de la masse slariale est décritepar une fonction f satisfaisant aux conditions (C), on appelle coefficient de Gini le nombre réel :

$$G_f = 2\int_0^1 [x - f(x)]\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer le coefficient de Gini G_p de l'entreprise P
2. **a.** Montrer que la fonction Q définie sur $[0\,;\,1]$ par $Q(x) = (x-1)\text{e}^{x-1}$ est une primitive de la fonction q sur $[0\,;\,1]$.

   b. Calculer le coefficient de Gini G_q de l'entreprise Q.
3. Comparer G_p et G_q.

   Dans laquelle des deux entreprises la répartition de la masse salariale est-elle la plus inégale ? justifier la réponse.

Baccalauréat Nouvelle-Calédonie décembre 2000

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

On prévoit qu'une automobile, achetée neuve, aura subi une décote de 20 % la première année d'utilisation, puis une nouvelle décote de 15 % la deuxième année, et enfin une décote de 10 % chacune des années suivantes.

1. Une automobile est achetée neuve 120 000 francs. Déterminer la valeur de cette automobile, au franc près, au bout :
   a. d'un an.
   b. de deux ans.
   c. de quatre ans.
2. Une automobile est achetée neuve au prix P_0 (en francs). On appelle P_n, la valeur de cette automobile, en francs, au bout de n années.
   a. Exprimer P_n en fonction de P_0, et de n, lorsque n est supérieur ou égal à 3.
   b. Au bout de quatre ans, la valeur d'une automobile est 75 000 francs. Quel était, au franc près, son prix initial ?
   c. Quel est le plus petit entier n tel que :
   $$0,68 \times 0,9^{n-2} \leqslant 0,5\ ?$$
   d. Une voiture a été achetée en l'an 2000. Déduire de la question **2. c.** l'année à partir de laquelle sa valeur sera, pour la première fois, inférieure ou égale à la moitié du prix du neuf.
   Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
Un commerçant possède un lot de 500 pantalons de taille allant de 1 à 4 et de couleur rouge, verte ou blanche. Après l'inventaire de son lot, le commerçant constate que les tailles n° 1 représentent 60 % du stock, que les tailles n° 2 en représentent 20 % et qu'il y a autant de tailles n° 3 que de tailles n° 4.
D'autre part, parmi les tailles n° 1, 30 % des pantalons sont blancs et 50 % sont verts. Enfin pour chacune des tailles n° 2, n° 3 et n° 4, 20 % des pantalons sont blancs et 40 % sont verts.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Couleur ↓ Taille →	n° 1	n° 2	n° 3	n° 4	Total
Blanche					
Rouge			20		
Verte					
Total					500

2. Ce commerçant décide de vendre 200 francs chaque pantalon vert de la taille n° 1, ainsi que chaque pantalon blanc ou rouge des tailles n° 2, n° 3 et n° 4. Les autres pantalons de la taille n° 1 seront vendus 250 francs l'unité, et les pantalons verts des tailles n° 2, n° 3 et n° 4, 100 francs l'unité.
Un client choisit un pantalon au hasard.
   a. Déterminer la probabilité que ce pantalon soit vert.
   b. Sachant que ce pantalon coûte 200 francs, déterminer la probabilité qu'il soit vert.
   c. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque pantalon choisi, associe son prix.
   Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles, sauf indication contraire.

Dans une école maternelle, l'enseignante demande à chaque enfant de choisir chaque matin 3 jouets parmi 9 rouges, 6 jaunes et 5 bleus. Tous ces jouets se trouvent mélangés dans une caisse. L'enseignante s'intéresse plus particulièrement à Rémi qui choisit chaque matin les 3 jouets au hasard. On suppose que tous les choix de 3 jouets sont équiprobables.

1. Combien y a-t-il de choix possibles de 3 jouets ?
2. On désigne par A, B et C les évènements suivants :
   A « Rémi a choisi un jouet de chaque couleur ».
   B « Rémi a choisi trois jouets de la même couleur ».
   C « Rémi a choisi exactement deux jouets rouges ».
   a. Montrer que la probabilité de A est $\dfrac{9}{38}$.
   b. Déterminer la probabilité de B.
   c. Déterminer la probabilité de C.
3. L'enseignante observe Rémi pendant 5 matins consécutifs. Elle note le nombre de jours où il aura choisi trois jouets de trois couleurs différentes.
   Quelle est la probabilité que ce nombre de jours soit au moins égal à 4 ? En donner une valeur décimale arrondie à 10^{-4} près.

PROBLÈME **10 points**

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'actif net d'une mutuelle de 1988 à 1997 :

x_i	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
y_i	5,89	6,77	7,87	9,11	10,56	12,27	13,92	15,72	17,91	22,13

où x_i est le nombre d'années écoulées depuis 1900, y_i est l'actif net en milliards de francs, et i un entier allant de 1 à 10.
On a représenté ci-après le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé à la série statistique, dans le plan rapporté à un repère orthogonal : unités graphiques : 1 cm pour une année en abscisse, 1 cm pour un milliard de francs en ordonnée ; l'origine correspondant au point A de coordonnées (86 ; 0).

Partie A

On veut réaliser un ajustement affine du nuage par la méthode des moindres carrés. *Tous les calculs statistiques seront effectués à la machine et les résultats donnés à* 10^{-2} *près.*

1. Justifier pourquoi un ajustement affine, entre x et y, est envisageable.
2. Déterminer par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$, l'équation de la droite $\mathcal{D}$ d'ajustement affine de y en x (ou droite de régression).
3. Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur le graphique fourni.
4. Estimer l'actif net prévisible de la mutuelle en l'an 2000.

Partie B

On veut étudier la fonction f définie dans l'intervalle $[88\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{0,143x-10,813}.$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f, dans le repère orthogonal fourni.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. **a.** La fonction f est la composée de deux fonctions croissantes.
   Préciser ces fonctions.
   b. En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $[88\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

3. **a.** Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en donnant les valeurs décimales approchées à 10^{-2} près.

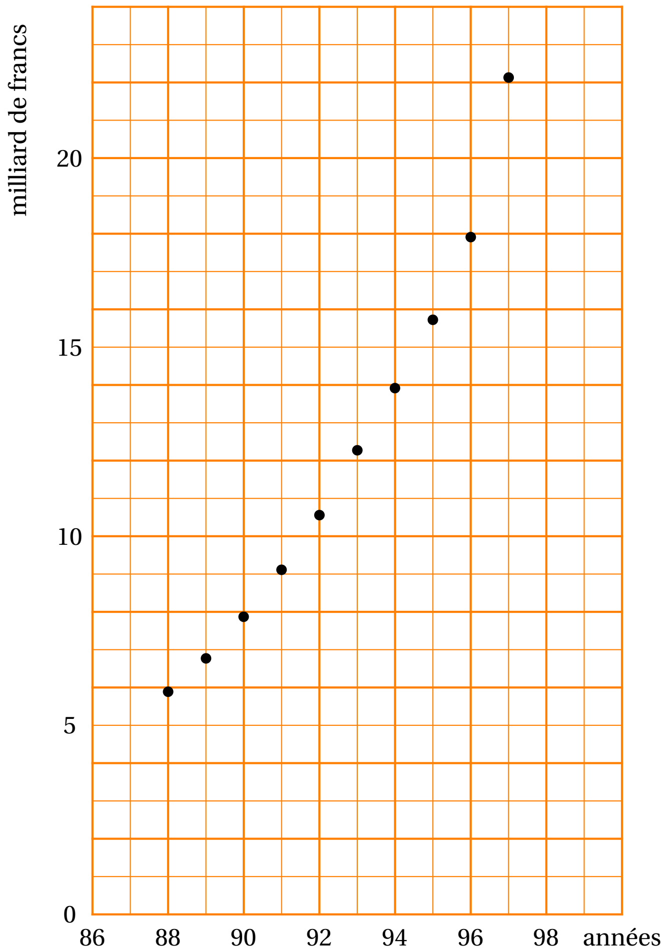
x	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
$f(x)$										

   b. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ sur le graphique fourni ci-après.
4. **a.** Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[88\,;\,+\infty[$.
   b. Déterminer une valeur décimale approchée à 10^{-2} près, de la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[88\,;\,97]$.

Partie C

On admet que la fonction f est aussi un modèle mathématique de l'évolution de l'actif net de la mutuelle.

1. **a.** En utilisant cette nouvelle approximation, déterminer, à 10^{-2} près, l'actif net prévisible de la mutuelle en l'an 2000.
   b. Comparer ce résultat avec celui obtenu dans la partie **A** : à partir de l'observation graphique, un des deux résultats est-il plus vraisemblable ? Pourquoi ?
2. Interpréter le résultat obtenu dans la question **4. b.** de la partie **B)** .


milliard de francs
20
15
10
5
0
86
88
90
92
94
96
98
années

Baccalauréat ES Pondichéry avril 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau suivant indique, en millions, la population de la France métropolitaine d'après les recensements depuis 1946.

