Baccalauréat ES 2003

L'intégrale de septembre 2002 à juin 2003

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie novembre 2002

EXERCICE 1 **5 points**

Pierre se rend à une salle de jeux pour s'adonner à son jeu électronique favori.
Chaque partie de ce jeu est un duel entre Pierre et un adversaire virtuel choisi aléatoirement par la machine.
La machine choisit comme adversaire soit ATAR soit BLUT, avec la même probabilité $\frac{1}{2}$.
La probabilité pour que Pierre soit vainqueur contre ATAR est égale à $\frac{1}{4}$.
La probabilité pour que Pierre soit vainqueur contre BLUT est égale à $\frac{2}{5}$.
On appelle :
A l'évènement : « Pierre combat ATAR »,
B l'évènement : « Pierre combat BLUF »,
V l'évènement : « Pierre est vainqueur ».

1. **Pierre joue une partie.**
   - **a.** Calculer p(A $\cap$ V)
   - **b.** Calculer p(B $\cap$ V).
   - **c.** En déduire que p(V) = 0,325.
2. **Étude de la dépense occasionnée si Pierre joue plusieurs parties.**
   Pierre paie un euro par partie, or il n'a que quatre euros en poche.
   Il joue une première fois. S'il est vainqueur, il arrête. Sinon il joue une deuxième fois. S'il est vainqueur, il arrête. Sinon il joue une troisième fois. S'il est vainqueur, il arrête. Sinon il joue une quatrième fois. Après cette éventuelle quatrième partie, il doit s'arrêter, quel qu'en soit le résultat.
   On suppose que les résultats de parties successives sont indépendants.
   - **a.** À l'aide d'un arbre pondéré, décrire toutes les situations possibles.
   - **b.** On appelle X la variable aléatoire égale à la dépense de Pierre, en euros. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X. Écrire les résultats avec trois décimales.

Dépense x_i	1	2	3	4
p($X = x_i$)				

   - **c.** Calculer l'espérance mathématique de X que l'on donnera avec deux décimales.

EXERCICE 2 **4 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Le tableau suivant donne la population de l'an 2000 en millions d'habitants et le taux d'évolution annuel de cette population dans quelques pays européens.

Pays	France (sans les DOM-TOM)	Royaume-Uni	Russie
Taux d'évolution annuel en	0,4	0,2	$-0,5$
Population en 2000 (en millions)	56,6	59,8	147

Source : TEF

1. Soit U_n le nombre d'habitants prévu pour l'année $(2000 + n)$ dans un pays donné.
   On suppose que le taux d'évolution annuel est constant et on le note t
   a. Calculer U_{n+1} en fonction de U_n et de t.
   b. Préciser la raison de cette suite géométrique (U_n).
   c. En déduire l'expression de U_n en fonction de t, n et U_0.
2. **Prévisions à partir des données du tableau :**
   On suppose que les taux d'évolution annuels de chaque pays restent constants après l'an 2000 et on note F_n, B_n et R_n les populations, en millions d'habitants prévues pour l'année $(2000 + n)$ respectivement en France, au Royaume-Uni et en Russie.
   a. Calculer F_n, B_n et R_n en fonction de n .
   b. Quelle sera la population de la France en 2010 ?
   c. À partir de quelle année la population de la Russie sera-t-elle inférieure à 140 millions ?
3. **Comparaisons pays par pays.**
   a. Justifier que $\mathrm{F}_n \geqslant \mathrm{B}_n$ si et seulement si $n \geqslant \dfrac{\ln(59,8) - \ln(56,6)}{\ln(1,004) - \ln(1,002)}$.
   b. En déduire l'année à partir de laquelle la population de la France dépassera celle du Royaume-Uni.

EXERCICE 2 **4 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Une personne place, le 1er janvier 2001, sur un compte rémunéré à intérêts composés au taux annuel de 4 %, une somme de a euros.
De plus, chaque 1er janvier des années suivantes, c'est-à-dire au le 1erjanvier 2002, 1er janvier 2003, ..., etc, elle place sur ce compte la somme de 1 000 euros.
On pose $U_0 = a$. Plus généralement, pour tout entier naturel n, on appelle U_n la somme disponible sur le compte, le 1er janvier de l'année $(2001 + n)$.

1. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} = 1,04U_n + 1000$.
   b. Montrer que cette suite n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. Optimisation du placement sur une durée de quatre ans.
   On pose $V_n = U_n + 25000$.
   a. Vérifier que la suite V_n est géométrique, de raison 1,04. Préciser son premier terme en fonction de a.
   b. Exprimer V_n en fonction de a et n.
   c. En déduire que, pour tout entier n : $U_n = 1,04^n \times (a + 25000) - 25000$.
3. Optimisation du placement sur une durée de quatre ans
   Calculer à 0,01 euro près le placement initial minimal a permettant de disposer sur ce compte, le 1er janvier 2005, d'une somme d'au moins 15 000 euros.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \frac{10\text{e}^x}{\text{e}^x + 4}.$$

On appelle $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   En écrivant $f(x) = 10 - \dfrac{40}{\text{e}^x + 4}$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
   En déduire les équations des asymptotes à $(\mathcal{C})$.
   b. Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de f.
   c. Étudier les variations de f.
   d. Dresser son tableau de variations.
2. Déterminer une équation de la tangente (D), à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $\ln 4$.
3. Tracer sur un même graphique, la courbe $(\mathcal{C})$, ses asymptotes et la droite (D).

Partie B

Une entreprise fabrique un certain produit P. On appelle x le nombre de tonnes de P fabriquées.
On note $C(x)$ leur coût total de fabrication, exprimé en milliers d'euro.
La fonction coût marginal, C', est la dérivée de la fonction C.
Pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, on a : $C'(x) = f(x)$, où f est la fonction étudiée dans la **partie A**. De plus, on suppose qu'il n'y a pas de charges fixes, donc que $C(0) = 0$.

1. **a.** Montrer que le coût total est donné par :

$$C(x) = \int_0^x f(t)\,\text{d}t.$$

   b. Exprimer $C(x)$ en fonction de x.
   c. Quel est le coût total de 5 tonnes de ce produit P ? On en donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à la dizaine d'euro près.
2. On appelle $C_M(x)$ le coût moyen défini, pour tout x strictement positif, par : $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.
   a. Exprimer $C_M(x)$ en fonction de x.
   b. Vérifier que, pour tout $x > 0$, $C_M(x) = 10 + \dfrac{10\ln\left(1 + 4\text{e}^{-x}\right)}{x} - \dfrac{10\ln 5}{x}$.
   c. En déduire la limite de $C_M(x)$ en $+\infty$.

Baccalauréat ES France septembre 2002

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les résultats des calculs numériques seront arrondis avec deux décimales.

Une entreprise recherche trois personnes expérimentées pour occuper trois postes techniques importants. On a constaté, lors d'embauches précédentes, que parmi les candidats qui peuvent se présenter, 80 % ont les compétences requises pour occuper ces postes. Pour sélectionner les candidats, les recruteurs de l'entreprise élaborent un test. On estime que :

- si une personne est compétente, elle a 85 chances sur 100 de réussir le test ;
- si une personne est incompétente, elle a 20 chances sur 100 de réussir le test.

1. Une personne se présente pour le premier poste. On note

- C l'évènement « la personne est compétente »
- R l'évènement « la personne réussit le test ».
- $\overline{\text{C}}$ et $\overline{\text{R}}$ désignent les évènements contraires respectifs de C et R.
- Si A et B sont des évènements,

* $p(\text{A})$ est la probabilité de réalisation de A

* $p_{\text{B}}(\text{A})$ est la probabilité de réalisation de A sachant que B est réalisé, notée aussi $p(\text{A} / \text{B})$.

a. À l'aide des informations indiquées dans l'énoncé :

Donner les valeurs de $p(\text{C})$ et $p_{\text{C}}(\text{R})$. Donner la probabilité qu'une personne réussisse le test, sachant qu'elle n'est pas compétente.

b. Calculer $p\left(\overline{\text{C}}\right)$.

c. Calculer la probabilité qu'une personne réussisse le test et soit compétente.

d. Montrer que $p(\text{R}) = 0{,}72$.

e. Une personne réussit le test. Quelle est la probabilité qu'elle soit compétente ?

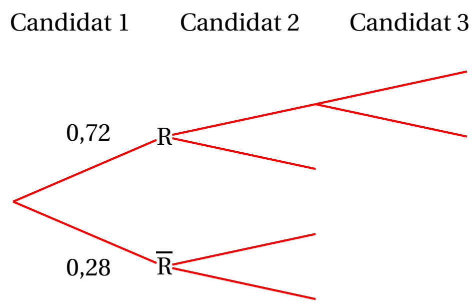
2. Trois candidats se présentent pour pourvoir les trois postes.
Ils subi successivement le test de façon indépendante.
On admet que la probabilité de réussite au test est de $0,72$ pour chacun.
X désigne la variable aléatoire donnant le nombre de candidats, parmi les trois, réussissant le test.

a. On a esquissé ci-dessous un arbre pondéré traduisant la situation.

Recopier cette esquisse sur la copie et la compléter par les branches et les légendes manquantes.

b. Calculer $p(X = 3)$.

c. Calculer la probabilité qu'exactement deux candidats sur les trois réussissent le test.



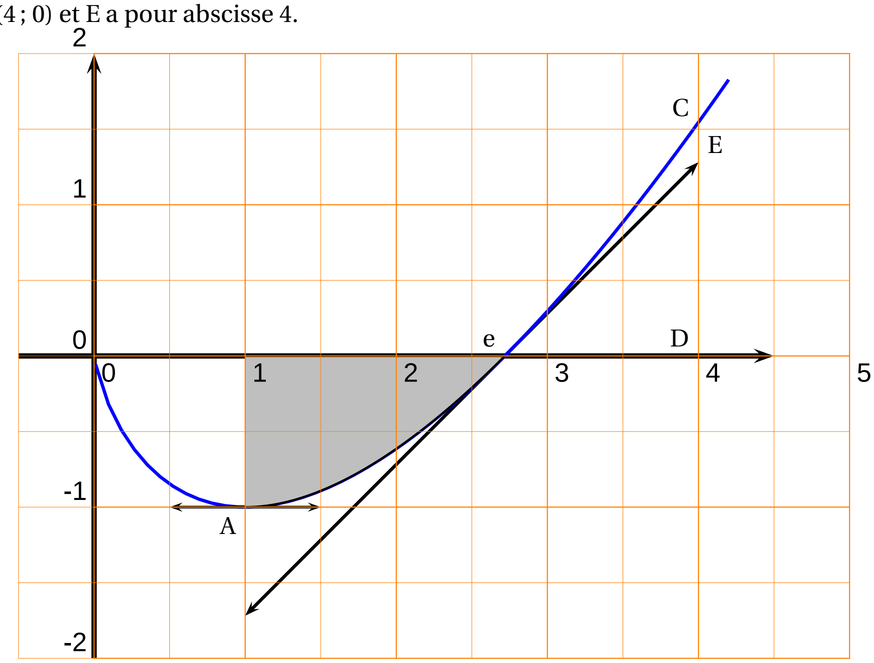
Exercice 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé :

- la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,-\infty[$;
- deux tangentes à cette courbe : celle au point A d'abscisse 1 et celle au point B d'abscisse e.

La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points A$(1\,;\,-1)$, B$(\text{e}\,;\,0)$ et C$(4\,;\,f(4))$.
La tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses.
La tangente en B passe par le point E tel que BD = DE, où D est le point de coordonnées $(4\,;\,0)$ et E a pour abscisse 4.



Le nombre e est la base des logarithmes népériens.

1. Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
   - **a.** Sans justifier, donner $f'(1)$ et $f'(\text{e})$.
   - **b.** Sans justifier, donner les solutions dans $]0\,;\,4[$ de l'inéquation $f(x) < 0$, puis celles de : $f'(x) < 0$.
   - **c.** Soit $\mathscr{A}$, en unités d'aire, une estimation de l'aire de la région colorée, région comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.

     Parmi les trois nombres suivants : 2,9 ; 1,1 ; 0,6 lequel est la meilleure valeur approchée de $\mathscr{A}$? Justifier la réponse.

2. On suppose que la fonction f précédente est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x.$$

a. Calculer $f'(x)$. En déduire les variations de f et les valeurs de $f'(1)$ et de $f'(\mathrm{e})$; on ne déterminera pas la limite en $+\infty$.

b. Montrer que la fonction F définie sur $]0\ ;\ 4]$ par :

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right)$$

est une primitive de f sur $]0\ ;\ 4]$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Dans un repère orthonormal de l'espace $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ on considère les points $\mathrm{A}(1\ ;\ 0\ ;\ 2)$ $\mathrm{B}(2\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et $\mathrm{C}(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$

a. Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

b. Vérifier que le vecteur $\vec{u}\,(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. En déduire une équation cartésienne de ce plan.

d. Quelles sont les coordonnées des points E, F et G intersections du plan (ABC) avec les droites $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}\right)$, $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\jmath}\right)$ et $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{k}\right)$?

Représenter les points A, B, C et le triangle EFG dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

e. Soit D le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 3\vec{u}$.

Déterminer ses coordonnées, puis le placer sur le graphique.

f. Pourquoi les triangles ABD et ACD sont-ils rectangles en A ?

Démontrer que BCD n'est pas rectangle.

2. Les points A, B, C et D déterminent un solide S à quatre faces triangulaires (tétraèdre) dont trois sont des triangles rectangles.

On considère un jeu où on lance le solide S . Il retombe sur une de ses faces.

On a perdu si cette face est un triangle rectangle et on a gagné dans le cas contraire.

Une étude statistique a montré que l'on avait deux fois plus de chances de perdre que de gagner.

a. On lance le solide S une fois.

Quelle est alors la probabilité que S retombe sur la face (BCD) ?

b. On lance le solide S quatre fois, les lancers étant indépendants.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois la face (BCD) ?

(On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.)

PROBLÈME **9 points**

Commun à tous les candidats

La partie C est indépendante des parties A et B.