Année	Rang x_i de l'année	Population y_i
1946	0	40,439
1954	8	42,706
1962	16	46,425
1968	22	49,712
1975	29	52,592
1982	36	54,335
1990	44	56,615
1999	53	58,416

Le détail des calculs statistiques effectués avec une calculatrice n'est pas demandé. Les nombres à déterminer seront arrondis à trois décimales.

1. Quel est le coefficient de corrélation linéaire entre x et y ?
   Un ajustement affine est-il envisageable ?
2. Le plan est rapporté à un repère orthogonal, les unités graphiques étant :
   - 0,25 cm sur l'axe des abscisses ;
   - 1 cm sur l'axe des ordonnées, la graduation des ordonnées débutant à 40.

   a. Construire le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.

   b. Indiquer les coordonnées du point moyen G associé à la série $(x,\ y)$ et placer ce point sur le graphique précédent.
3. Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés. Tracer cette droite (D) sur le graphique précédent.
4. En supposant que cette évolution de la population se poursuive, donner une estimation de la population en 2005.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Claude range ses crayons de couleur et il en trouve un orange, trois jaunes et quatre bleus. Il prend au hasard successivement trois crayons dont il note les couleurs : o pour orange, j pour jaune et b pour bleu.

1. Tracer un arbre pondéré illustrant cette expérience aléatoire.
   Les réponses aux questions suivantes seront exprimées sous forme d'une fraction irréductible.
2. Quelle est la probabilité de l'évènement : « Les trois crayons ont la même couleur » ?
3. Quelle est la probabilité de l'évènement : « Les trois crayons sont pris parmi les crayons de couleur orange ou jaune » ?
4. Quelle est la probabilité de l'évènement : « Parmi les trois crayons, un au moins est bleu » ?
5. Claude veut dessiner un drapeau bleu et jaune. Quelle est la probabilité qu'il puisse le faire, sachant que le premier crayon est bleu ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Les six points suivants sont définis par leurs coordonnées :
A(1 ; −1 ; 3) ; B(1 ; 1 ; 3) ; C(1 ; 1 ; −3) ; A′(19 ; −1 ; 3) ; B′(19 ; 1 ; 3) ; C′(19 ; 1 ; −3).
Aucune figure n'est exigible.

1. **a.** Montrer que les trois points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Établir que le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est normal au plan (ABC).

   c. Écrire une équation cartésienne du plan (ABC).

   d. Les quatre points A, B, B′ et C sont-ils coplanaires ?

   a. Prouver que le triangle ABC est rectangle.

   b. Calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un rectangle.

2. **a.** Démontrer que les trois points A′, B′ et C′ ne sont pas alignés.

   b. Les plans (ABC) et (A′B′C′) sont-ils sécants ou parallèles ? Justifier votre réponse.

3. **a.** Calculer les longueurs des segments [AB], [BC] et [AA′] notées respectivement l_0, l_1 et l_2.

   b. Les nombres l_0, l_1 et l_2 sont-ils les trois premiers termes d'une suite arithmétique ? Si oui, donner la raison.

   c. Les nombres l_0, l_1 et l_2 sont-ils les trois premiers termes d'une suite géométrique ? Si oui, donner la raison.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi : [2\ ;\ 20] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \mapsto x - 2 - 2\ln(x).$$

1. Étudier les variations de la fonction φ puis dresser son tableau de variation.
2. Montrer que la fonction φ s'annule exactement une fois sur l'intervalle [2 ; 20]. Indiquer la valeur arrondie à une décimale de ce nombre.
3. En déduire le signe de la fonction φ sur l'intervalle [2 ; 20] et récapituler ces résultats dans un tableau.

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthogonal, les unités graphiques étant 1 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.
Soit f la fonction définie par :

$$f : [2\ ;\ 20] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{x\ln(x)}{x-2}.$$

$(\mathscr{C})$ désigne la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni de ce repère.

1. **a.** Montrer que la dérivée f' de f a le même signe que φ sur]2 ; 20].

   b. étudier les variations de la fonction f, déterminer la limite de f en 2 puis dresser le tableau de variation de cette fonction.

2. Prouver qu'il existe un unique point de la courbe $(\mathscr{C})$ où la tangente à la courbe en ce point est parallèle à l'axe des abscisses.
3. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie C

Soit g la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} g : & [2\,;\,20] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}x^2 - 2x\ln(x). \end{array}$$

1. Montrer que g est une primitive de φ sur $[2\,;\,20]$.
2. Soit I le nombre défini par :

$$\mathrm{I} = \int_{16}^{20} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

   a. Exprimer le nombre I uniquement à l'aide de nombres entiers et des deux nombres $\ln 2$ et $\ln 5$.

   b. Donner la valeur de I arrondie à deux décimales.

Baccalauréat ES Amérique du Nord juin 2001

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice les probabilités demandées seront données sous forme décimale, éventuellement arrondies à 10^{-3} près.

Lors d'une enquête réalisée par l'infirmière auprès d'élèves de classes de terminale, on apprend que 60 % des élèves sont des filles. De plus 40 % des filles et 30 % des garçons fument.

1. On choisit un élève au hasard. On note A l'évènement « L'élève choisi fume », et P(A) la probabilité de cet évènement.

On note F l'évènement : « L'élève choisi est une fille ».

Quelle est la probabilité que :

- **a.** Cet élève soit un garçon ?
- **b.** Cet élève soit une fille qui fume ?
- **c.** Cet élève soit un garçon qui fume ?

2. Déduire des questions précédentes, en le justifiant, que $P(A) = 0,36$.

3. L'enquête permet de savoir que :

- Parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument ;
- Parmi les élèves non fumeurs, 65 % ont des parents non fumeurs.

On note B l'évènement : « L'élève choisi a des parents fumeurs ».

On notera P(C/D) la probabilité de l'évènement C sachant l'évènement D. Dans cette question, on pourra s'aider d'un arbre pondéré.

- **a.** Calculer les probabilités $P(A \cap B)$ et $P\left(\overline{A} \cap B\right)$. En déduire P(B).
- **b.** Calculer P(A/B), probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents fumeurs.

  Calculer $P\left(A/\overline{B}\right)$, probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs.

  Quelle remarque amène la comparaison de ces deux résultats ?

4. On rappelle que, pour chaque élève choisi, la probabilité qu'il soit fumeur est égale à 0,36. On choisit quatre élèves de terminale au hasard. On admettra que la population d'élèves de terminale est suffisamment grande pour que le choix d'élèves au hasard soit assimilé à un tirage avec remise.

Quelle est la probabilité qu'aucun de ces quatre élèves ne soit fumeur ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans tout l'exercice les sommes seront données arrondies au franc le plus proche.

Un directeur du personnel propose à l'un de ses employés de choisir entre deux formes d'augmentation de salaire.

Sachant que son salaire actuel est de 6 000 F par mois, il lui propose soit une augmentation régulière de 55 F tous les mois (première proposition), soit une augmentation de 0,8 % tous les mois (deuxième proposition).

1. On se place dans le cadre de la première proposition et on note M_n le salaire en francs au bout de n mois.

- **a.** Vérifier que M_1 est égal à 6 055. Montrer que la suite (M_n) définie pour tout entier naturel n est une suite arithmétique dont on donnera la raison.

b. Donner l'expression de M_n en fonction de n.

c. Calculer M_{12}, M_{24}, M_{36}, M_{48}.

2. On se place dans le cadre de la deuxième proposition et on note M'_n le salaire en francs au bout de n mois.

a. Montrer que la suite (M'_n) définie pour tout entier naturel n est une suite géométrique de raison 1,008. Calculer M'_1.

b. Donner l'expression de M'_n en fonction de n.

c. Calculer $M'_{12},\ M'_{24},\ M'_{36}, M'_{48}$.

3. Quelle proposition permet d'obtenir le meilleur salaire mensuel au bout de trois ans ?

4. Avant de choisir une des deux propositions, le salarié compare la somme des salaires perçus. Pour la proposition 1, on note S_n la somme des salaires sur les n premiers mois, de M_1 à M_n.

Pour la proposition 2, on note S'_n la somme des salaires sur les n premiers mois.

a. Exprimer S_n et S'_n en fonction de n.

b. Calculer $S_{36},\ S_{48},\ S_{60}$ et $S'_{36},\ S'_{48},\ S'_{60}$.

c. Le salarié pense rester encore cinq ans dans l'entreprise. S'il s'intéresse au montant total des salaires perçus, quelle proposition va-t-il choisir ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un client dispose d'un capital de 20 000 F sur un compte bancaire. Ce capital ne lui rapporte pas d'intérêt et il l'utilise de la façon suivante :
- chaque début de mois, il retire 10 % de son capital ;
- le dernier jour de chaque mois il reverse 1 000 francs sur ce compte.

L'exercice a pour but de comprendre l'évolution de son capital.

1. On appelle C_0 le capital détenu au 31 décembre 2000 et C_n le capital détenu au bout de n mois, ces sommes étant exprimées en francs.

a. Vérifier que $C_1 = 19000$ et que $C_2 = 18100$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $C_{n+1} = 0,9C_n + 1000$.

c. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $C_n > 10000$. En déduire le signe de $C_{n+1} - C_n$, puis le sens de variation de la suite (C_n).

2. On considère la suite (U_n) définie par $U_n = C_n - 10000$.

a. Montrer que la suite (U_n), définie pour $n > 0$, est une suite géométrique dont on précisera le premier terme U_0 et la raison.

b. En déduire l'expression générale de U_n en fonction de n. Montrer que $C_n = 10000(0,9^n + 1)$.

c. Quelle est la limite de la suite (C_n) ?

d. Calculer la valeur de C_{12} arrondie au centime le plus proche. En déduire la somme totale qui a été retirée du compte durant l'année 2001.

PROBLÈME **10 points**

Étude d'une série statistique

Partie A

Le nombre d'utilisateurs de téléphone portable en France est donné par le tableau suivant :

Mois	12/ 1996	10/ 1997	05/ 1998	10/ 1998	02/ 1999	07/ 1999	09/ 1999	03/ 2000
Rang x_i	0	10	17	22	26	31	33	39
Millions d'utilisateurs y_i	2,5	4,5	7,2	9,4	12	15	16,2	22,6

*L*es calculs seront effectués avec la calculatrice, aucun détail de ces calculs n'est demandé.

1. **Réalisation d'un ajustement affine**
   - **a.** Représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans un repère orthogonal où 1 cm représente quatre mois sur l'axe des abscisses, 1 cm représente 1 million d'utilisateurs sur l'axe des ordonnées.
   - **b.** Donner la valeur approchée à 10^{-3} près par défaut du c ?fficient de corrélation linéaire de la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.
     Un ajustement affine est-il justifié ?
   - **c.** Placer le point moyen G de cette série $(x_i\ ;\ y_i)$, après avoir déterminé ses coordonnées.
   - **d.** Donner l'équation de la droite (D) de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$, a et b étant arrondis à 10^{-2} près. Tracer cette droite (D) sur le graphique précédent.
2. **Réalisation d'un autre ajustement**
   On considère le tableau suivant :

Mois	12/ 1996	10/ 1997	05/ 1998	10/ 1998	02/ 1999	07/ 1999	09/ 1999	03/ 2000
Rang x_i	0	10	17	22	26	31	33	39
$z_i = \ln(y_i)$	$\ln(2,5)$	$\ln(4,5)$	$\ln(7,2)$	$\ln(9,4)$	$\ln(12)$	$\ln(15)$	$\ln(16,2)$	$\ln(22,6)$

   Soit la série statistique $(x_i\ ;\ z_i)$, où $z_i = \ln(y_i)$.
   - **a.** On admet qu'une équation de la droite de régression de z en x, obtenue par la méthode des moindres carrés, est $z = 0,056x + 0,961$, avec $z = \ln(y)$.
     Exprimer y en fonction de x. Mettre y sous la forme $y = \alpha\mathrm{e}^{0,056x}$.
     Donner la valeur décimale de α arrondie à 10^{-1} près.
   - **b.** Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,50]$ par $g(x) = 2,6\mathrm{e}^{0,056x}$. En vous aidant de la calculatrice, tracer avec soin et sans justification la courbe représentative (C) de la fonction g sur le graphique précédent, pour x compris entre 0 et 50.
3. À partir du graphique, quel ajustement semble être le meilleur ?

Partie B

On se propose de comparer par le calcul les deux ajustements. Pour cela on considère les fonctions f, g et h définies sur l'intervalle $[0\,;\,50]$ par

$$f(x) = 0,5x + 0,08\ ;\ g(x) = 2,6\mathrm{e}^{0,056x}\ ;\ h(x) = g(x) - f(x).$$

1. Résoudre l'inéquation $g(x) > 35$. En déduire l'année et le mois à partir desquels il y aura, d'après le second modèle, plus de 35 millions d'utilisateurs de téléphone portable en France.
2. - **a.** Soit h' la fonction dérivée de la fonction h.
     Montrer que $h'(x) = 0,1456\mathrm{e}^{0,056x} - 0,5$.
   - **b.** Résoudre l'équation $h'(x) = 0$. On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi entier, de la solution x_0 de cette équation.

c. Justifier le signe de $h'(x)$, puis établir le tableau de variation de h sur l'intervalle $[0\,;50]$. On donnera les valeurs arrondies à 10^{-2} près de $h(0)$, $h(x_0)$, $h(50)$. Pour calculer $h(x_0)$, on remplacera x_0 par son arrondi entier.

d. En remarquant que $h'(x) = g'(x) - f'(x)$, montrer que $g'(x_0) = 0,5$.

e. Soit (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse x_0. Que dire des droites (T) et (D) ? Tracer la droite (T).

f. Que représente la valeur x_0 lorsqu'on compare les fonctions f et g considérées dans chacun des deux ajustements ?

3. **a.** En utilisant les variations de h, démontrer que la fonction h s'annule pour deux valeurs x_1 et x_2 de l'intervalle $[0\,;50]$.

b. Encadrer x_1 par deux entiers successifs. Faire de même pour x_2.

c. Placer les valeurs x_1 et x_2 sur le graphique. Que représentent ces valeurs lorsqu'on compare les fonctions considérées dans les deux ajustements ?

Baccalauréat ES Antilles – Guyane juin 2001

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

À partir des productions réalisées pour l'année 2000, on veut comparer les résultats prévisibles de deux entreprises A et B jusqu'en 2015.

1. La production de l'entreprise A pour l'année 2000 est de 11 000 pièces. Chaque année, sa production augmente de 3 %.
   a. Quelle est sa production en 2001 ? en 2002 ? en 2015 ? (Donner les résultats arrondis à l'entier.)
   b. Quel est le pourcentage d'augmentation de la production de 2000 à 2015 ? (Résultat arrondi à 0,1 près.)
   c. Exprimer en fonction de n la production de l'entreprise A en l'an $(2000 + n)$ (n entier $0 \leqslant n \leqslant 15$).
2. L'entreprîse B a produit 9 000 pièces en 2000, et sa production augmente de 5 % par an.
   a. Quelle est sa production en 2015 ?
   b. Exprimer en fonction de n la production de l'entreprise B en l'an $(2000 + n)$ (n entier $0 \leqslant n \leqslant 15$).
   c. Déterminer l'entier n tel que en l'an $2000 + n$, la production de l'entreprise B dépasse pour la la première fois, la production de l'entreprise A.

EXERCICE 2 **4 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule :
- si elle est rouge, il gagne 10 F ;
- Si elle est jaune, il perd 5 F ;
- Si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir replacé la première boule tirée. Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 F, sinon il perd 4 F.

1. Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu.
2. Calculer la probabilité de l'évènement « le joueur est gagnant ».
3. Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur (une perte est comptée négativement).
   a. Établir la loi de probabilité de la variable X.
   b. Calculer l'espérance de X.
4. Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de X soit nulle.

EXERCICE 2 **4 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

La courbe de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln x.$$

est donnée en annexe.
On considère la suite (u_n) à termes strictement positifs définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 7 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$$

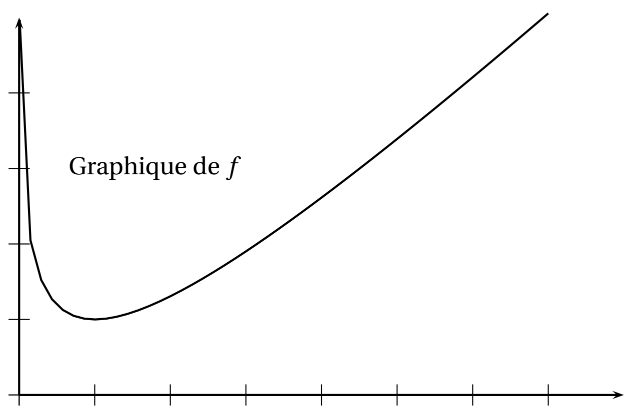
Partie I

1. Au moyen du graphique donné en annexe, déterminer le minimum de f sur $]0 ; +\infty[$ et en déduire que pour tout entier naturel n, on a u_n?1.
2. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n. Montrer que la suite (u_n) est monotone décroissante.

Partie II

1. Construire dans le repère de la courbe (C) donné en annexe la droite (D) d'équation $y = x$.
2. En vous aidant de la droite (D), représenter sur l'axe des abscisses du graphique ci-dessous les cinq premiers termes de la suite (u_n).
3. Quelle conjecture peut-on faire en ce qui concerne la limite de la suite (u_n) ?

Annexe à rendre avec la copie



PROBLÈME **12 points**

Le but de ce problème est l'étude de deux fonctions qui modélisent les importations et les exportations de l'entreprise E.

Partie A

⋆ **Étude de fonctions**

Les fonctions f et g sont définies sur $[0 ; \infty[$ par :

$$f(x) = \frac{36}{8 + e^{-x}} \quad \text{et} \quad g(x) = 2\ln(x+1) + 2,5.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm).

1. **a.** Étudier les variations de f et de g.
   b. Calculer les limites de f et de g en $+\infty$.