Partie A

Soit h la fonction polynôme du second degré définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$h(x) = (\mathrm{e}-1)x^2 - 2(\mathrm{e}-1)x + 1,$$

la constante e désignant la base des logarithmes népériens ($\mathrm{e} \approx 2,718$).

1. Montrer que h est strictement décroissante sur $[0\,;\,1]$.
2. Justifier le fait que h s'annule une fois et une seule entre 0 et 1. On note α le nombre réel qui vérifie $h(\alpha) = 0$.
3. En utilisant les résultats des questions précédentes, préciser le signe de $h(x)$ sur $[0\,;\,1]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par

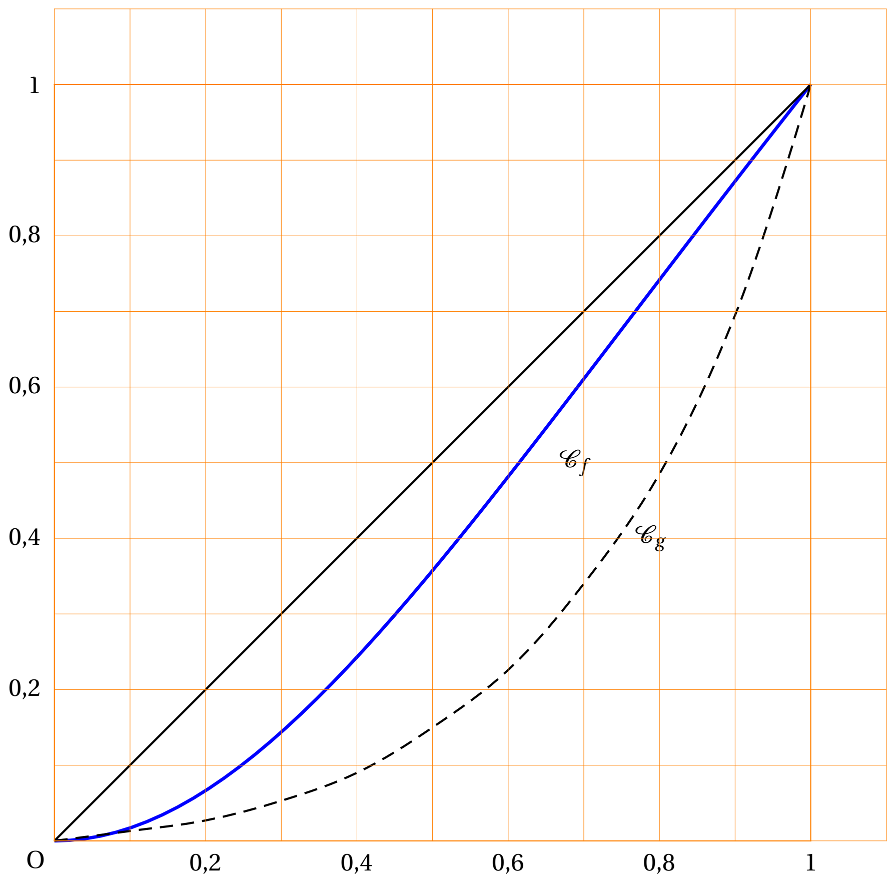
$$f(x) = \ln\left[(\mathrm{e}-1)x^2 + 1\right]$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique 10 cm).

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,1]$.
3. On veut préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite D d'équation $y = x$. Pour cela, on étudie les variations de la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $d(x) = x - f(x)$.
   - **a.** Montrer que $d'(x) = \dfrac{h(x)}{(\mathrm{e}-1)x^2+1}$ où h est la fonction étudiée dans la **partie A**.
   - **b.** Étudier le sens de variation de d sur $[0\,;\,1]$.
   - **c.** Calculer $d(0)$ et $d(1)$.
   - **d.** Déduire de ce qui précède le signe de $d(x)$ sur $[0\,;\,1]$.
     Préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite D.

Partie C

Sur le graphique ci-dessous sont représentées la droite d'équation $y = x$, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f étudiée dans la **partie B** et la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative d'une nouvelle fonction g.



Les courbes représentant f et g illustrent ici respectivement la répartition des salaires dans deux entreprises A et B.
En abscisses, x représente le pourcentage cumulé (sous forme décimale) des personnes ayant les salaires les plus faibles par rapport à l'effectif total de chaque entreprise ; par exemple si l'on veut considérer les 60 % les moins bien payés de l'ensemble des salariés d'une entreprise, on choisira $x = 0,6$.
En ordonnées, $f(x)$ (ou $g(x)$) représente le pourcentage (sous forme décimale) de la masse salariale totale affectée aux t % les moins bien payés des salariés de chaque entreprise, avec $\dfrac{t}{100} = x$.
Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont des courbes de Lorenz.

1. Déterminer graphiquement (avec la précision permise par le dessin), pour chaque entreprise, une valeur approchée du pourcentage de la masse salariale affectée aux 60 % des salariés les moins bien payés.
2. Déterminer graphiquement (avec la précision permise par le dessin), pour chaque entreprise, une valeur approchée du pourcentage des salariés les moins bien payés dont la masse des salaires représente 60 % de la masse salariale totale.
3. Dans quelle entreprise la distribution des salaires est-elle la plus irrégulièrement répartie ?

Baccalauréat ES Polynésie septembre 2002

EXERCICE 1 **5 points**

On peut traiter la question 4 *sans avoir traité les questions précédentes.*

Pour un achat immobilier, lorsqu'une personne emprunte une somme de 50 000 euros, remboursable par n mensualités chacune égale à A euros, pour un intérêt mensuel de 0,4 %, le montant de cette mensualité A est donné par :

$$A = \frac{200}{1-(1,004)^{-n}}$$

(*on ne demande pas d'établir cette relation*).

1. Calculer la mensualité A lorsque cette personne emprunte 50 000 euros remboursables par 120 mensualités pour un intérêt mensuel de 0,4%. On donnera une valeur arrondie au centime d'euro.

   Calculer alors le montant total des intérêts pour ce prêt.
2. Mêmes questions avec un emprunt de 50 000 euros sur 8 ans à 0,4% mensuel.
3. Afin de payer le moins d'intérêts possible, l'emprunteur doit augmenter le montant de la mensualité et diminuer la période de remboursement. Mais il ne peut supporter au maximum que des remboursements de 950 euros par mois.

   a. Résoudre dans $[0\,;\,+\infty[$ l'inéquation

   $$\frac{200}{1-(1,004)^{-x}} \leqslant 950.$$

   b. En déduire le nombre entier n minimum de mensualités pour lequel le montant de la mensualité A est inférieur ou égal à 950 euros.

   Que vaut alors A arrondi au centime d'euro ? Calculer alors le montant total des intérêts.
4. Voici des extraits du tableau d'amortissement d'un prêt de 50 000 euros remboursable par 60 mensualités pour un intérêt de 0,4%.

   Calculer, en détaillant, les nombres a, b, c, d et e qui figurent dans le tableau.

   On donnera des valeurs arrondies au centime d'euro.

N° de la mensualité	Montant de la mensualité en euros	Part des intérêts en euros pour cette mensualité	Capital amorti en euros	Capital restant à rembourser en euros
1	938,99	200,00	738,99	49261,01
2	938,99	197,04	a	b
3	938,99	c	d	e
4	938,99	191,10	747,89	47 026,26
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
59	938,99	7,47	931,52	935,25
60	938,99	3,74	935,25	0

EXERCICE 2 **5 points**

Un stock de champignons est constitué de trois variétés de champignons conditionnés en barquettes. Ces barquettes proviennent exclusivement de France ou d'Italie.
Ce stock est composé à 50% de barquettes de cèpes, à 30% de barquettes de girolles et à 20% de barquettes de morilles.

15 % des barquettes de cèpes proviennent d'Italie.
20 % des barquettes de girolles proviennent d'Italie.
40 % des barquettes de morilles proviennent d'Italie.

On choisit une barquette de ce stock au hasard.
On notera les évènements suivants :

- C : « La barquette choisie contient des cèpes » ;
- G : « La barquette choisie contient des girolles » ;
- M : « La barquette choisie contient des morilles » ;
- I : « La barquette choisie provient d'Italie » ;
- F : « La barquette choisie provient de France ».

1. Quelle est la probabilité que la barquette choisie contienne des cèpes et provienne de France ?
2. Montrer que la probabilité que la barquette choisie provienne d'Italie est 0,215.
3. Quelle est la probabilité que la barquette choisie contienne des cèpes sachant que cette barquette provient d'Italie ? On donnera une valeur arrondie à 10^{-3}.
4. La barquette choisie provient de France. Quelle est la probabilité que ce soit une barquette de girolles ? On donnera une valeur arrondie à 10^{-3}.

PROBLÈME **11 points**

Le tableau ci-dessous donne le taux d'équipement en magnétoscope des couples avec enfant(s) d'une certaine région française de 1980 à 2000 tous les quatre ans.
Dans ce tableau, x_i représente l'expression : $\dfrac{a_i - 1980}{4}$.

Année a_i	1980	1984	1988	1992	1996	2000
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5
Taux y_i en %	5	8	24	50	77	88

Par exemple, 5 % des couples avec enfant(s) de cette région possède un magnétoscope en 1980.

Partie A

Ajustement affine

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm par rang d'année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 % sur l'axe des ordonnées).

1. Représenter le nuage de points correspondant à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.
2. Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série statistique et placer celui-ci sur le graphique précédent.
3. Dans toute cette question, aucun détail des calculs n'est demandé Les résultats pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice ; ils seront arrondis à 10^{-2}.

   Donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.

   Représenter cette droite sur le graphique précédent.

   On suppose que le modèle obtenu à la **question 3** reste valable pour les années suivantes.

   Déterminer, par le calcul, en quelle année ce taux dépassera 95 %.

Partie B

Ajustement logistique

Soit f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{100}{1 + k\mathrm{e}^{bx}}.$$

où k et b sont des constantes à déterminer.

1. Déterminer par le calcul les valeurs exactes de k et b pour que la courbe représentative de f passe par les points $\mathrm{M}(0~;~5)$ et $\mathrm{N}(3~;~50)$.

Donner une valeur de b arrondie à l'unité.

2. Dans toute cette question, on pose : $f(x) = \dfrac{100}{1 + 19\mathrm{e}^{-x}}$ et on admettra que $f(x)$ représente le taux d'équipement en magnétoscope des couples avec enfant(s) de cette région pour l'année de rang x.

- **a.** Montrer que la droite d'équation $y = 100$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$. Déterminer la position de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote.
- **b.** Calculer la dérivée f' de f et vérifier que $f'(x)$ est du signe de e^{-x}.

  En déduire les variations de f sur $[0~;~+\infty[$ et dresser le tableau de variations de f.
- **c.** Tracer la courbe représentative de f sur le graphique de la **partie A**.
- **d.** Résoudre l'inéquation : $f(x) \geqslant 95$. Interpréter ce résultat en terme de taux d'équipement.
- **e.** Montrer que pour tout x de $[0~;~+\infty[$, on a $f(x) = \dfrac{100\mathrm{e}^x}{19 + \mathrm{e}^x}$.
- **f.** En déduire une primitive de f sur $[0~;~+\infty[$.
- **g.** On assimile le taux moyen d'équipement prévisible avec ce modèle logistique entre les années 2000 et 2008 à la valeur moyenne de la fonction f sur $[5~;~7]$.

  Calculer ce taux moyen d'équipement prévisible entre les années 2000 et 2008. On en donnera une valeur arrondie à 10^{-2}.

Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie décembre 2002

EXERCICE 1 **5 points**

Pierre se rend à une salle de jeux pour s'adonner à son jeu électronique favori.
Chaque partie de ce jeu est un duel entre Pierre et un adversaire virtuel choisi aléatoirement par la machine.
La machine choisit comme adversaire soit ATAR soit BLUT, avec la même probabilité $\frac{1}{2}$.
La probabilité pour que Pierre soit vainqueur contre ATAR est égale à $\frac{1}{4}$.
La probabilité pour que Pierre soit vainqueur contre BLUT est égale à $\frac{2}{5}$.
On appelle :

A l'évènement : « Pierre combat ATAR »,
B l'évènement : « Pierre combat BLUF »,
V l'évènement : « Pierre est vainqueur ».

1. **Pierre joue une partie.**
   - **a.** Calculer $p(A \cap V)$
   - **b.** Calculer $p(B \cap V)$.
   - **c.** En déduire que $p(V) = 0{,}325$.
2. **Étude de la dépense occasionnée si Pierre joue plusieurs parties.**
   Pierre paie un euro par partie, or il n'a que quatre euros en poche.
   Il joue une première fois. S'il est vainqueur, il arrête. Sinon il joue une deuxième fois. S'il est vainqueur, il arrête. Sinon il joue une troisième fois. S'il est vainqueur, il arrête. Sinon il joue une quatrième fois. Après cette éventuelle quatrième partie, il doit s'arrêter, quel qu'en soit le résultat.
   On suppose que les résultats de parties successives sont indépendants.
   - **a.** À l'aide d'un arbre pondéré, décrire toutes les situations possibles.
   - **b.** On appelle X la variable aléatoire égale à la dépense de Pierre, en euros. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X. Écrire les résultats avec trois décimales.

Dépense x_i	1	2	3	4
$p(X = x_i)$				

   - **c.** Calculer l'espérance mathématique de X que l'on donnera avec deux décimales.

EXERCICE 2 **4 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Le tableau suivant donne la population de l'an 2000 en millions d'habitants et le taux d'évolution annuel de cette population dans quelques pays européens.

Pays	France (sans les DOM-TOM)	Royaume-Uni	Russie
Taux d'évolution annuel en	0,4	0,2	$-0{,}5$
Population en 2000 (en millions)	56,6	59,8	147

Source : TEF

1. Soit U_n le nombre d'habitants prévu pour l'année $(2000 + n)$ dans un pays donné.
   On suppose que le taux d'évolution annuel est constant et on le note t
   - **a.** Calculer U_{n+1} en fonction de U_n et de t.
   - **b.** Préciser la raison de cette suite géométrique (U_n).
   - **c.** En déduire l'expression de U_n en fonction de t, n et U_0.
2. **Prévisions à partir des données du tableau :**
   On suppose que les taux d'évolution annuels de chaque pays restent constants après l'an 2000 et on note F_n, B_n et R_n les populations, en millions d'habitants prévues pour l'année $(2000 + n)$ respectivement en France, au Royaume-Uni et en Russie.
   - **a.** Calculer F_n, B_n et R_n en fonction de n .
   - **b.** Quelle sera la population de la France en 2010 ?
   - **c.** À partir de quelle année la population de la Russie sera-t-elle inférieure à 140 millions ?
3. **Comparaisons pays par pays.**
   - **a.** Justifier que $\text{F}_n \geqslant \text{B}_n$ si et seulement si $n \geqslant \dfrac{\ln(59,8) - \ln(56,6)}{\ln(1,004) - \ln(1,002)}$.
   - **b.** En déduire l'année à partir de laquelle la population de la France dépassera celle du Royaume-Uni.

EXERCICE 2 **4 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Une personne place, le 1er janvier 2001, sur un compte rémunéré à intérêts composés au taux annuel de 4 %, une somme de a euros.
De plus, chaque 1er janvier des années suivantes, c'est-à-dire au le 1er janvier 2002, 1er janvier 2003, ..., etc, elle place sur ce compte la somme de 1 000 euros.
On pose $U_0 = a$. Plus généralement, pour tout entier naturel n, on appelle U_n la somme disponible sur le compte, le 1er janvier de l'année $(2001 + n)$.

1. - **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} = 1,04U_n + 1000$.
   - **b.** Montrer que cette suite n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. Optimisation du placement sur une durée de quatre ans.
   On pose $V_n = U_n + 2500$.
   - **a.** Vérifier que la suite V_n est géométrique, de raison 1,04. Préciser son premier terme en fonction de a.
   - **b.** Exprimer V_n en fonction de a et n.
   - **c.** En déduire que, pour tout entier n : $U_n = 1,04^n \times (a + 2500) - 2500$.
3. Optimisation du placement sur une durée de quatre ans
   Calculer à 0,01 euro près le placement initial minimal a permettant de disposer sur ce compte, le 1er janvier 2005, d'une somme d'au moins 15 000 euros.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \frac{10\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 4}.$$

On appelle $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   En écrivant $f(x) = 10 - \dfrac{40}{\mathrm{e}^x + 4}$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
   En déduire les équations des asymptotes à $(\mathcal{C})$.

   b. Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de f.

   c. Étudier les variations de f.

   d. Dresser son tableau de variations.

2. Déterminer une équation de la tangente (D), à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $\ln 4$.
3. Tracer sur un même graphique, la courbe $(\mathcal{C})$, ses asymptotes et la droite (D).

Partie B

Une entreprise fabrique un certain produit P. On appelle x le nombre de tonnes de P fabriquées.
On note $C(x)$ leur coût total de fabrication, exprimé en milliers d'euro.
La fonction coût marginal, C', est la dérivée de la fonction C.
Pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, on a : $C'(x) = f(x)$, où f est la fonction étudiée dans la **partie A**. De plus, on suppose qu'il n'y a pas de charges fixes, donc que $C(0) = 0$.

1. **a.** Montrer que le coût total est donné par :

$$C(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   b. Exprimer $C(x)$ en fonction de x.

   c. Quel est le coût total de 5 tonnes de ce produit P ? On en donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à la dizaine d'euro près.

2. On appelle $C_M(x)$ le coût moyen défini, pour tout x strictement positif, par : $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

   a. Exprimer $C_M(x)$ en fonction de x.

   b. Vérifier que, pour tout $x > 0$, $C_M(x) = 10 + \dfrac{10\ln\left(1 + 4\mathrm{e}^{-x}\right)}{x} - \dfrac{10\ln 5}{x}$.

   c. En déduire la limite de $C_M(x)$ en $+\infty$.

Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2002

EXERCICE 1 **5 points**

1. Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(x+1) - \ln(x).$$

Montrer que, pour tout $x > 0$: $g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.
Étudier le signe de $g(x)$.
Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
Démontrer que la fonction G, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$G(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln(x),$$

est une primitive de g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x + 2 + \ln(x+1) - \ln(x),$$

et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan (unité graphique : 1 cm). On ne demande pas de tracer $(\mathscr{C})$.
En utilisant les résultats du **1.**, justifier les affirmations suivantes :

   a. l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$;
   b. la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$;
   c. la courbe $(\mathscr{C})$ est au-dessus de la droite (D).

3. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \left[f(x) - (x+2)\right]\,\text{d}x$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de cette intégrale ?

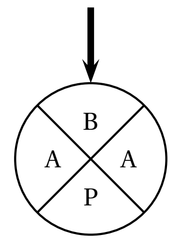
EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Pour compléter le financement d'un voyage scolaire, une association de parents d'élèves décide d'organiser une loterie. Pour cela, il faut une roue partagée en quatre secteurs de même dimension (voir figure ci-dessous) et deux urnes A et B.
L'urne A contient une boule jaune et trois boules noires et l'urne B contient trois boules jaunes et une boule noire.

Le jeu se déroule de la manière suivante : le candidat fait tourner la roue qui, étant lancée, s'arrête de façon aléatoire, la flèche ne pouvant indiquer qu'un seul secteur (tous les secteurs ont donc la même chance de « sortir »).

– si le candidat obtient la lettre P, il a perdu et le jeu est fini ;
– s'il obtient la lettre A, il tire une boule dans l'urne A ;
– s'il obtient la lettre B, il tire une boule dans l'urne B



On note P, A, B, J et N les évènements suivants :
P : « à l'issue du lancer de la roue, on a obtenu la lettre P » ;
A : « à l'issue du lancer de la roue, on a obtenu la lettre A » ;
B : « à l'issue du lancer de la roue, on a obtenu la lettre B » ;
J : « on a tiré une boule jaune » ;
N : « on a tiré une boule noire ».

Dans cet exercice les probabilités seront donnée sous forme de fractions irréductibles.

1. Donner la probabilité des évènements A, B et P.

2. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

3. **a.** Sachant que lors du lancer de la roue on a obtenu la lettre A, quelle est la probabilité de tirer une boule jaune ?

b. En déduire la probabilité de l'événement $A \cap J$.

4. Un joueur fait une partie.
Quelle est la probabilité qu'à l'issue du lancer de la roue il obtienne la lettre B et qu'il tire une boule jaune ?
Déduire des questions précédentes que la probabilité que le joueur tire une boule jaune est $\dfrac{5}{16}$.

5. Un joueur fait deux parties consécutivement, les deux parties étant indépendantes l'une de l'autre. Quelle est la probabilité que ce joueur tire exactement deux boules jaunes ?

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

On dispose d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée et de deux urnes, l'une marquée de la lettre F et l'autre marquée de la lettre P.

1. Chacune des deux urnes contient 6 boules. L'urne marquée F contient 5 boules blanches et 1 boule noire alors que l'urne marquée P contient 2 boules blanches et 4 boules noires.
On lance la pièce de monnaie :
– si on obtient « face », on tire une boule dans l'urne marquée F.
– si on obtient « pile », on tire une boule dans l'urne marquée P.
On note P, F, B et N les évènements suivants :
P : « on a obtenu pile au lancer de la pièce » ;
F : « on a obtenu face au lancer de la pièce » ;
B : « on a tiré une boule blanche » ;
N : « on a tiré une boule noire ».
Déterminer la probabilité de tirer une boule blanche sachant qu'on a obtenu « face » au lancer de la pièce.
En déduire la probabilité d'obtenir « face » au lancer de la pièce et de tirer une boule blanche.

Calculer la probabilité de l'évènement $B \cap P$.

Déduire des questions précédentes que la probabilité de tirer une boule blanche est $\frac{7}{12}$.

2. On effectue la même expérience aléatoire, les deux urnes contenant à présent $2n$ boules, n étant un entier naturel non nul. L'urne marquée P contient $(2n - 1)$ boules blanches et 1 boule noire alors que l'urne marquée P contient $(n-1)$ boules blanches et $(n+1)$ boules noires.

Montrer que la probabilité de tirer une boule blanche est : $\frac{3n-2}{4n}$.

3. Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \frac{3n-2}{4n}$ pour tout n entier naturel non nul.

a. Déterminer la limite, quand n tend vers plus l'infini, de la suite (u_n).

b. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{4n(n+1)}$.

Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (u_n).

PROBLÈME **10 points**

Un négociant en vins a fait mener une étude visant à déterminer à quel prix maximal ses clients sont prêts à acheter une bouteille de vin. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Prix maximal x_i en euros de la bouteille	5	10	15	20	25	30
Pourcentage y_i d'acheteurs potentiels	84	58	30	19	7	4

On voit dans ce tableau, par exemple, que 58 % des clients de ce négociant sont prêts à payer 10 euros une bouteille de vin.

Partie A (Ajustement affine)

1. a. Représenter le nuage de points correspondant à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal du plan (unités : 1 cm pour 2 euros sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 5 % sur l'axe des ordonnées).

b. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.

2. a. Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur arrondie à 10^{-2} près du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $\left(x_i ; y_i\right)$. Un ajustement affine est-il judicieux ?

b. Donner une équation de la droite de régression de y en x, par la méthode des moindres carrés, les coefficients étant calculés à l'aide de la calculatrice et arrondis à 10^{-2} près.

Représenter la droite sur la figure du **1.**, en précisant les coordonnées de deux points de cette droite.

3. Chez ce négociant, le prix moyen d'une bouteille est de 13 euros. En utilisant l'ajustement précédent, calculer le pourcentage des clients prêts à acheter une bouteille à ce prix. On arrondira le résultat à l'entier le plus proche.

Partie B (Autre ajustement)

On envisage un ajustement du nuage de points de la **partie A** par la courbe représentative d'une fonction. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \left(x^2 + 20x + 100\right) \mathrm{e}^{-0,2x}$$

et $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère de la **partie A**.

1. On admet que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 + 20x + 100\right) \mathrm{e}^{-0,2x} = 0$. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

2. **a.** f' étant la dérivée de la fonction f, montrer que pour tout $x \in [0~;~+\infty[$:

$$f'(x) = \left(-0,2x^2 - 2x\right) \mathrm{e}^{-0,2x}.$$

b. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour $x \in [0~;~+\infty[$.

c. En déduire les variations de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$.

3. **a.** Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera les valeurs arrondies à 10^{-1} près)

x	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$		82,8					

b. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère de la **partie A**.

4. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 50$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[10~;~15]$.

b. Donner, en justifiant la réponse, un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

c. Que représente α pour le négociant, si on admet que la fonction f représente un bon ajustement du nuage de points ?

Baccalauréat ES Pondichéry mars 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Un pisciculteur possède un bassin qui contient trois variétés de truites : communes, saumonées et arc-en-ciel. Il voudrait savoir s'il peut considérer que son bassin contient autant de truites de chaque variété. Pour cela il effectue, au hasard, 400 prélèvements d'une truite avec remise et obtient les résultats suivants :

Variété	Commune	Saumonée	Arc-en-ciel
Effectifs	146	118	136

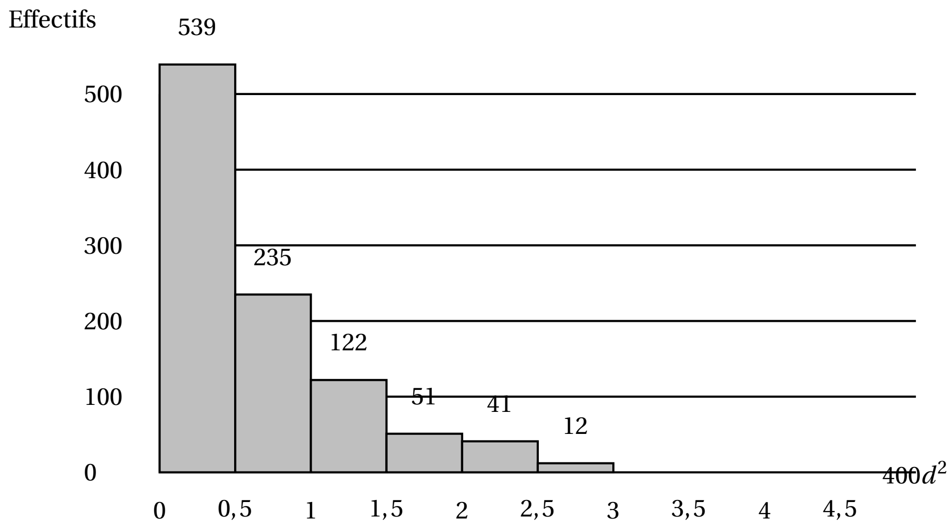
1. **a.** Calculer les fréquences de prélèvement f_c d'une truite commune, f_s d'une truite saumonée et f_a d'une truite arc-en-ciel. On donnera les valeurs décimales exactes.

   b. On pose $d^2 = \left(f_c - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(f_s - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(f_a - \frac{1}{3}\right)^2$.

   Calculer $400d^2$ arrondi à 10^{-2} ; on note $400d^2_{\text{obs}}$ cette valeur.

   À l'aide d'un ordinateur, le pisciculteur simule le prélèvement au hasard de 400 truites suivant la loi équirépartie. Il répète 1 000 fois cette opération et calcule à chaque fois la valeur de $400d^2$.

   Le diagramme à bandes ci-dessous représente la série des 1 000 valeurs de $400d^2$, obtenues par simulation.



2. Déterminer une valeur approchée à 0,5 près par défaut, du neuvième décile D9 de cette série.
3. En argumentant soigneusement la réponse dire si on peut affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 10 % que « le bassin contient autant de truites de chaque variété ».
4. On considère désormais que le bassin contient autant de truites de chaque variété. Quand un client se présente, il prélève au hasard une truite du bassin.

   Trois clients prélèvent chacun une truite. Le grand nombre de truites du bassin permet d'assimiler ces prélèvements à des tirages successifs avec remise.