2. Représenter graphiquement ces deux fonctions. On nommera leurs courbes respectivement $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et $\left(\mathscr{C}_g\right)$, et on se limitera aux valeurs de x entre 0 et 6.
3. Recopier et compléter le tableau suivant, avec des valeurs numériques arrondies à 10^{-2} près.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$				4,47			
$g(x)$		3,89					

Partie B

$\star$ **Étude de la fonction $g-f$**
On pose $h = g - f$.
Le but de cette question est d'étudier le signe de $h'(x)$ afin d'établir le tableau des variations de h sur $[0\,;\,\infty[$.

1. Calculer la dérivée h' de h.
2. **a.** Vérifier que $\mathrm{e}^x.h'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{x+1} - \dfrac{36}{\left(8+\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$.

   b. On rappelle que pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[,\ \mathrm{e}^x > x+1$.
   Établir l'inégalité $\left(8+\mathrm{e}^{-x}\right)^2 \geqslant 64$.
   En utilisant successivement ces deux résultats, établir que

   $$\mathrm{e}^x h'(x) \geqslant \frac{2\mathrm{e}^x}{x+1} - \frac{9}{16} \quad \text{et que} \quad \mathrm{e}^x h'(x) \geqslant 2 - \frac{9}{16}.$$

   c. Établir le tableau de variation de h.

   d. Montrer que $h(x)$ s'annule pour une seule valeur x_0 comprise entre 0 et 6.
   Déterminer un encadrement de x_0 de largeur 10^{-2}.

Partie C

$\star$ **Application**

Notations : x désigne le temps en années. On pose $x = 0$ au 1er janvier 2000.
Pour l'entreprise E, $f(x)$ désigne le montant, en millions de francs, des achats pour l'année x et $g(x)$ désigne le montant, en millions de francs, de ses ventes.

1. Quel est le montant des achats et des ventes de cette entreprise à la fin de l'année 2000 ?
2. À partir d'une certaine date, les ventes l'emportent sur les achats.

   a. Déterminer l'année au cours de laquelle les ventes l'emportent sur les achats.

   b. Indiquer alors le rang de la semaine.

Baccalauréat ES Asie juin 2001

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Dans une kermesse, un jeu est organisé de la façon suivante : le joueur mise 10 francs puis il réalise un tirage en deux étapes :
1re étape : Le joueur tire au hasard un billet dans un panier. Dans ce panier, on a placé 10 billets marqués « U_1 » et 2 billets marqués « U_2 ».
2e étape :
- Si le joueur a obtenu un billet marqué « U_1 », il tire alors un jeton dans une urne U_1 où sont placés 10 jetons marqués « Perdant » et 2 jetons marqués « Gagnant ».
- Si le joueur a obtenu un billet marqué « U_2 », il tire alors un jeton dans une urne U_2 où sont placés 7 jetons marqués « Perdant » et 5 jetons marqués « Gagnant ».
On note A l'évènement : Le joueur a tiré un billet « U_1 ».
On note B l'évènement : Le joueur a tiré un billet « U_2 ».
On note G l'évènement : Le joueur a tiré un jeton marqué « Gagnant ».
Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Construire un arbre pondéré qui décrit ce jeu.
2. Calculer la probabilité des évènements $(G \cap A)$ et $(G \cap B)$.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\dfrac{5}{24}$.
4. Quelle est la probabilité conditionnelle de l'évènement A par rapport à l'évènement G ?

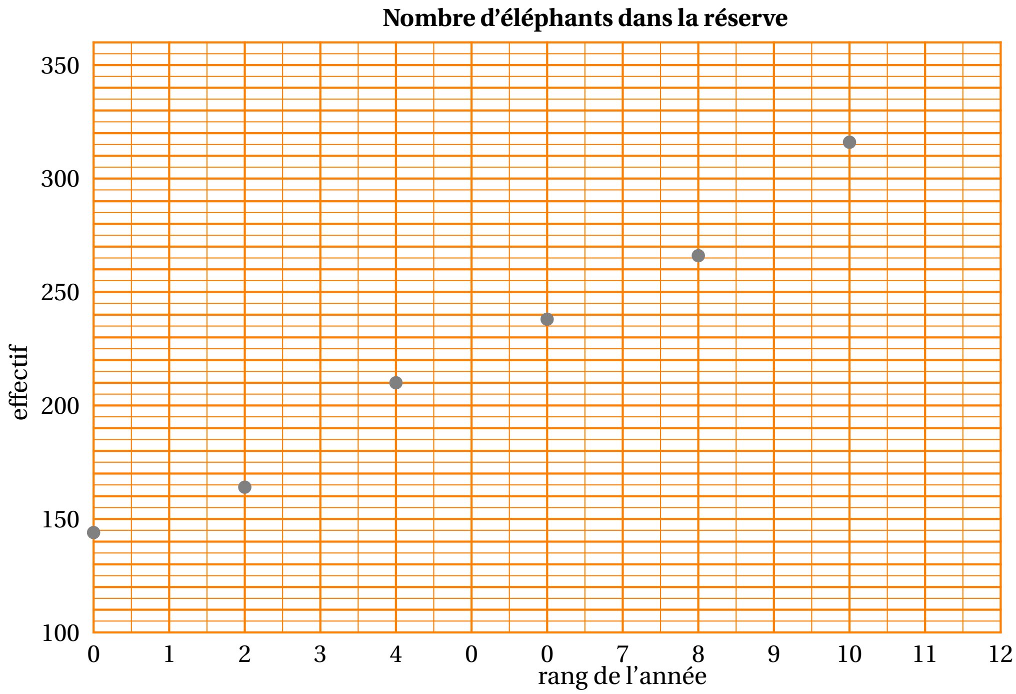
   Les évènements A et G sont-ils indépendants en probabilité ?
5. Avec un jeton gagnant de l'urne U_1, le joueur reçoit 25 F ; avec un jeton gagnant de l'urne U_2, il reçoit 50 F ; sinon rien. On notera X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue du jeu.
   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b. Établir la loi de probabilité de X.
   c. Déterminer son espérance mathématique.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le tableau suivant représente l'évolution du nombre d'éléphants dans une réserve, à partir de sa création en 1988 :

Année	1988	1990	1992	1994	1996	1998
Rang de l'année : x_i	0	2	4	6	8	10
Effectif : y_i	144	164	210	238	266	316

Le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé à cette série statistique est représenté en annexe.
Ce dernier document sera complété au fur et à mesure et rendu avec la copie.
L'objet de l'exercice est de faire des prévisions sur l'effectif de la population d'éléphants de cette réserve pour l'année 2000.
Ces prévisions seront arrondies à l'entier le plus proche.
Aucun détail des calculs statistiques, à effectuer à la calculatrice, n'est demandé dans cet exercice. Les coefficients des équations de droites seront arrondis au centième.



Partie A

1. Un premier ajustement affine du nuage de points est réalisé avec la droite $\Delta_1 = (M_0M_{10})$.

   a. Tracer sur le graphique de l'annexe cette droite Δ_1.

   b. Au moyen d'une lecture graphique, déduire une prévision p_1 de l'effectif pour l'année 2000.

Partie B

On désigne par (Δ_2) la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

1. Donner une équation de (Δ_2) et tracer cette droite sur le graphique joint en annexe.
2. Calculer la nouvelle prévision p_2 pour l'effectif en l'an 2000.

Partie C

L'effectif pour l'année 1999 est maintenant connu : 336 éléphants.

1. Placer le nouveau point sur le graphique.
2. On intègre cette valeur dans la série statistique initiale.

   a. Donner l'équation de la nouvelle droite (Δ_3) de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

   b. Calculer la prévision correspondante p_3 pour l'effectif en l'an 2000.

Partie D

On ne garde dans le tableau que les valeurs des années 1994 à 1999.

1. Donner l'équation de la droite (Δ_4) de régression de y en x.
2. Calculer la nouvelle prévision p_4 pour l'an 2000.

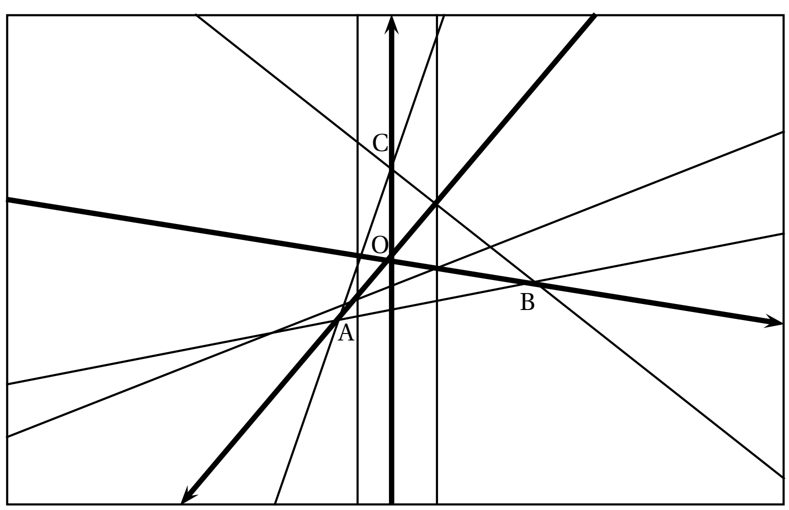
EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormal.
Représenter ce repère sur votre copie en prenant pour unité sur chaque axe 2 cm.
La qualité de cette représentation sera prise en compte. Le candidat pourra s'aider du graphique donné en annexe.