   Calculer la probabilité qu'un seul des trois clients prélève une truite commune.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

À l'issue d'une compétition, des sportifs sont contrôlés par un comité antidopage qui doit se prononcer sur leur positivité ou négativité au dopage. Or, d'une part certains produits dopants restent indétectables aux contrôles, d'autre part certains médicaments ont un effet de dopage inconnu du sportif ; le comité prend donc sa décision avec un risque d'erreur. On note
D l'évènement « le sportif est dopé », O l'évènement « le sportif est déclaré positif ».
E l'évènement « le comité a commis une erreur ».

1. Dans cette question, on suppose que parmi les sportifs 50 % ne sont pas dopés et que *la probabilité d'être déclaré positif est indépendante de l'état réel du sportif* (dopé ou non dopé).

Lors d'une étude sur des compétitions antérieures on a pu observer que ce comité déclarait positifs 20 % des sportifs. On choisit un sportif au hasard. Calculer

- la probabilité que le sportif soit non dopé et déclaré positif ;
- la probabilité que le sportif soit dopé et déclaré négatif ;
- la probabilité de l'évènement E.

2. Dans cette question, on note p la fréquence des dopés parmi les sportifs contrôlés.

On suppose que la probabilité d'être déclaré positif n'est pas la même selon que le sportif est réellement dopé ou non,

- la probabilité qu'un sportif dopé soit déclaré positif est $0,9$;
- la probabilité qu'un sportif non dopé soit déclaré positif est $0,1$.

On choisit un sportif au hasard.

a. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

b. Calculer la probabilité de E.

c. Calculer, en fonction de p, la probabilité que ce sportif soit déclaré positif.

d. On s'intéresse à la probabilité qu'un sportif ayant été déclaré positif soit réellement dopé. Montrer que cette probabilité, notée $f(p)$, est définie par $f(p) = \dfrac{0,9p}{0,8p+0,1}$.

Résoudre l'inéquation $f(p) > 0,9$. Interpréter ce résultat.

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Ce problème a pour objectif d'étudier le prix d'équilibre entre l'offre et la demande d'un objet donné, dans une situation de concurrence parfaite.

Partie A : Étude de la demande

On suppose que le prix unitaire qu'acceptent de payer les consommateurs en fonction de la quantité x disponible sur le marché est modélisé par la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{50}{x^2+x+1}.$$

Le prix unitaire $g(x)$ est exprimé en euros et la quantité x en millions d'objets.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. **a.** Calculer $g'(x)$.
Étudier les variations de g sur $[0~;~+\infty[$ et donner le tableau de variations.

b. Soit $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal du plan. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse nulle.

c. Tracer T et $\mathscr{C}_g$ (unités graphiques : 2 cm pour une unité en abscisses, 2 cm pour 10 unités en ordonnées).

Partie B : Étude de l'offre

Les producteurs acceptent de fabriquer une quantité x exprimée en millions d'objets si le prix unitaire de l'objet atteint une valeur minimale. On suppose que ce prix minimal (qui dépend de la quantité x) est modélisé par la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 3\text{e}^{0,26x}.$$

Le prix unitaire $f(x)$ est exprimé en euros.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Étudier les variations de f sur $[0~;~+\infty[$.

3. Tracer $\mathscr{C}_f$ dans le même repère que $\mathscr{C}_g$.

Partie C : Recherche du prix d'équilibre

Dans un marché à concurrence parfaite, la « loi de l'offre et de la demande » tend à dégager un prix d'équilibre p_0 pour lequel l'offre des producteurs est égale à la demande des consommateurs. On appelle q_0 la quantité associée à p_0.

1. Déterminer graphiquement un encadrement entre deux entiers consécutifs d'une part du prix d'équilibre p_0 et d'autre part de la quantité associée q_0.

2. On pose $h(x) = f(x) - g(x)$ pour tout x de $[0~;~+\infty[$.

a. Déduire des parties A et B le sens de variations de sur $[0~;~+\infty[$.

b. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique q_0 sur $[2~;~3]$.

c. Donner à l'aide de la calculatrice une valeur arrondie à 10^{-2} de q_0.

3. Calculer une valeur approchée du prix d'équilibre p_0. On donnera le résultat arrondi à 10^{-2} près.

Partie D : Surplus des producteurs

On appelle surplus des producteurs le gain supplémentaire que réalisent les producteurs en vendant au prix p_0. Il est obtenu à partir de l'expression :

$$S_p = p_0q_0 - \int_0^{q_0} f(x)\,\text{d}x.$$

Il est exprimé en millions d'euros.

1. Donner une interprétation graphique de S_p, (on interprétera p_0q_0 comme l'aire d'un rectangle).

2. **a.** Calculer S_p en fonction de p_0 et q_0.

b. Déterminer une valeur arrondie à 10^{-1} de S_p exprimée en millions d'euros.

Baccalauréat série ES Amérique du Nord juin 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Aucun détail des calculs statistiques effectués à la calculatrice n'est demandé dans cet exercice.

Dans un magasin, le nombre annuel de ventes d'un appareil électroménager, relevé pendant 6 années, est donné par le tableau suivant :

Année	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre d'appareils y_i	623	712	785	860	964	1073

1. **a.** Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points $M\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ en prenant comme unités graphiques : 2 cm pour 1 rang en abscisses et 1 cm pour 50 appareils en ordonnées, en commençant à la graduation 600.

   b. Calculer, en donnant les résultats arrondis à 10^{-2}, les coordonnées du point moyen G du nuage et placer ce point sur le graphique.

2. **a.** Calculer, en donnant les résultats arrondis à 10^{-2}, les coordonnées du point moyen G_1 du nuage formé par les points M_1, M_2 et M_3, puis les coordonnées du point moyen G_2 du nuage formé par les points M_4, M_5 et M_6.

   b. Placer les points G_1 et G_2 sur le graphique et déterminer, avec des coefficients arrondis à 10^2, une équation de la droite (G_1G_2).

   c. En utilisant cette droite comme droite d'ajustement affine, déterminer le nombre d'appareils que l'on peut prévoir vendre en 2004.

3. On sait maintenant que le nombre d'appareils vendus en 2002 est de 1 125.

   a. Ajouter le point $M_7(7\,;\,1\,125)$ sur le graphique précédent.

   b. On considère alors le nouveau nuage formé des points M_i, $2 \leqslant i \leqslant 7$ (le nombre annuel de ventes de l'année 1996 n'est plus pris en compte).

   Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-2}).

   c. En utilisant cet ajustement, quel nombre d'appareils peut-on prévoir vendre en 2004 ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une petite entreprise de textile commercialise des nappes et des lots de serviettes assorties. Quand un client se présente, il achète au plus une nappe et un lot de serviettes.

1. La probabilité pour qu'un client achète la nappe est 0,2. La probabilité pour qu'un client achète le lot de serviettes quand il a acheté la nappe est 0,7 et la probabilité qu'il achète le lot de serviettes quand il n'a pas acheté la nappe est 0,1.

a. On note N l'évènement « un client achète la nappe ». On note S l'évènement « un client achète le lot de serviettes ». Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

b. Montrer que la probabilité de l'évènement $N \cap S$ est égale à 0,14.

c. Calculer la probabilité de l'évènement S.

d. Calculer la probabilité pour qu'un client achète au moins l'un des deux articles.

2. La nappe est vendue 125 € et le lot de serviettes 45 €.

a. Établir en reproduisant sur la copie le tableau suivant, la loi de probabilité : « dépense d'un client ».

Dépense (en euro)	0	45	125	170
Probabilité				

b. Calculer l'espérance mathématique de cette loi. Donner l'interprétation concrète de ce nombre.

3. On rappelle que la probabilité pour qu'un client achète l'ensemble nappe et serviettes est 0,14. On choisit trois clients au hasard. On suppose que le nombre de clients est suffisamment grand pour que ce choix soit assimilé à un tirage successif avec remise. Quelle est la probabilité qu'un seul client ait acheté un ensemble nappe et serviettes ?

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Soit le graphe G joint en annexe constitué des sommets A, B, C, D, E, F et G.

1. Quel est son ordre et le degré de chacun de ses sommets ?

2. Reproduire sur la copie et compléter le tableau des distances entre deux sommets de G :

Distance	A	B	C	D	E	F	G
A	X						
B	X	X					
C	X	X	X				
D	X	X	X	X			
E	X	X	X	X	X		
F	X	X	X	X	X	X	
G	X	X	X	X	X	X	X

En déduire le diamètre de ce graphe.

3. **a.** Donner un sous-graphe complet d'ordre 3 de G.

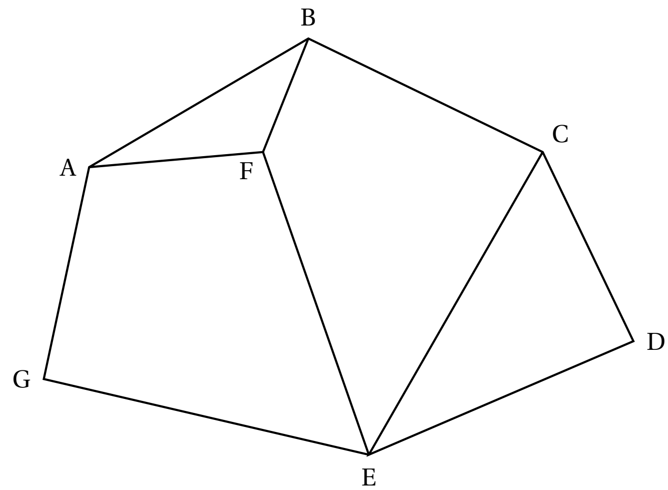
Qu'en déduire pour le nombre chromatique de G ?

b. Proposer une coloration du graphe G et en déduire son nombre chromatique.

4. Donner la matrice M associée à G (vous numéroterez les lignes et les colonnes dans l'ordre alphabétique).

5. En utilisant la matrice M_2 donnée en annexe 1, déduire le nombre de chaînes de longueur 2 partant de A sans y revenir.

Annexe 1 : exercice 2



$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b + 3\ln(x+1)$$

où a et b désignent deux réels que l'on déterminera dans la question **2)**. On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. La figure de l' annexe représente une partie de cette courbe donnée par une calculatrice graphique.

$\mathscr{C}_f$ vérifie les conditions suivantes : elle passe par le point A(0 ; 5) et elle admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

1. En utilisant les données de l'énoncé, que peut-on dire du sens de variation de f ?

2. Déterminer a et b.

Partie B

On suppose désormais que la fonction f est définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x+1).$$

1. **a.** Calculer la limite de f en -1. Interpréter graphiquement le résultat.

b. En admettant que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$, calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f Dresser le tableau de variations. Préciser la valeur exacte du maximum de f.
3. Tracer $\mathscr{C}_f$ et les asymptotes éventuelles dans un plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (unité graphique : 2 cm)
4. **a.** Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $\alpha < 0 < \beta$ et $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.
   b. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α et de β.
   c. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
5. Soit g la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x.$$

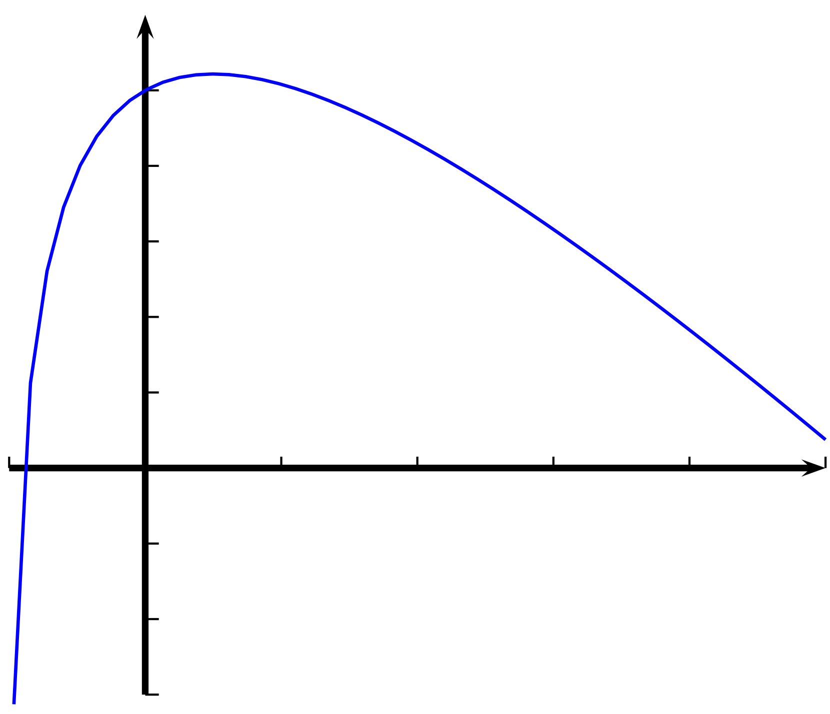
   a. Calculer $g'(x)$.
   b. En déduire l'expression de la primitive de f s'annulant pour $x = 0$.

Partie C

Une imprimerie a une capacité de production de 5 000 ouvrages par jour. Une étude a montré que le coût marginal peut être modélisé par $f(q)$ (en milliers d'euro) où q désigne la quantité d'ouvrages imprimés (en milliers). On rappelle que le coût marginal correspond à la dérivée du coût total.

1. **a.** Calculer $\displaystyle\int_0^5 f(q)\,\text{d}q$.
   b. En déduire le coût total en euro de fabrication de 5 000 ouvrages.
2. L'imprimeur compte réaliser en deux jours une commande de 8 000 ouvrages. Il hésite entre deux possibilités :
   5 000 ouvrages le premier jour puis 3 000 le second,
   4 000 ouvrages pendant deux jours.
   Quelle est l'option la plus rentable ?

Annexe 2
Courbe représentative de f



Baccalauréat ES Antilles juin 2003

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans cette partie, on étudie la répartition des étudiants dans les différentes filières universitaires en fonction de la Catégorie Socio-Professionnelle (CSP) de leurs parents. Les catégories socio-professionnelles retenues sont :
CSP A : cadre supérieur, cadre moyen, profession libérale, patron de l'industrie et du commerce.
CSP B : ouvrier, employé, personnel de service, ouvrier agricole.
CSP C : agriculteur exploitant.
CSP D : autre.
Les différentes filières universitaires sont regroupées en :
Type S : sciences, santé.
Type L : Lettres. Type E Economie et droit.
Type I : IUT et autres.
Tableau 1 : Répartition en pourcentage des étudiants dans les différentes filières en fonction de la CSP de leurs parents.

	CSP A	CSP B	CSP C	CSP D	Total
Type S	64,7 %	17,5 %	4,5 %	13,3 %	100 %
Type L	51,2 %	24 %	4,2 %	20,6 %	100 %
Type E	54,2 %	26 %	4,5 %	15,3 %	100 %
Type 1	49 %	31,3 %	7,4 %	12,3 %	100 %
Toutes filières confondues	56,7 %	22,7 %	4,7 %	15,9 %	100 %

1. **a.** Donner la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard parmi ceux qui suivent des études d'économie ou de droit ait ses parents classés dons la CSP A.

   b. Donner la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard dans la population globale des étudiants ait ses parents exploitants agricoles.

   Tableau 2 : Probabilité qu'un étudiant choisi ou hasard dans l'ensemble des étudiants soit dans les diverses filières.

	Type S	Type L	Type E	Type I
Probabilité	0,369	0,298	0,249	0,084

2. On choisit un étudiant au hasard dans la population globale des étudiants.

   Soit A l'évènement : l'étudiant choisi a ses parents dans la CSP A. On définit de même les évènements B, C et D.

   Soit S l'évènement : l'étudiant est dans la filière de type S. On définit de même les évènements L, E et I.

   Les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

   a. Calculer la probabilité de l'évènement $E \cap A$.

   b. L'étudiant choisi a ses parents dans la CSP A. Quelle est la probabilité pour qu'il suive des études d'économie ou de droit ?

   c. L'étudiant choisi a ses parents dans la CSP B. Quelle est la probabilité pour qu'il suive des études d'économie ou de droit ?

EXERCICE 2 **5 points**
(candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

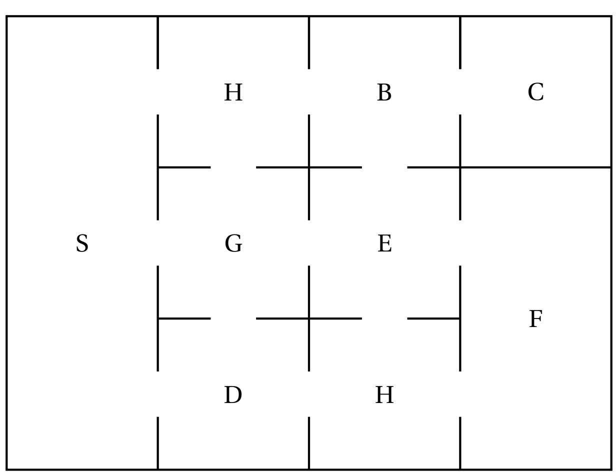
Les détails des calculs statistiques ne sont pas demandés.
La production nette d'électricité nucléaire en France, en milliards de kWh est donnée par le tableau suivant :

Année x_i	85	90	95	96	97	98	99
Production y_i	213	298	359	378	376	368	382

1. Le plan est rapporté à un repère orthogonal : sur l'axe des abscisses, on placera 84 à l'origine et on choisira 1 cm pour 1 an. Sur l'axe des ordonnées, on placera O à l'origine et on choisira 1 cm pour 20 milliards de kWh.
   a. Représenter le nuage des points associé à la série statistique $(x_i,\ y_i)$.
   b. Quelles sont les coordonnées du point moyen G ?
   c. Placer G.
2. Ajustement affine
   a. En utilisant la méthode des moindres carrés, donner une équation de la droite de régression de y en x. Les coefficients seront arrondis au centième.
   b. Tracer cette droite sur le graphique. Expliquer la méthode utilisée pour le tracé.
3. Estimation de production
   a. En supposant que le modèle affine reste valable jusqu'en 2020, estimer à l'aide de ce modèle, au milliard de kWh près, la production d'électricité nucléaire en France en 2020.
   b. On pose $X = \ln(x)$. L'équation de la droite de régression de y en X obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 1\,119X - 4\,745$.
   En supposant que le modèle logarithmique reste valable jusqu'en 2020, estimer à l'aide de ce modèle, au milliard de kWh près, la production d'électricité nucléaire en France en 2020.

EXERCICE 2 **5 points**
(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

I- Un musée est constitué de 9 salles notées A, B, C, D, E, F, G, H et S.
Le plan du musée est représenté ci-dessous :



Ainsi, un visiteur qui se trouve dans la salle S peut atteindre directement les salles A, D ou G. S'il se trouve dans la salle C, il peut se rendre directement dans la salle B, mais pas dans la salle F.
On s'intéresse au parcours d'un visiteur dans ce musée. On ne se préoccupe pas de la manière dont le visiteur accède au musée ni comment il en sort. Cette situation peut être modélisée par un graphe, les sommets étant les noms des salles, les arêtes représentant les portes de communication.

1. Dessiner un graphe modélisant la situation décrite.
2. Est-il possible de visiter le musée, en empruntant chaque porte une fois et une seule ?

   Justifier en utilisant un théorème du cours sur les graphes.
3. Pour rompre une éventuelle monotonie, le conservateur du musée souhaite différencier chaque salle de sa ou des salles voisines (c'est-à-dire accessibles par une porte) par la moquette posée au sol. Quel est le nombre minimum de types de moquettes nécessaires pour répondre à ce souhait ? Justifier.

II - On note M la matrice à 9 lignes et 9 colonnes associée au graphe précédent, en convenant de l'ordre suivant des salles S, A, B, C, D, E, F, G, H. Le graphe n'étant pas orienté, comment cela se traduit-il sur la matrice ?
III - On donne la matrice :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 18 & 12 & 11 & 2 & 20 & 12 & 6 & 12 & 12 \\ 12 & 20 & 3 & 6 & 11 & 20 & 5 & 18 & 5 \\ 11 & 3 & 16 & 0 & 19 & 3 & 8 & 4 & 12 \\ 2 & 6 & 0 & 3 & 1 & 7 & 1 & 4 & 1 \\ 20 & 11 & 19 & 1 & 31 & 9 & 11 & 12 & 19 \\ 12 & 20 & 3 & 7 & 9 & 28 & 9 & 20 & 9 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 11 & 9 & 9 & 8 & 9 \\ 12 & 18 & 4 & 4 & 12 & 20 & 8 & 20 & 6 \\ 12 & 5 & 12 & 1 & 19 & 9 & 9 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

1. Combien y-a-t-il de chemins qui en 4 étapes, partent de D et reviennent à D ?
2. Combien y-a-t-il de chemins qui en 4 étapes, partent de S et reviennent à C ? Les citer.
3. Est-il toujours possible de joindre en 4 étapes deux salles quelconques ? Justifier.

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

Le but du problème est la recherche du meilleur moment de revente d'une machine-outil en tenant compte de sa valeur marchande ainsi que du coût de son entretien. On étudie dans la **partie A**, deux fonctions qui contribuent à la résolution du problème traité dans les **parties B** et **C**. Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A Étude de fonctions

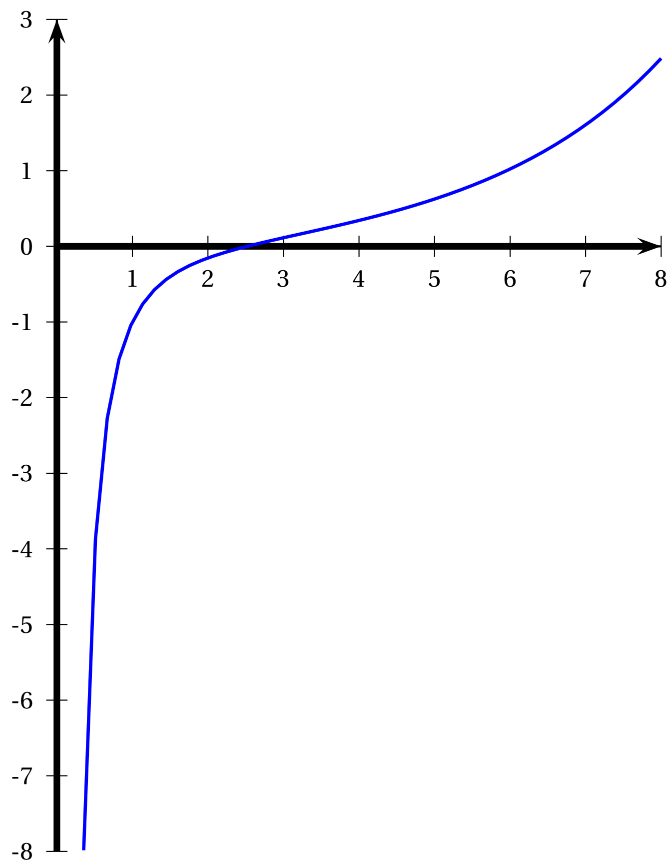
1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = 10 - 10\mathrm{e}^{-0,2x} + \mathrm{e}^{0,5x}.$$

   a. Calculer la limite de f en $+\infty$.

   b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ et dresser son tableau de variations.
   Préciser les limites en 0 et en $+\infty$.

2. Soit la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
   On donne une partie de la courbe représentative de la fonction g' dérivée de la fonction g



   Soit A le point d'intersection de cette courbe avec l'axe des abscisses. On prendra 2,5 comme valeur approchée de l'abscisse de A. Comme le suggère le graphique, on admet que la fonction g' reste négative entre 0 et 2,5.

   a. En utilisant ce graphique, déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,8]$.

b. En déduire une valeur approchée du minimum de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,8]$.

Partie B Depréciation d'un matériel

Toutes les valeurs marchandes sont exprimées en milliers d'euros, et on suppose raisonnable de négliger les variations monétaires. Une machine-outil achetée neuve, coûte 10 milliers d'euros. Au bout d'un an, son prix de revente a diminué de 18 % et on admet qu'il en est ainsi chaque année.

1. Quel est le prix de revente en milliers d'euros au bout de 3 années ?

2. On note v_n le prix de revente de la machine au bout de n années, en milliers d'euros.

a. Exprimer v_n en fonction de n.

b. Determiner par le calcul, le nombre d'années à partir duquel le prix de revente de la machine sera inférieur ou égal à 1,5 millier d'euros. Expliquer la méthode utilisée.

3. Soit k la fonction définie sur $[0\,;\,8]$ par $k(x) = 10\text{e}^{-0,2x}$. On admet que $k(n)$ est une bonne approximation de v_n pendant les 8 premières années.

On note I l'intégrale suivante $\text{I} = \displaystyle\int_0^5 k(x)\,\text{d}x$.

a. Calculer la valeur exacte de I puis en donner une valeur approchée arrondie à l'unité la plus proche.

b. Estimer la valeur moyenne du prix de revente de la machine sur 5 années d'utilisation, puis en donner une valeur approchée.

Partie C Coût total d'un matériel

La machine-outil a un coût d'entretien. On estime qu'il peut être calculé par la fonction E définie sur $[0\,;\,8]$ par $E(x) = \text{e}^{0,5x}$ où x désigne l'âge de la machine en années.

1. Justifier que le coût total d'utilisation de la machine-outil en fonction de son âge, exprimé en milliers d'euros, peut être défini sur $[0\,;\,8]$ par

$$f(x) = 10 - 10\text{e}^{-0,2x} + \text{e}^{0,5x} (f \text{ est la fonction étudiée dans la partie A})$$

2. Exprimer le coût moyen par année d'utilisation, en fonction de l'âge de la machine.

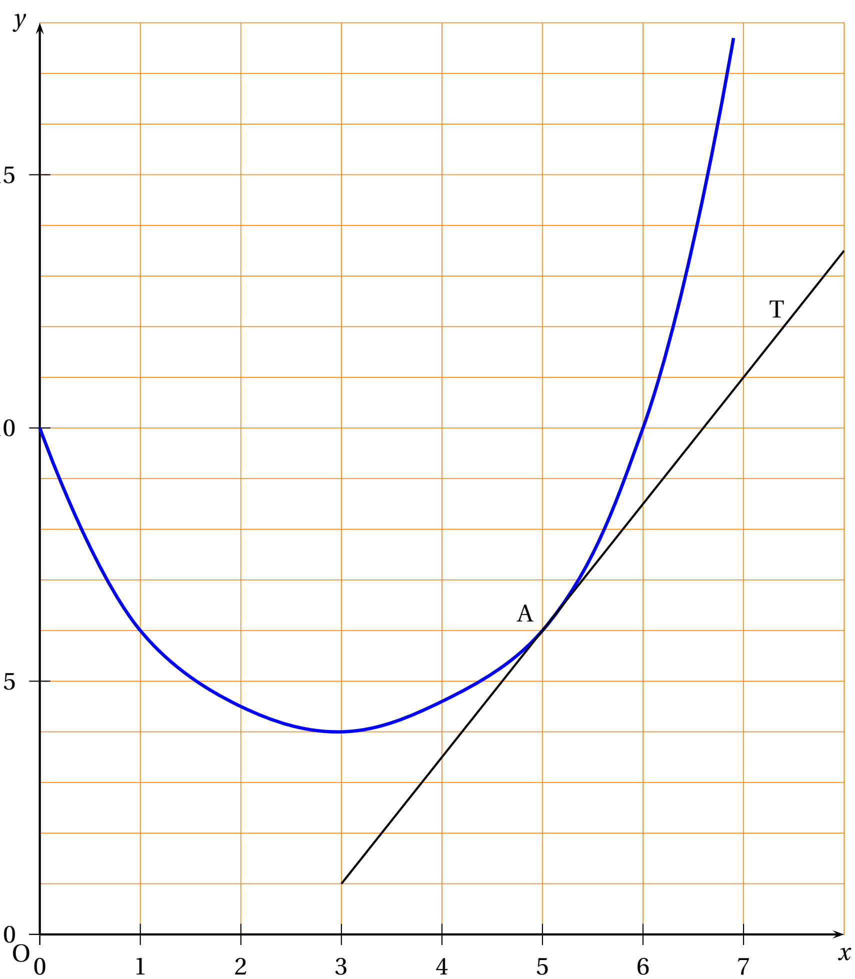
En utilisant les questions précédentes, estimer le meilleur moment pour revendre la machine.