1. On donne le plan (P) d'équation $2x+2y+3z=6$.
   a. Déterminer les coordonnées des points A, B, C intersections du plan (P) avec les axes du repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
   b. Tracer les droites d'intersection du plan (P) avec les plans de coordonnées du repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
2. On considère le plan (Q) d'équation $x+2y=2$.
   a. Déterminer les coordonnées des points d'intersections du plan (Q) avec les axes du repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, quand ceux-ci existent.
   b. Tracer les droites d'intersection du plan (Q) avec les plans de coordonnées du repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
   c. Tracer l'intersection des deux plans (P) et (Q).
3. On donne les points D(1 ; 0 ; 0), E(0 ; −4 ; 0) et F(0 ; 0 ; 4).
   a. Déterminer une équation du plan (R) qui contient les points D, E, F.
   b. Calculer les coordonnées du point G, intersection des trois plans (P), (Q) et (R).

Annexe



PROBLÈME **10 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 3 + \mathrm{e}^{(-x+2)}.$$

On notera $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentation de f dans un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ orthonormal.
On prendra pour unité graphique 1 cm sur chaque axe.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer l'existence d'une droite (D) asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$. Donner une équation de (D).
3. Étudier les variations de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$.
4. **a.** Tracer la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère défini plus haut.
   b. En utilisant le graphique, indiquer le nombre de solutions de l'équation E : $f(x) = 8$.
   Donner une valeur approchée de ces solutions avec la précision permise par le graphique.
5. Justifier que sur l'intervalle $[2~;~6]$, l'équation E admet une solution unique α, dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
6. On appelle M la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1~;~9]$.
   Calculer M, en donner une valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Partie B

Une entreprise industrielle produit chaque jour x centaines d'objets $(1 < x < 20)$.
Le coût de fabrication de x centaines d'objets est donné par $f(x)$ exprimé en milliers de francs.

1. Calculer le coût de fabrication de 600 objets, 1 000 objets, 1 200 objets, arrondi au franc.
   Quel est, dans chacun de ces cas, le coût arrondi au franc de fabrication d'un objet ?
2. Quelle quantité d'objets doit-on fabriquer pour que le coût de fabrication soit le plus proche possible de 8 000 F ?
3. Montrer que le coût de fabrication est minimal lorsque l'entreprise fabrique une quantité q_0 d'objets. Donner la valeur de q_0.
   Quel est alors le coût, en francs, de fabrication d'un objet ?

Baccalauréat ES Centres étrangers juin 2001

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous donne le taux d'équipement en lave-vaisselle des ménages français, de 1975 à 1993.

Année	1975	1980	1985	1990	1993
x_i : rang de l'année	0	5	10	15	18
y_i : taux en %	$8,4$	$16,5$	$23,1$	$30,0$	$33,6$

(Source : INSEE)

Par exemple : 8,4 % des ménages français ont un lave-vaisselle en 1975.
Dans tout l'exercice, le détail des calculs n'est pas demandé. Les résultats pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice ; ils seront arrondis à 10^{-3} *près.*
Le plan est rapporté à un repère orthogonal (unité graphique : 0,5 cm par année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 3 % sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Représenter le nuage de points $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$. On utilisera une feuille de papier millimétré.

   b. Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série statistique et le placer sur le dessin précédent.

2. **a.** Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.
   Un ajustement affine est-il justifié ?

   b. Donner une équation de la droite de régression (D) de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Représenter (D) sur le dessin précédent.

3. On suppose dans cette question que le modèle obtenu à la question **2.** reste valable pour les années suivantes.

   a. Calculer le taux d'équipement en lave-vaisselle que l'on peut prévoir en 2002.

   b. En quelle année ce taux dépasserait-il 50 % ? Déterminer l'année par le calcul.
   Expliquer comment on peut retrouver graphiquement ce résultat.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une enquête est faite auprès des élèves d'un lycée. Elle révèle que 30 % d'entre eux sont allés le mois précédent au moins quatre fois au cinéma.

1. D'après cette enquête, quelle est la probabilité pour qu'un lycéen, pris au hasard, y soit allé au plus trois fois ?

2. On interroge trois élèves choisis au hasard et de manière indépendante.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves qui, parmi ces trois élèves, sont allés au moins quatre fois au cinéma le mois précédent.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X. On pourra utiliser un arbre pondéré.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X.

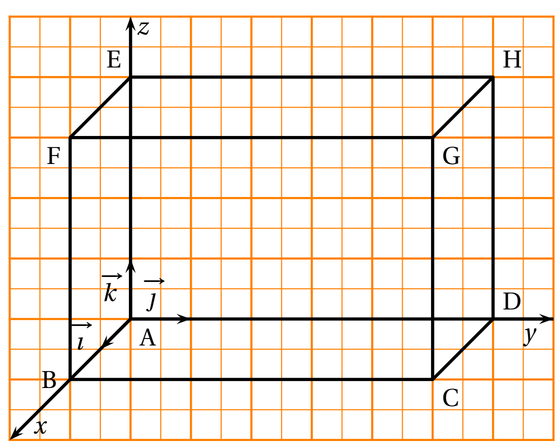
3. Soit F la fonction de répartition de X. Représenter graphiquement F dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm par unité en abscisse et 10 cm pour une unité en ordonnée).

Exercice 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

ABCDEFGH est un pavé défini par $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\vec{\imath}$; $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 6\vec{\jmath}$; et $\overrightarrow{AE} = 4\vec{k}$. I, J et K sont les milieux respectifs de [EF], [FB] et [ADI.

1. Placer les points I, J et K sur la figure donnée en annexe. Donner les coordonnées des points B, D et E. Puis vérifier par le calcul que I, J et K ont pour coordonnées respectives (1, 0, 4), (2, 0, 2) et (0, 3, 0).
2. Soit (P_1) le plan d'équation $y = 0$ et (P_2) le plan d'équation $2x + z = 6$.
   a. Donner un vecteur $\vec{n}_1$, normal au plan (P_1) et un vecteur $\vec{n}_2$ normal au plan (P_2).
   b. En déduire que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.
   c. Soit (Δ) l'intersection des deux plans (P_1) et (P_2).
   Montrer que (Δ) est la droite (IJ).
3. Soit $\vec{n}\,(2\,;2\,;1)$.
   a. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$
   b. En déduire que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK).
   c. Montrer alors que le plan (IJK) a pour équation $2x + 2y + z = 6$.
4. On considère le plan (P) d'équation $5x + y = 5$.
   a. Déterminer les coordonnées des points R et T, intersections du plan (P) avec les axes (Ax) et (Ay) respectivement.
   b. Vérifier que le point I appartient au plan (P).
   c. Sur la figure précédente, placer les points R et T, puis dessiner la trace du plan (P) sur le plan (xAy).



Problème **11 points**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)^2\mathrm{e}^{-x}.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A ⋆ Étude d'une fonction

1. Calculer la limite de f en - ∞.
2. **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x^2\text{e}^{-x} + 2x\text{e}^{-x} + \text{e}^{-x}$.

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$. (On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha}\text{e}^{-x} = 0$, pour tout réel α.)
   Quelle interprétation graphique peut-on en faire ?
3. Soit la fonction dérivée de f. Montrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \left(1 - x^2\right)\text{e}^{-x}.$$

4. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Résumer cette étude dans un tableau.
6. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[1 ; 3]$. Donner un encadrement décimal de x_0, d'amplitude 10^{-2}.
7. Construire dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, d'unité graphique 2 cm la courbe $(\mathcal{C})$, la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0, ainsi que les tangentes horizontales à la courbe $(\mathcal{C})$.

Partie B ⋆ Étude de la fonction inverse

1. Montrer que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
   Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g(x_0)$, où x_0 désigne le nombre défini à la question **6.** de la **partie A**.
3. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
4. Dresser le tableau des variations de la fonction g sur $[0 ; +\infty[$ en donnant les justifications nécessaires.

Partie C ⋆ Calcul d'aire

On considère la fonction F définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = (-x^2 - 4x - 5)\text{e}^{-x}.$$

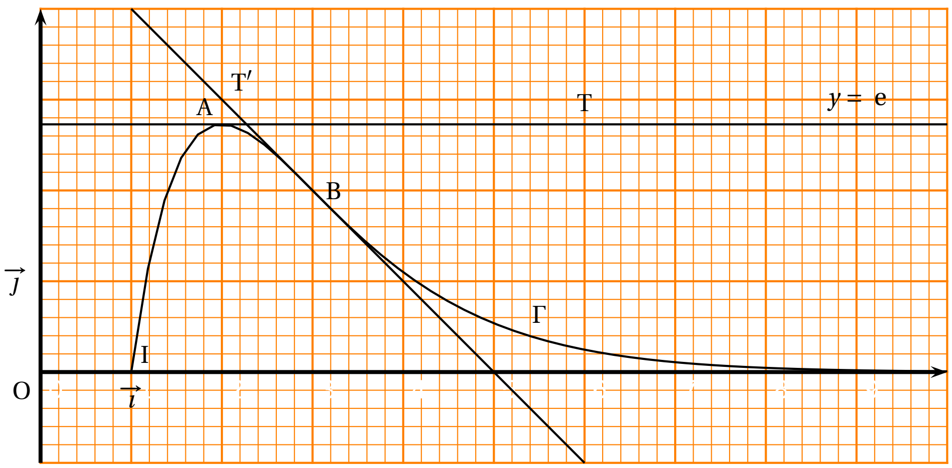
1. Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. On considère l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en cm^2 du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.
   Donner la valeur exacte de $\mathcal{A}$, puis une valeur approchée par défaut de $\mathcal{A}$ à 10^{-2} près.

∽ Baccalauréat ES Liban juin 2001 ∾

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Sur le document ci-dessous, le graphique est celui de la courbe Γ représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.



La courbe Γ passe par les points I(1 ; 0), A(2 ; e) et B(3 ; 2) où : e = exp (1). La droite T est tangente à Γ au point A et elle est parallèle à l'axe des abscisses.
La droite T′ est tangente à Γ en B et elle passe par le point de coordonnées (5 ; 0).
La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[2~;+~\infty[$.
L'axe des abscisses est asymptote à la courbe Γ.

1. À l'aide d'une lecture graphique :
   a. Donner les valeurs de $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, puis de $f'(2)$ et $f'(3)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.
   b. Déterminer une équation de la droite T′.
   c. Donner la limite de f en $+\infty$.
   d. Dresser le tableau de variations de f ; donner le signe de f sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.
2. La fonction g est définie, pour tout x de l'intervalle $[1~;~+\infty[$, par $g(x) = \ln(f(x)$.
   a. Donner les valeurs de $g(2)$, $g(3)$, puis de $g'(2)$ et $g'(3)$, où g' désigne la fonction dérivée de g.
   b. Déterminer les limites de g en 1 et en $+\infty$.
   c. Dresser en le justifiant le tableau de variations de g sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.
   d. En utilisant la courbe représentative Γ de la fonction f, donner une valeur approchée des solutions de l'équation $g(x) = 0$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Un jeu de société est composé d'un grand nombre de fiches qui proposent chacune trois questions indépendantes : la première porte sur la géographie, la seconde sur l'histoire et la troisième sur les arts. À tour de rôle, chaque joueur tire une fiche au hasard et doit répondre aux trois questions dans l'ordre où elles sont proposées.
Le meneur de jeu remplit un bulletin réponse :

G	H	A

dans lequel, pour chaque question, il reporte F si la réponse est fausse, J si elle est juste. Ainsi, si le joueur a bien répondu aux questions sur la géographie et sur les arts, mais n'a pas trouvé la bonne réponse à la question sur l'histoire, le bulletin réponse à cette fiche sera :

G	H	A
J	F	J

Le résultat sera noté : JFJ.

1. **a.** Donner la liste des huits résultats différents que l'on peut obtenir pour une fiche.

   b. À chaque bulletin réponse est attribuée une note : une réponse juste, J, fait gagner 5 points ; une réponse fausse ou l'absence de réponse, F, fait perdre 2 points.

   Donner la liste des résultats qui conduisent à un total de 8 points.

2. La probabilité que Marc donne la réponse juste à une question, qu'elle soit sur la géographie, sur l'histoire ou sur les arts, est de 0,6.

   Marc tire une fiche et répond aux trois questions.

   a. Quelle est la probabilité que Marc obtienne le bulletin réponse cité en exemple ci-dessus ?

   b. Montrer que la probabilité que son bulletin réponse conduise à une note de 8 points est 0,432.

3. On appelle X la variable aléatoire égale à la note obtenue par Marc pour un bulletin réponse.

   a. Préciser toutes les valeurs (positives ou non) prises par X.

   b. Établir la loi de probabilité de X.

   c. Calculer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Maud vise une cible avec une fléchette. La probabilité qu'elle atteigne la cible est $\dfrac{2}{3}$.

Les résultats des lancers successifs sont supposés indépendants.

1. Si Maud effectue cinq lancers successifs, quelle est la probabilité qu'elle atteigne exactement deux fois la cible ?

2. Maud et Paul décident de jouer des billes avec la règle du jeu suivante :

   - Maud mise des billes puis lance une fléchette.

   - Avant le premier lancer, Maud mise une bille.

   - À chaque lancer :

   • si elle rate la cible, elle perd sa mise que Paul récupère ; le jeu continue ; elle triple sa mise avant de lancer une nouvelle fléchette ;

   • si elle atteint la cible, elle récupère sa mise et Paul lui donne autant de billes que ce qu'elle vient de miser ; le jeu s'arrête.

   On suppose dans cette question que le jeu n'est pas limité par le nombre de billes.

   a. Soit a_n la mise de Maud avant le $n+1$ i-ème lancer. Ainsi $a_0 = 1,\ a_1 = 3$.

   Donner les valeurs de a_2 et a_3.

   Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

   En déduire la valeur de a_n en fonction de n.

b. Maud a raté la cible aux n premiers lancers : elle a donc perdu les mises $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{n-1}$.

Montrer qu'elle a perdu $\dfrac{1}{2}\left(3^n-1\right)$ billes depuis le début du jeu.

3. Lorsque Maud et Paul commencent le jeu défini dans le 2), ils ont chacun 160 billes.

a. Si Maud perd à toutes les parties successives, quel est le nombre k maximum de lancers qu'elle peut effectuer ?

b. Quelle est la probabilité que cette situation se réalise et que Maud atteigne la cible au k-ième lancer ?

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Le document ci-après est à compléter et à rendre avec la copie.
La fonction h est définie sur l'intervalle $[0\,;\,8]$ par :

$$h(x) = x^2 + \frac{16x}{2x+1} - 8\ln(2x+1).$$

1. Montrer que : $h'(x) = \dfrac{2x(2x+5)(2x-3)}{(2x+1)^2}$, h' désignant la fonction dérivée de h sur l'intervalle $[0\,;\,8]$.

2. Étudier les variations de h sur l'intervalle $[0\,;\,8]$.

3. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2}\,;\,8\right]$.

Déterminer une valeur approchée de α arrondie à 0,01 près.

4. Déduire des résultats précédents le signe de h sur l'intervalle $[0\,;\,8]$.

Partie B

La fonction M est définie sur l'intervalle $[0\,;\,8]$ par :

$$M(x) = x + \frac{8}{2x+1}.$$

La fonction C_{T} est la primitive de la fonction M sur l'intervalle $[0\,;\,8]$ qui s'annule pour $x = 0$. Calculer $C_{\text{T}}(x)$.

Partie C

Une entreprise produit une quantité variable x d'appareils (x est exprimé en milliers d'appareils) dont le coût marginal M est la fonction définie dans la **partie B.**. Dans la suite du problème, tous les coûts seront exprimés en milliers de francs.
On modélise le coût total de production de x milliers d'appareils, pour x appartenant à $\left[\dfrac{1}{4}\,;\,8\right]$ par la fonction C_{T} définie dans la **partie B**.

1. **a.** Vérifier que le coût moyen, par millier d'appareils, est défini sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{4}\,;\,8\right]$ par :

$$C_m(x) = x + 4\frac{\ln(2x+1)}{x}.$$

b. Calculer $C'_m(x)$, où C' désigne la fonction dérivée de C.

c. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $\left[\dfrac{1}{4}\ ;\ 8\right]$, $C'_m(x) = \dfrac{h(x)}{2x^2}$, où h est la fonction étudiée dans la **partie A.**.

d. Étudier les variations de la fonction C_m, et dresser son tableau de variations.