Baccalauréat ES Asie juin 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Un phénomène économique est modélisé par une fonction f représentée graphiquement par une courbe $(\mathscr{C})$ dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Une partie de $(\mathscr{C})$ est donnée ci-dessous.



On donne aussi le tableau de valeurs suivant :

x	0	3	7	8	9	10
$f(x)$	10	4	20	49,5	149	546

On suppose que la fonction f ainsi représentée est continue et dérivable sur $[0\ ; 10]$ et strictement croissante sur $[3 ; 10]$

On note f' sa fonction dérivée.

La droite T est la tangente à $(\mathscr{C})$ en son point A d'abscisse 5 ; elle passe aussi par le point de coordonnées $(7 ; 11)$.

$(\mathscr{C})$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 3.

1. En utilisant ces informations :
a. Reproduire et compléter le tableau ci-contre :

x	3	5
$f(x)$	4	
$f'(x)$		

b. Dresser le tableau des variations de f sur $[0 ; 10]$; indiquer aussi le signe de $f'(x)$ sur cet intervalle. Justifier.
c. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 6$.
Utiliser le graphique pour donner des valeurs approchées des solutions à 0,5 près.
2. On considère la fonction g définie pour tout x de $[0 ; 10]$ par : $g(x) = \ln[f(x)]$.
a. Étudier les variations de g et dresser le tableau des variations de g sur $[0 ; 10]$.
b. À l'aide du graphique de la question 1, donner une solution approchée, dans l'intervalle $[0 ; 10]$, de l'équation $g(x) = 3$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice les résultats approchés seront donnés à $0,000\,1$ près.
Lors d'une épizootie, on s'est aperçu que si la maladie était diagnosti- quée suffisamment tôt chez un animal (avant que les symptômes apparaissent), on pouvait le guérir, sinon la maladie était mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon bien connu d'animaux dont 1 % sont porteurs de la maladie. On obtient les résultats suivants :
– si un animal est malade, le test est positif dans 85 % des cas ;
– si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.
On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note :
– M l'évènement : « L'animal est atteint par la maladie » ;
– E l'évènement : « Le test est positif » ;
– N l'évènement : « Le test est négatif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
   a. Quelle est la probabilité qu'il soit malade et que son test soit positif ?
   b. Vérifier que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058 0.
3. Un animal est choisi parmi ceux dont le test est positif, quelle est la probabilité pour qu'il soit malade ?
4. On choisit 5 animaux au hasard, dans un troupeau suffisamment important pour que les épreuves puissent être considérées comme indé- pendantes et que les tirages puissent être assimilés à des tirages avec remise.
   Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq ait un test positif ?
5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant un test positif est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.
   D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058	0,001 5

   Un éleveur possédant un troupeau de 2 000 bêtes vous demande une prévision du coût à engager à la suite d'un passage du test à tout le troupeau ; quelle réponse proposez-vous ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

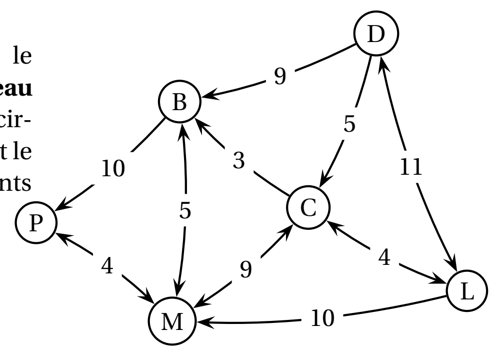
Dans la ville de GRAPHE, on s'intéresse aux principales rues permettant de relier différents lieux ouverts au public, à savoir la mairie (M), le centre commercial (C), la bibliothèque (B), la piscine (P) et le lycée (L). Chacun de ces lieux est désigné par son initiale. Le tableau ci-dessous donne les rues existant entre ces lieux.

	B	C	L	M	P
B		X		X	X
C	X		X	X	
L		X		X	
M	X	X	X		X
P	X			X	

1. Dessiner un graphe représentant cette situation.
2. Montrer qu'il est possible de trouver un trajet empruntant une fois et une seule toutes les rues de ce plan. Justifier. Proposer un tel trajet.

   Est-il possible d'avoir un trajet partant et arrivant du même lieu et passant une fois et une seule par toutes les rues ?

3. Dimitri habite dans cette ville ; le graphe ci-contre donne le **nouveau** plan du quartier avec les sens de circulation dans les différentes rues et le temps de parcours entre les différents lieux.



   Dimitri désire prendre sa voiture pour se rendre de son domicile noté D jusqu'à la piscine.

   Proposer un trajet le plus court possible lui permettant de se rendre de son domicile à la piscine.

   La réponse proposée devra être justifiée par un algorithme.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Étude statistique

Le but de ce problème est de modéliser l'évolution de la cotation d'une action en Bourse.

On ne fera qu'un seul dessin qui sera compété tout au long des différentes questions. Les parties sont indépendantes.

La société « T–E S » est entrée en Bourse en 1995. Le tableau suivant donne la valeur d'une action en euros le 1[er] janvier de chaque année.

Année	1995	1996	1997	1998	1999
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4
Valeur de l'action en euros y_i	32	57	78	90	110

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$, le plan étant rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 10 euros sur l'axe des ordonnées).
2. Le graphique permet d'envisager un ajustement affine.
   a. Calculer les coordonnées du point moyen G. Placer ce point sur le graphique précédent.
   b. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x (les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés).
   c. En supposant que ce modèle reste valable jusqu'en 2003, quelle serait la valeur, en euros, d'une action de cette société en 2003 ?
3. En fait, suite à un retournement de tendance, la valeur de l'action a commencé à baisser à partir de 1999 comme le montre le tableau suivant (valeur au 1er janvier)

Année	1999	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année x_i	4	5	6	7	8
Valeur de l'action en euros y_i	110	50	23	15	11

   a. Compléter le nuage de points à l'aide de ces nouvelles valeurs.
   b. Expliquer pourquoi l'ajustement précédent ne semble pas pertinent.

Partie B

Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} f(x) & = & 18,9x+35,6 & \text{si} & x\in]0\ ;\ 4[\\ f(x) & = & \mathrm{e}^{-0,58x+6,85} & \text{si} & x\in]14\ ;\ +\infty[\end{array}\right.$$

On suppose que f modélise l'évolution du cours de l'action à partir de l'année 0.

1. a. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;4]$.
   b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.
   Étudier les variations de f sur $]4\ ;\ +\infty[$ puis dresser son tableau de variations sur cet intervalle.
2. Tracer la courbe Γ représentative de la fonction f sur le graphique précédent. f est-elle continue sur $[0\ ;\ +\infty[$?
3. Calculer, arrondie au centième, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[5\,;10]$. On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ est égale à $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Interpréter ce résultat.
4. Résoudre l'inéquation : $f(x) \leqslant 1,5$.
   À partir de quelle année la valeur de l'action sera-t-elle inférieure à 1,50 euro ?

Baccalauréat ES Centres étrangers juin 2003

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Aucun détail des calculs statistiques effectués à la calculatrice n'est demandé dans cet exercice. Sauf indication contraire, les résultats seront arrondis à 10^{-4}.

Le tableau suivant donne, en millions, la population mondiale de 1400 à 2000.

Année	Rang x_i de l'année	Population y_i
1400	0	374
1500	100	458
1600	200	580
1800	400	958
1900	500	1 650
1950	550	2 519
1970	570	3 691
1980	580	4 430
1990	590	5 255
2000	600	6 057

Source : site internet de l'INED (Institut national des études démographiques)

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ en utilisant le repère semi-logarithmique joint en annexe.
2. On décide de faire un ajustement exponentiel, en ignorant les quatre premières données. On pose $z_i = \ln(y_i)$.

   a. Reproduite sur la copie et compléter le tableau suivant par les valeurs z_i.

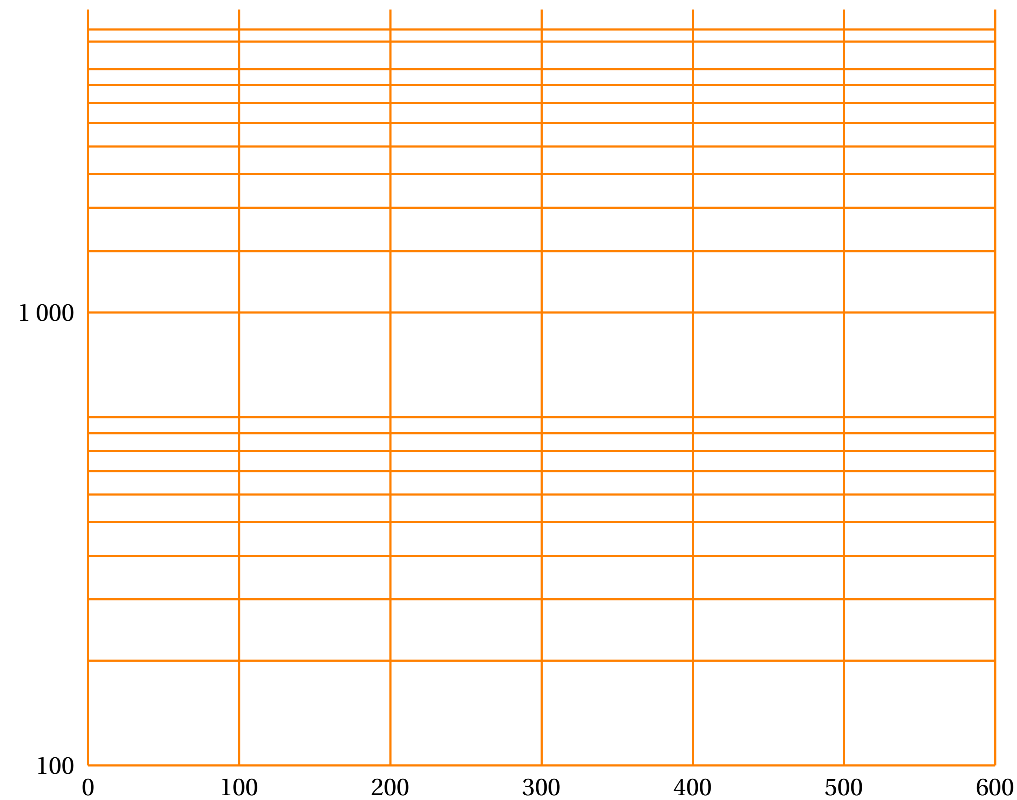
Rang x_i de l'année	500	550	570	580	590	600
$z_i = \ln(y_i)$						

   b. Donner une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés.

   c. En déduire une relation entre y et x de la forme $y = b \times a^x$, où a et b sont deux réels à déterminer.

   d. Utiliser cet ajustement pour estimer, au million près, la population mondiale en 2010.

Annexe à compléter et à remettre avec la copie



EXERCICE 2 **6 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans une station-service, la probabilité que n clients se présentent pendant une période de 10 minutes est donnée par le tableau suivant :

n	0	1	2
Probabilité	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$

1. Justifier que ce tableau définit une loi de probabilité. Calculer l'espérance de cette loi et interpréter le résultat.

On note C_n l'évènement « n clients se présentent pendant une période de 10 minutes ».

Lorsqu'un client se présente, la probabilité qu'il prenne du gazole est $\frac{2}{5}$ et on note D_p l'évènement : « p clients ont pris du gazole pendant une période de 10 minutes ».

On rappelle que $P_{\text{B}}(\text{A})$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que B est réalisé.

2. On sait que deux clients se présentent pendant une période de 10 minutes.

a. Calculer la probabilité que ces deux clients prennent du gazole.

b. Montrer que la probabilité $P_{C_2}(D_1)$ qu'un seul de ces deux clients prenne du gazole est égale à $\frac{12}{25}$.

3. Les probabilités de l'évènement D sachant que C, est réalisé pour toutes les valeurs possibles de p et n, seront présentées dans le tableau suivant :

	C_0	C_1	C_2
D_0	1		
D_1	0		$\frac{12}{25}$
D_2	0	0	

a. Justifier les valeurs 0 présentes dans le tableau.

b. Justifier la valeur 1 correspondant à $P_{C_0}(D_0)$.

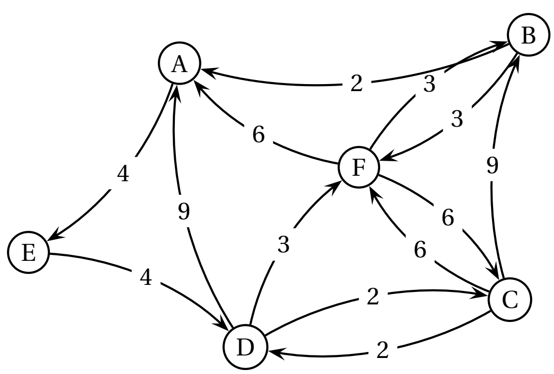
c. Reproduire le tableau sur la copie en complétant les valeurs manquantes (on les donnera sous forme de fractions).

4. Déterminer la probabilité de l'évènement D.

EXERCICE 2 **6 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un livreur d'une société de vente à domicile doit, dans son après- midi, charger son camion à l'entrepôt noté A, livrer cinq clients que nous noterons B, C, D, E et F, puis retourner à l'entrepôt. Le réseau routier, tenant compte des sens de circulation, et les temps de par- cours (en minutes) sont indiqués sur le graphe G suivant :



1. Donner la matrice M associée au graphe G.
On utilisera le modèle suivant :

	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

2. On donne la matrice M^6 :

$$M^6 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 & 3 & 4 & 6 \\ 19 & 11 & 12 & 9 & 6 & 16 \\ 36 & 28 & 23 & 22 & 18 & 34 \\ 37 & 24 & 25 & 17 & 15 & 31 \\ 15 & 12 & 9 & 10 & 8 & 15 \\ 28 & 22 & 19 & 15 & 15 & 26 \end{pmatrix}$$

On s'intéresse aux chemins partant de l'entrepôt A et se terminant en A.

a. Combien existe-t-il de chemins de longueur 6 reliant A à A ?

b. Citer ces chemins.

c. Parmi ceux qui passent par tous les sommets du graphe, lequel minimise le temps de parcours ?

d. Quelle conséquence peut tirer le livreur du dernier résultat ?