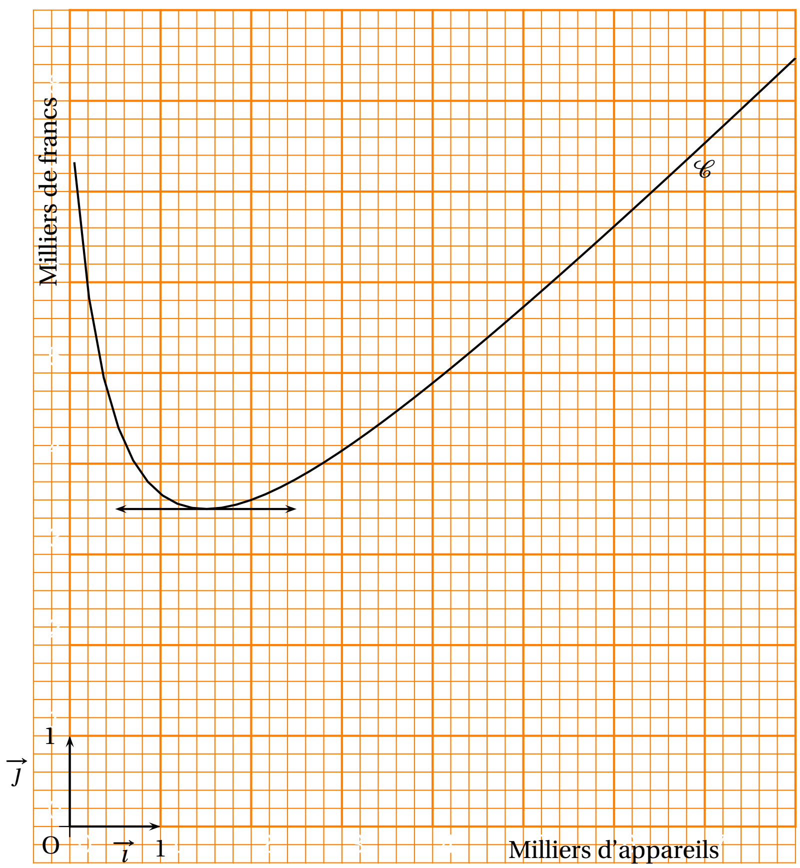
2. **a.** Pour quelle production, arrondie à la dizaine près, le coût moyen, par millier d'appareils, est-il minimum ?

b. Vérifier que, pour cette valeur approchée de la production, le coût moyen et le coût marginal ont la même valeur, à 5 francs près.

3. Le graphique donné ci-après est celui de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction M dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, où 2 cm représentent 1 000 appareils sur l'axe des abscisses et 2 cm représentent 1 000 F sur l'axe des ordonnées.

a. On note $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de la fonction C_m dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ précédent. Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ sur le document donné ci-après.

b. Par une lecture graphique que l'on expliquera, retrouver le résultat de la question **2. b.**.



∽ Baccalauréat ES Métropole juin 2001 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une université propose aux étudiants trois orientations et trois seulement : une filière A, une filière B et une filière C. Chaque étudiant de l'université est inscrit dans une des trois filières et une seule.
Les effectifs de la filière A sont le double de ceux de la filière B.
Les effectifs de la filière B sont le triple de ceux de la filière C.
On sait de plus que :
20 % des étudiants de la filière A sont des filles ;
30 % des étudiants de la filière B sont des filles ;
40 % des étudiants de la filière C sont des filles.
On choisit au hasard un étudiant de cette université.
On note A l'évènement « L'étudiant est inscrit dans la filière A ». De même pour B et C.
On note F l'évènement « L'étudiant est une fille » ;
G l'évènement : « L'étudiant est un garçon ».

1. Calculer les probabilités des évènements A, B, C ; on vérifiera que $p(\text{B}) = 0{,}3$.
2. Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A et soit une fille.

   Montrer que $p(\text{F}) = 0{,}25$.
3. Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A sachant que c'est une fille.
4. L'étudiant, choisi au hasard, n'est pas inscrit dansla filière A. Calculer alors la probabilité que ce soit une fille.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le prix de vente des terrains à bâtir dans la même commune rurale est donné par le tableau suivant :

Année	1980	1985	1987	1990	1995	1997	2000
Rang de l'année x_i	0	5	7	10	15	17	20
Prix du m^2 en francs y_i	58,8	60,9	62,1	67,5	71,7	73	73,8

1. Quelle est, en pourcentage, l'augmentation du prix du m^2 entre 1980 et 2000 ?
2. Représenter le nuage de points $M_i(x_i~;~y_i)$ dans un repère orthogonal où 5 cm représentent 10 ans en abscisse, 5 cm représentent 10 francs en ordonnée.
3. Déterminer le point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
4. Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $\left(x_i~;~y_i\right)$ à 0,01 près.

   On considère que ce coefficient justifie un ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Écrire une équation de la droite d'ajustement affine de y en x, notée (D) (les coefficients sont arrondis à 0,01).

   Tracer (D).
5. Estimer à 1 millier de francs près le prix d'un terrain de 1 500 m^2 en 2003.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un club de sport propose deux types d'abonnement non permutables.
Formule A : une cotisation annuelle de 500 F à laquelle s'ajoute la première année seulement un droit d'entrée de 10 000 F.
Formule B : une cotisation annuelle initiale de 1 000 F qui augmente de 10 % par an. Dès la seconde année, pour fidéliser la clientèle, on effectue une réduction de 50 F sur la cotisation annuelle. Si C, est le montant, exprimé en francs, de la cotisation annuelle la n-ième année, on a $C_1 = 1000$, et pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a $C_{n+1} = 1,1C_n - 50$.

1. Déterminer la somme T_n versée au club de sport par membre pendant n années avec la formule A.
2. Soit (D_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $D_n = C_n + \alpha$ où α est un réel.
   Déterminer le réel α pour que la suite (D_n) soit une suite géométrique de raison 1,1 et préciser le terme initial de la suite.
3. On suppose dans cette question que $\alpha = -500$.
   a. Exprimer D_n puis C_n en fonction de n.
   b. Soit S_n la somme versée au club par un membre pendant n années avec la formule B.
      Montrer que $S_n = 5000\,[(1,1)^n - 1] + 500n$.
   c. Quel nombre minimum d'années un membre doit-il cotiser pour que la formule A soit plus avantageuse que la formule B ?

PROBLÈME **11 points**

On donne les fonctions f et g, définies sur $[1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 1,1x + \ln x - \ln(x+1), \quad g(x) = 1,1x + \frac{1}{x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

Partie A

1. Étudier les variations de f sur $[1\,;\,+\infty[$.
   Trouver la limite en $+\infty$ de $\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.
   En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 1,1x$ est une asymptote de la courbe $(\mathscr{C})$. Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D).
3. Tracer $(\mathscr{C})$ et (D).

Partie B

1. Étudier les variations de g sur $[1\,;\,+\infty[$ et la limite de g en $+\infty$.
2. Vérifier que la droite (D) est une asymptote de la courbe $(\mathscr{C}')$.
   Quelle est la position de $(\mathscr{C}')$ par rapport à (D) ?
3. Tracer $(\mathscr{C}')$ dans le même repère que $(\mathscr{C})$ et (D).
4. On pose $H(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln x$, pour tout x de $[1\,;\,+\infty[$.
   Calculer $H'(x)$; en déduire une primitive sur $[1\,;\,+\infty[$ de la fonction $i\ :\ x \mapsto g(x) - f(x)$.

5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^5 \left[g(x) - f(x)\right]\,\mathrm{d}x$.

En donner une interprétation graphique.

Partie C

Les fonctions f et g données plus haut modélisent respectivement la quantité d'objets produits par une entreprise et la quantité d'objets commandés à cette entreprise.
Plus précisément, si t est la date exprimée en semaines, $f(t)$ est la quantité d'objets produits à la date t en milliers et $g(t)$ la quantité d'objets commandés à cette même date en milliers.

1. Lorsque l'on a $f(t) > g(t)$, on dit que « la demande est satisfaite à la date t ».
   Démontrer que la demande n'est jamais satisfaite.
2. On admet que le nombre total d'objets, en milliers, dont la demande n'est pas satisfaite entre les dates n et n' avec $n' > n$ est donné par $\displaystyle\int_n^{n'} \left[g(t) - f(t)\right]\,\mathrm{d}t$.
   Donner, à un objet près, le nombre total d'objets dont la demande n'est pas satisfaite entre les dates 1 et 5.
3. On considère que « le niveau de fabrication est suffisant » lorsque moins de 20 demandes d'objets ne sont pas satisfaites, c'est-à-dire lorsque l'on a : $g(t) - f(t) < 0,02$.
   En admettant que $g - f$ est une fonction strictement décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$, à partir de quelle date le niveau de fabrication est-il suffisant ?

∽ Baccalauréat ES Polynésie juin 2001 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Toutes les réponses aux questions posées devront être soigneusement justifiées.

La courbe ($\mathscr{C}$) donnée sur l'annexe est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur [- 3 ; 3] dans un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. La courbe ($\mathscr{C}$) vérifie les quatre conditions suivantes :

• elle passe par l'origine O du repère et par le point A(- 3 ; 9) ;

• elle admet au point B d'abscisse 1 une tangente horizontale et elle admet la droite (OA) pour tangente en 0.

1. Quel est le coefficient directeur de la droite (OA) ?
2. L'un des trois schémas numérotés 1, 2 et 3 donnés en annexe est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de la fonction f. Indiquez le numéro de ce schéma en précisant les raisons de votre choix.
3. On suppose que f est définie sur [- 3 ; 3] par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ où } a,~b,~c,~d \text{ sont des réels.}$$

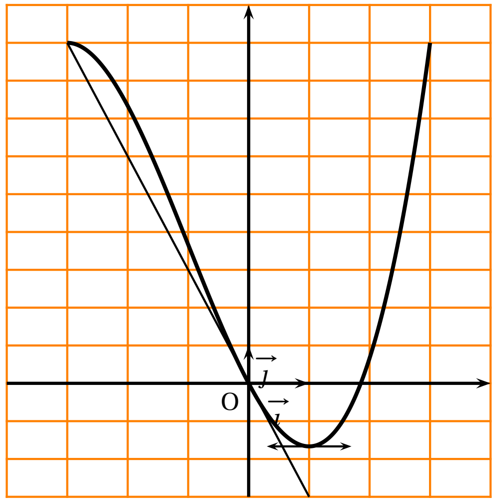
   a. Montrer en utilisant les quatre conditions de départ que :

$$a = \frac{1}{3},~b = 1,~c = -3,~d = 0.$$

   b. On désigne par f'la fonction dérivée de la fonction f. Factoriser $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f sur$[-3~;~3]$.