3. Au départ de sa tournée, le livreur a choisi de suivre l'itinéraire le plus rapide. Malheureusement, le client C n'est pas présent au passage du livreur et celui-ci décide de terminer sa livraison par ce client. Indiquer quel est le chemin le plus rapide pour revenir à l'entrepôt A à partir de C. La réponse devra être justifiée.

PROBLÈME — 10 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + 100\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 1 cm pour 1 unité en abscisse ; 1 cm pour 10 unités en ordonnée).

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.

2. Montrer que la droite D d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.

3. Calculer la dérivée f' et étudier les variations de f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

4. Tracer $\mathcal{C}_f$ et D dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ pour x appartenant à $[1~;~18]$.

5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 50$ sur l'intervalle $[1~;~18]$.

6. Calculer la valeur exacte du nombre $\text{M} = \dfrac{1}{17}\displaystyle\int_0^{18} f(x)\,\mathrm{d}x$, puis donner sa valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Partie B

Modélisation d'un coût

Un artisan confiseur qui propose des chocolats « faits maison » en fabrique de 1 à 18 kg par jour. Le coût moyen de fabrication d'un kilogramme de chocolats est exprimé en euro. Il est modélisé par la fonction f étudiée dans la **partie A**, où x désigne la masse en kg de chocolats fabriqués ($1 \leqslant x \leqslant 18$).
Dans la suite, on utilisera les résultats de la **partie A**.

1. **a.** Déterminer, à un euro près, le coût moyen de fabrication pour 6 kg fabriqués.

b. Quelle est la quantité à fabriquer pour que le coût moyen soit minimum ?

c. Quel est alors ce coût ?

2. L'artisan vend ses chocolats au prix de 50 € le kilogramme.
Quelle quantité minimale doit-il fabriquer pour faire un bénéfice ?

3. Quelle est pour l'artisan la valeur moyenne du coût de fabrication d'un kilogramme de chocolats ?

Baccalauréat ES Métropole juin 2003

EXERCICE 1 **4 points**

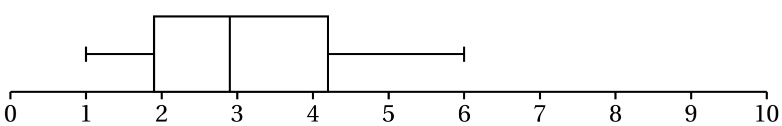
Commun à tous les candidats

Les guichets d'une agence bancaire d'une petite ville sont ouverts au public cinq jours par semaine : les mardi, mercredi, jeudi, vendredi et samedi.
Le tableau ci-dessous donne la répartition journalière des 250 retraits d'argent liquide effectués aux guichets une certaine semaine.

Jour de la semaine	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi
Rang i du jour	1	2	3	4	5
Nombre de retraits	37	55	45	53	60

On veut tester l'hypothèse « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine ». On suppose donc que le nombre des retraits journaliers est égal à $\dfrac{1}{5}$ du nombre des retraits de la semaine.
On pose $d^2_{\text{obs}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{5}\left(f_i - \dfrac{1}{5}\right)^2$ où f_i est la fréquence des retraits du i-ème jour.

1. Calculer les fréquences des retraits pour chacun des cinq jours de la semaine.
2. Calculer alors la valeur de $1\,000d^2_{\text{obs}}$ (la multiplication par 1 000 permet d'obtenir un résultat plus lisible).
3. En supposant qu'il y a équiprobabilité des retraits journaliers, on a simulé 2 000 séries de 250 retraits hebdomadaires.
   Pour chaque série, on a calculé la valeur du $1\,000d^2_{\text{obs}}$ correspondant. On a obtenu ainsi 2 000 valeurs de $1\,000d^2_{\text{obs}}$.
   Ces valeurs ont permis de construire le diagramme en boîte ci-dessous où les extrémités des « pattes » correspondent respectivement au premier décile et au neuvième décile.



   Lire sur le diagramme une valeur approchée du neuvième décile.
4. En argumentant soigneusement la réponse, dire si pour la série observée au début, on peut affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 10 %, que « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine » ?

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une enquête a montré que :

- avant de passer l'épreuve théorique du permis de conduire (c'est-à-dire le code) 75 % des candidats ont travaillé très sérieusement cette épreuve,
- lorsqu'un candidat a travaillé très sérieusement, il obtient le code dans 80 % des cas,
- lorsqu'un candidat n'a pas beaucoup travaillé, il n'obtient pas le code dans 70 % des cas.

On interroge au hasard un candidat qui vient de passer l'épreuve théorique (on rappelle que les résultats sont connus dès la fin de l'épreuve).
On note T l'évènement « le candidat a travaillé très sérieusement »
R l'évènement « le candidat a réussi le code ».
Les probabilités seront données sous forme décimale, arrondies éventuellement au millième.

1. Traduire les données à l'aide d'un arbre pondéré.

2. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement « le candidat a travaillé très sérieusement et il a obtenu le code ».

b. Montrer que la probabilité $p(\mathrm{R})$ qu'un candidat réussisse à l'épreuve théorique est égale à 0,675.

3. Le candidat interrogé vient d'échouer. Quelle est la probabilité qu'il ait travaillé très sérieusement ?

4. À la sortie de l'épreuve, on interroge au hasard et de façon indépendante 3 candidats (on suppose que ce choix peut être assimilé à un tirage successif avec remise).

Calculer la probabilité p_3 d'interroger au moins une personne ayant échoué à l'épreuve.

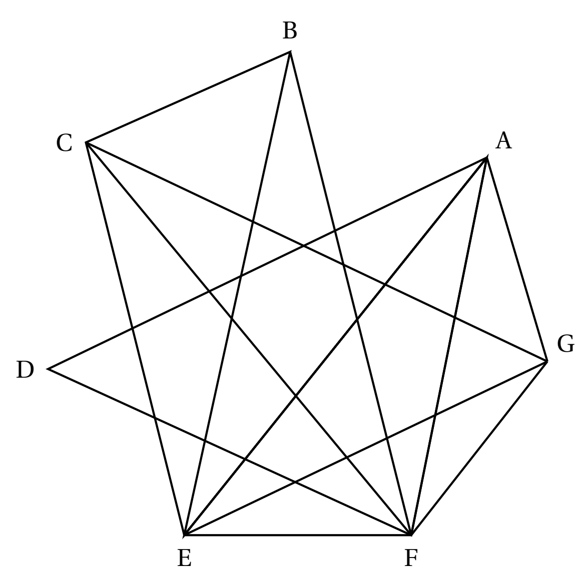
5. On interroge désormais au hasard et de façon indépendante n candidats.

Quelle est la probabilité p_n d'interroger au moins une personne ayant échoué à l'épreuve ?

EXERCICE 2 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle. À ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale Luther Allunison (A), John Biaise (B), Phil Colline (C), Bob Ditlâne (D), Jimi Endisque (E), Robert Fripe (F) et Rory Garaguerre (G).
Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle. Les arêtes du graphe Γ ci-dessous indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.



Graphe Γ

1. Déterminer la matrice associée au graphe Γ (les sommets de Γ étant classés dans l'ordre alphabétique).

2. Quelle est la nature du sous-graphe de Γ' constitué des sommets A, E, F et G ?
Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique $\chi(\Gamma)$ du graphe Γ ?

3. Quel est le sommet de plus haut degré de Γ ?
En déduire un encadrement de $\chi(\Gamma)$.

4. Après avoir classé l'ensemble des sommets de Γ par ordre de degré décroissant, colorier le graphe Γ figurant en annexe.

5. Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ?
Proposer une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.

PROBLÈME **11 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0\,;50]$ par

$$g(x) = (x-15)^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}.$$

1. On note g' la fonction dérivée de g sur $[0\,;50]$.

a. Montrer que $g'(x) = \dfrac{1}{3}(x-15)(21-x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$.

b. Étudier le signe de g' sur $[0\,;50]$.

c. Dresser le tableau de variations de g sur $[0\,;50]$.

2. Soit G la fonction définie pour tout x de $[0\,;50]$ par

$$G(x) = 3(-x^2+24x-153)\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}.$$

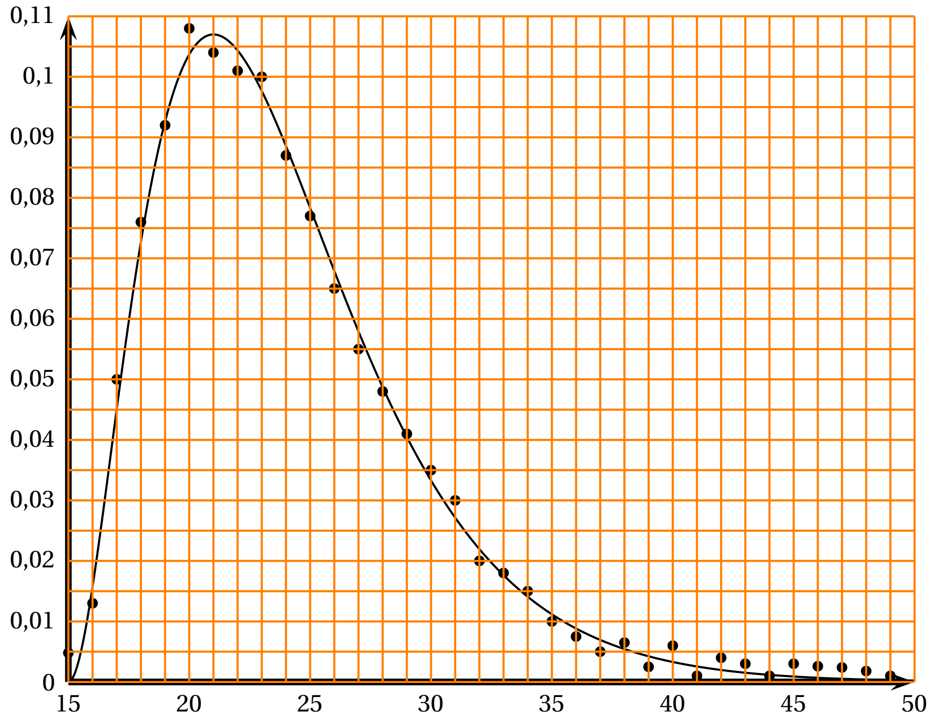
Montrer que G est une primitive de g sur $[0\,;50]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[15\,;49]$ par $f(x) = \dfrac{107\mathrm{e}^7}{36000}g(x)$.

1. Justifier que f admet les mêmes variations que g sur l'intervalle $[15\,;49]$.

2. La représentation graphique de f dans un repère orthogonal $\mathcal{R}$ est donnée ci-dessous.



Calculer l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine plan délimité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 15$ et $x = 49$ (on utilisera le résultat de la **question A. 2)**).

On donnera la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis sa valeur arrondie à 10^{-1}.

Partie C

Dans une population et pour une génération donnée, le taux de fécondité $t(k)$ à l'âge k où k est un entier compris entre 15 et 49, est le rapport entre le nombre de naissances chez les mères d'âge k et le nombre de femmes d'âge k de cette génération.
Le nuage de points représentant le taux de fécondité d'une population pour une génération donnée (l'âge étant représenté en abscisse et le taux de fécondité en ordonnée) est représenté dans le repère $\mathscr{R}$.
On appelle descendance finale la somme des taux de fécondité par âge $t(k)$; elle est donc égale à $\displaystyle\sum_{k=15}^{49} t(k)$. On suppose qu'elle peut être modélisée par l'aire délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 15$ et $x = 49$.

1. Utiliser les résultats de la **partie B** afin d'estimer la descendance finale de cette génération (on donnera un résultat arrondi à 10^{-1}).
2. Une valeur arrondie à 10^{-2} de la somme des taux de fécondité par âge est 1,20.
   Comparer ce résultat avec celui obtenu à la question précédente.
   Le modèle choisi paraît-il adapté ?
3. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[15 ; 49]$. Peut-on affirmer que la descendance finale est égale à cette valeur moyenne ?
   Justifier votre réponse.

Baccalauréat ES La Réunion juin 2003

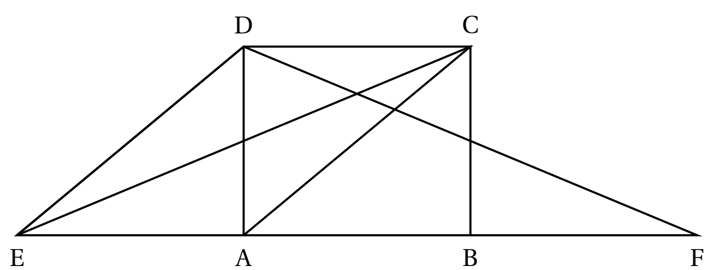
EXERCICE 1
Commun à tous les candidats

Les membres d'un club sportif se présentent à l'accueil soit pour jouer au golf soit pout profiter de la salle de musculation (une activité excluant l'autre).
La probabilité qu'il ne pleuve pas, en automne, dans cette région est égale à 0,8. En automne un membre se présente.
S'il pleut, il joue au golf dans 30 % des cas.
S'il ne pleut pas, il s'enferme dans la salle de musculation dans 20 % des cas.
On note B l'évènement « il pleut »,
G l'évènement « le membre du club joue au golf ».

1. **a.** Traduire la situation ci-dessus à l'aide d'un arbre pondéré.
   b. Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à 0,7.
   c. Déterminer la probabilité qu'il pleuve sachant que le membre du club se présentant à l'accueil ne joue pas au golf.
2. Trois membres se présentent successivement et indépendamment le uns des autres. On suppose que, pour chacun des trois, la probabilité qu'il joue au golf est 0,7.
   On s'intéresse au nombre de golfeurs parmi ces trois personnes.
   a. En utilisant un arbre pondéré, montrer que la probabilité p_2 que deux membres exactement jouent au golf est de $0,441$.
   b. Établir la loi de probabilité associée à cette situation.
   c. Déterminer l'espérance mathématique et interpréter le résultat obtenu.
   d. Déterminer la probabilité qu'au moins un des trois membres ne joue pas au golf.