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle [1 ; 2] et déterminer l'arrondi à une décimale de α.

Annexe



Courbe ($\mathscr{C}$) de f

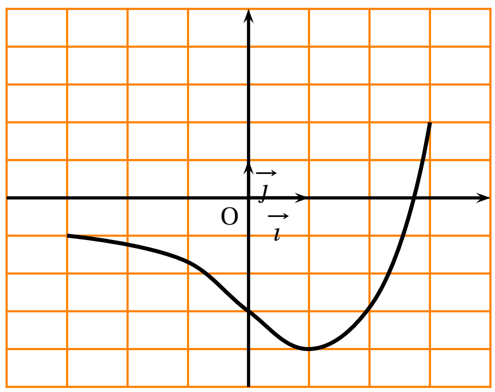


Schéma 1

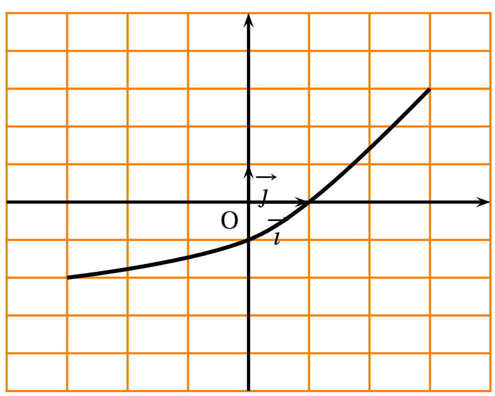


Schéma 2

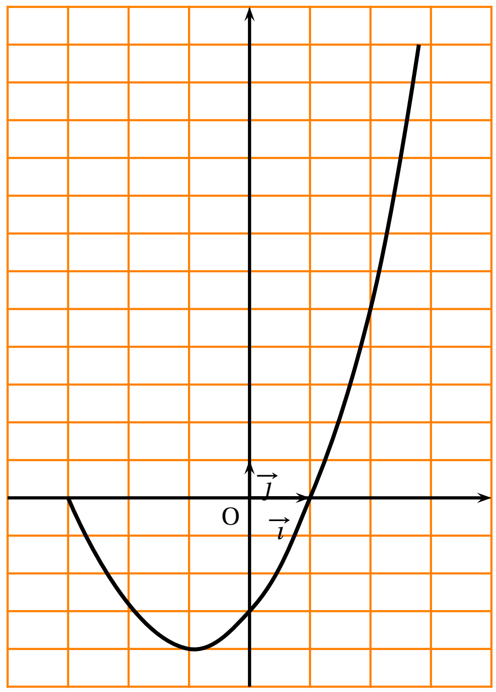


Schéma 3

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour tous évènements A et B on note :

- $\overline{\text{A}}$ l'évènement contraire de A ;
- P(A) la probabilité de l'évènement A ;
- P(A/B) ou P_B(A) la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

Les résultats seront donnés sous forme défraction irréductible.

Un club de tennis comporte 500 adhérents : 300 hommes et 200 ferames. Le tennis en compétition est pratiqué par 90 hommes et 40 femmes. Les autres adhérents pratiquent ce sport uniquement pour le loisir. On choisit au hasard un adhérent. On note :

- H l'évènement : « L'adhérent est un homme » ;
- F l'évènement : « L'adhérent est une femme » ;
- C l'évènement : « L'adhérent pratique la compétition ».

1. **a.** Calculer les probabilités P(H), P(F) et P_F(C)

b. Décrire l'évènement C $\cap$ F et calculer sa probabilité.

c. Justifier l'égalité suivante : $\text{P(C)} = \dfrac{13}{50}$.

d. L'adhérent choisi pratique la compétition. Quelle est la probabilité que cet adhérent soit une femme ?

2. Chaque adhérent doit payer une cotisation annuelle de 3 000 F s'il pratique le tennis en compétition et de 2 500 F dans le cas contraire. De plus, pour la saison 2000-2001 une réduction exceptionnelle de 10 % est consentie aux femmes pratiquant la compétition.

On appelle X la variable aléatoire égale au montant de la cotisation payée par l'adhérent choisi pour la saison 2000-2001.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Monsieur A emprunte 40 000 F à un taux de 5 %. Il désire effectuer chaque année, à la date anniversaire de l'obtention du prêt, des remboursements constants de 6 000 F, sauf éventuellement la dernière année où le remboursement pourra être moindre. Ces 6 000 F comprennent le remboursement des intérêts sur le capital dû et un amortissement du capital.
Le but de l'exercice est de déterminer le nombre p d'années nécessaires pour effectuer le remboursement de ce prêt.
Pour tout entier naturel n, on désigne par C_n le capital, exprimé en francs, restant dû après le n-ième remboursement. On a donc : $C_0 = 40000$ et $C_1 = 36000$.

1. **a.** Montrer que $C_2 = 31800$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n tel que $0 \leqslant n < p$, l'égalité suivante est vraie :
   $$C_{n+1} = 1,05C_n - 6000.$$
2. Pour tout entier naturel n tel que $0 \leqslant n < p$ on pose $U_n = C_n - \alpha$ où α est un réel.
   a. Déterminer α pour que les nombres U_n soient les termes successifs d'une suite géométrique de raison 1,05 dont on déterminera le premier terme.
   b. En déduire, dans ce cas, l'expression de U_n en fonction de n, puis celle de C_n en fonction de n.
3. Déterminer le plus petit entier n tel que $C_n < 6000$.
   On appelle cet entier n_0. Calculer alors C_{n_0}, et le montant du $(n_0 + 1)$-ième remboursement. Quelle a donc été la durée p du remboursement ? Quel est le montant du remboursement total ? (Les résultats seront arrondis au centime.)

PROBLÈME **10 points**

Partie A
⋆ Étude de deux fonctions

On considère deux fonctions f et g définies sur $[0~;~+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{2e^x + 1}{3} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{8}{2e^x - 1}.$$

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f sur $[0~;~+\infty[$.
2. **a.** Déterminer la limite de g en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
   b. Étudier les variations de g sur $[0~;~+\infty[$.
   c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0~;~+\infty[$.
3. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f et par (Γ) celle de g, dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ [unité graphique 2 cm].
   a. Déterminer par le calcul les coordonnées du point I commun à $(\mathscr{C})$ et à (Γ).
   b. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
   c. Tracer (T), $(\mathscr{C})$ et (Γ) dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Faire figurer le point I sur le schéma.

4. **a.** Montrer que $g(x) = -8+16\dfrac{\text{e}^x}{2\text{e}^x - 1}$ sur $[0\,;\,+\infty[$. En déduire une primitive G de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

   b. On considère l'ensemble des points du plan situés entre (Γ), l'axe $x'x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 5$. Hachurer sur le graphique cette partie du plan et calculer son aire en cm^2. On en donnera une valeur exacte, puis l'arrondi du résultat à 10^{-2}.

Partie B

$\star$ **Application économique**

1. *Prix d'équilibre*

   Les fonctions f et g précédemment définies dans la **partie A** sont les fonctions d'offre et de demande de la vente d'un produit liquide sur un marché.

   Plus précisément :

   • $f(v)$ est le prix de vente unitaire proposé par les producteurs du secteur pour un volume v de ce produit ;

   • $g(v)$ désigne le prix unitaire accepté par les consommateurs pour la même quantité v de ce produit.

   Le volume v est exprimé en m^3 et les prix en milliers de francs.

   a. Comment peut-on interpréter, d'un point de vue économique, le sens de variation de la fonction g ?

   b. Sur un marché en concurrence pure et parfaite, le prix p_0 qui se forme sur le marché correspond à l'égalité entre l'offre et la demande ; p_0 est le prix d'équilibre. Déterminer le volume v_0 correspondant du liquide arrondi à 10^{-3}, puis déterminer p_0.

2. *Surplus des consommateurs* Tous les consommateurs qui étaient prêts à acheter à un prix supérieur au prix d'équilibre réalisent un gain fictif appelé surplus des consommateurs. On admet que ce gain est mesuré par

   $\text{S}_c = \displaystyle\int_0^{v_0} g(v)\,\text{d}v - p_0 v_0$ en milliers de francs.

   a. Placer sur le graphique les points $\text{E}(v_0,\ 0)$ et $\text{F}(0,\ p_0)$. Donner une interprétation graphique du surplus des consommateurs.

   b. Calculer une valeur exacte du surplus des consommateurs, puis en donner l'arrondi au franc.