EXERCICE 2

Une grande surface est conçue de telle façon que six secteurs (alimentation, hi-fi, etc.) notés A, B, C, D, E, F sont reliés par des allées selon le graphe ci-dessous.



1. **a.** Recopier et compléter le tableau suivant :

Secteur	A	B	C	D	E	F
Degré						

   b. Le graphe $\mathcal{G}$ est connexe. Pourquoi ?

2. Un visiteur désire parcourir l'ensemble des allées en ne passant par celles-ci qu'une seule fois.

   a. Démontrer que son souhait est réalisable.

   b. Donner un exemple d'un tel parcours.

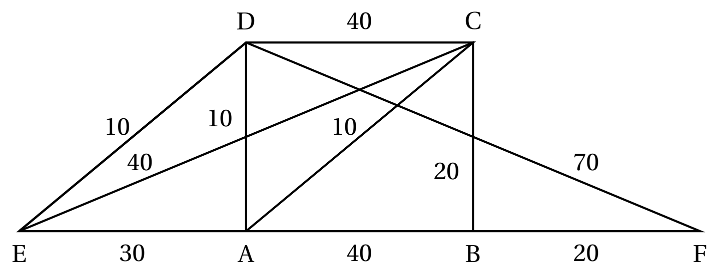
3. Le directeur désire associer chaque secteur à une couleur de sorte que deux secteurs (sommets) ne portent pas la même couleur.

   a. Démontrer que le nombre chromatique n du graphe vérifie $n \geqslant 4$.

   b. Expliquer pourquoi $n \leqslant 5$.

   c. Proposer un coloriage du graphe permettant de déterminer son nombre chromatique.

4. Une famille se trouve dans le secteur E et doit se rendre dans le secteur F. Cela étant, les parents connaissent suffisamment les allées pour savoir que, pour chacune d'elles, les enfants ne résistant pas, il leur faudra débourser une somme (en euros) précisée dans le graphe ci-dessous.



(AB = 40 ; AC = 10 ; AD = 10 ; AE = 30 ; BC = 20 ; BF = 20 ; CD = 40 ; CE = 40 ; DE = 10 ; DF = 70)

Indiquer une chaîne qui minimise la dépense de cette famille.

PROBLÈME

Partie A - Étude d'une fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 15(0,4 - x)\mathrm{e}^{-x}$$

et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité 2 cm).

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Soit f' la fonction dérivée de f.

   a. Vérifier que, pour tout x réel, on a $f'(x) = 15(x - 1,4)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$.

   c. Établir le tableau de variations de f.

3. Représenter ta portion de la courbe $(\mathscr{C})$ pour x compris entre 0 et 7.

   a. Montrer que l'équation $f(x) = 4,5$, admet, entre 0 et 7, deux solutions α et β (on notera α la plus petite des deux solutions).

   b. Donner la valeur arrondie de α à 10^{-2} près, en présentant brièvement la méthode utilisée.

   c. Donner la valeur arrondie de β à 10^{-2} près.

d. Quel est l'ensemble des solutions, dans l'intervalle $[0\,;\,7]$, de l'inéquation $f(x) \leqslant 4,5$?

Partie B - Application

La fonction f est la fonction coût marginal C_M de fabrication d'un produit. x est exprimé en tonnes (x compris entre 0 et 7), et le coût est exprimé en milliers d'euros.

1. **a.** Pour quelle production le coût marginal est-il minimum et quel est ce prix ?

b. Pour quelles productions le coût marginal est-il inférieur à 4,5 ? (on donnera chacune des bornes de l'intervalle à 10^{-2} près)

2. La fonction coût total C_T est une primitive de la fonction coût marginal.

a. Soit g et h les fonctions définies sur $[0\,;\,7]$ par :

$$g(x) = 15(0,4 - x)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad h(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x}.$$

h' étant la fonction dérivée de h, calculer $h'(x)$ et déterminer a et b pour que h soit une primitive de g.

b. En déduire que $C_T(x) = (15x + 9)\mathrm{e}^{-x} + 6x + k$.

c. Déterminer k sachant que les frais fixes s'élèvent à 2 000 euros (c'est-àdire que $C_T(0) = 2$).

∽ Baccalauréat ES Liban juin 2003 ∾

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Aucun détail des calculs statistiques effectués à la calculatrice n'est demandé dans cet exercice.
Partie A

Le tableau suivant donne l'évolution de la production annuelle de turbots dans une ferme aquacole.

Année	1997	1998	1999	2000	2001	2002
rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
production y_i	650	760	1 190	1 620	2 600	5 050

1. Construire le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal R : sur l'axe des abscisses, on placera O à l'origine et on choisira 2 cm pour une année, sur l'axe des ordonnées, on placera 600 à l'origine et on choisira 1 cm pour 200 turbots.
2. D'après l'allure du nuage quel type d'ajustement peut-on envisager ?

Partie B

Les résultats des questions **1., 2. et 3.** seront arrondis à 10^{-3}.

1. On pose $z_i = \ln(y_i)$.
   Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant :

Année	1997	1998	1199	2000	2001	2002
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
z_i						

   Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points associé à la série $(x_i\ ;\ z_i)$.

   a. En utilisant la calculatrice, déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement affine de z en x.

   b. Exprimer y en fonction de x.
   En utilisant la question précédente, répondre aux deux questions suivantes :
   Quelle production peut-on prévoir en 2005 ?
   À partir de quelle année peut-on prévoir que la production annuelle dépassera 30 000 turbots ?

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un théâtre propose deux types d'abonnements pour une année : un abonnement A donnant droit à six spectacles ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles. On considère un groupe de 2 500 personnes qui s'abonnent tous les ans. n étant un entier naturel, on note :

a_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement A l'année n ;
b_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement B l'année n ;
P_n la matrice $[a_n\ b_n]$ traduisant l'état probabiliste à l'année n.
Tous les ans 85 % des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55 % des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante. Les autres personnes changent d'abonnement.

1. On suppose que, l'année zéro, 1 500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1 000 l'abonnement B. Déterminer l'état initial $P_0 = [a_0 \quad b_0]$.
2. **a.** Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.

   b. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.

   c. En déduire le nombre d'abonnés pour chaque type d'abonnement l'année un.
3. Soit $P = [x \quad y]$ l'état stable, où x et y sont deux nombres réels positifs tels que $x + y = 1$.

   Justifier que x et y vérifient l'équation $x = 0,85x + 0,45y$.

   Déterminer x et y.

   En déduire la limite de la suite (a_n) quand n tend vers plus l'infini.

   Interpréter le résultat précédent en terme de nombre d'abonnements de type A.

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

La commercialisation d'un article sur un marché suit une fonction d'offre notée f et une fonction demandée notée g.
Elle sont définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{8} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{120}{e^x + 15}$$

où x représente la quantité exprimée en milliers d'articles, $f(x)$ représente le prix de vente exprimé en euro pour une quantité x offerte, et $g(x)$ représente le prix de vente exprimé en euro pour une quantité x demandée.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2cm).
On désigne respectivement par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans ce repère.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ sur l'annexe jointe au sujet.
L'annexe sera complétée et jointe à la copie.

Partie A Étude de la fonction demande

Détermination de la quantité échangée et du prix d'équilibre du marché

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

   En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.
2. g' désigne la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

   Justifier que : $g'(x) = -\dfrac{120e^x}{(e^x + 15)^2}$.
3. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $[0 ; +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de g sur $[0 ; +\infty[$.

4. **a.** Reproduire sur la copie et compléter le tableau de valeurs (arrondir les résultats à 10^{-1}).

x	0	0,5	1	2	3	3,5	4	5	6	7
$g(x)$										

b. Calculer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.

c. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ et la tangente T sur l'annexe jointe au sujet.

5. On admet que sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = g(x)$ a une solution unique n appelée quantité échangée. On note $p = f(q) = g(q)$ le prix d'équilibre correspondant.

a. Faire apparaître sur le graphique les valeurs p et q.

b. Vérifier que $q = \ln(25)$.
En déduire la valeur de p.

Partie B Calcul du « surplus du consommateur »

1. $\mathscr{D}$ est le domaine du plan défini par $\{M(x\ ;\ y) / 0 \leqslant x \leqslant q \quad \text{et} \quad p \leqslant y \leqslant g(x)\}$, où p et q sont les valeurs déterminées dans la partie **A. 5.**.
Hachurer ce domaine $\mathscr{D}$ sur l'annexe jointe au sujet.

2. Soit G la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$G(x) = 8\left[x - \ln\left(\mathrm{e}^x + 15\right)\right]$$

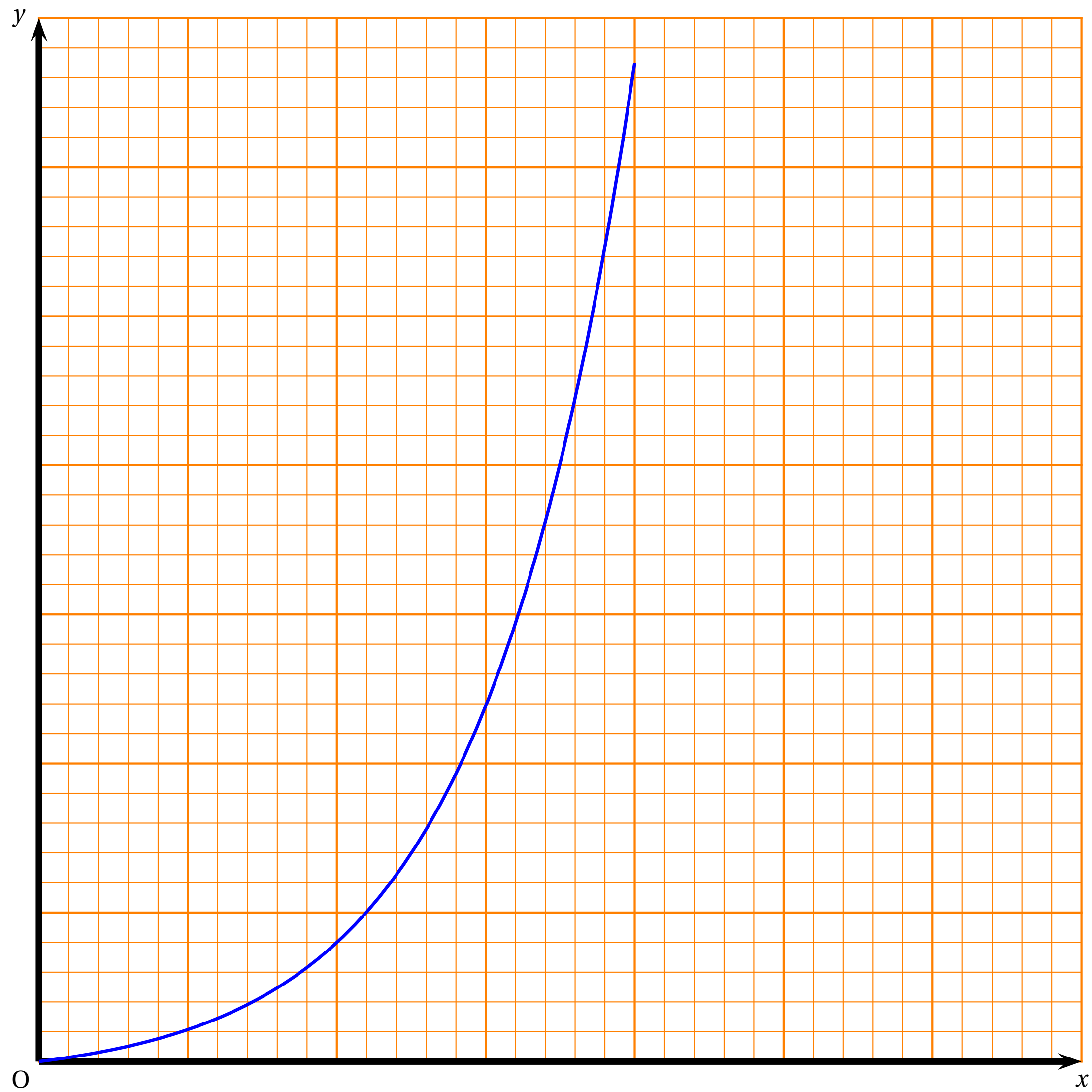
Démontrer que G est une primitive de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. On appelle « surplus du consommateur » (en milliers d'euro) le nombre :

$$R = \int_0^q g(x)\,\mathrm{d}x - pq$$

Justifier que R représente, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$.
Calculer la valeur exacte de R.
Donner une valeur approchée de R à l'euro près.

Annexe à rendre avec la copie



Baccalauréat ES Polynésie juin 2003

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Évolution de l'indice IMVP
L'indice IMVP (international motor vehicle program) est un indicateur de référence élaboré par le Massachussets Institute of Technology qui mesure en heures le temps de montage moyen d'un véhicule.
Dans une entreprise de construction automobile, on a obtenu le tableau suivant :

année	rang de l'année x_i	temps en heures y_i
1995	5	26,2
1996	6	23,7
1997	7	21,4
1998	8	18,5
1999	9	16,8
2000	10	15,4
2001	11	14,6

(source Renault)

Partie A

Le nuage de points M_i associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans un plan rapporté à un repère orthonormal est donné en annexe.
Les résultats seront arrondis si nécessaire au centième.

1. Calculer les coordonnées du point moyen et le placer sur le graphique.
2. Le nuage de points montre qu'un ajustement affine semble justifié. À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite D d'ajustement affine de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Représenter D sur le graphique.
3. En déduire graphiquement puis par le calcul les prévisions du temps de montage moyen pour l'année 2005 puis l'année 2007, en supposant que le modèle reste valable jusqu'en 2007.
4. Calculer la variation en pourcentage de ce temps de l'année 2000 à l'année 2001.

Partie B

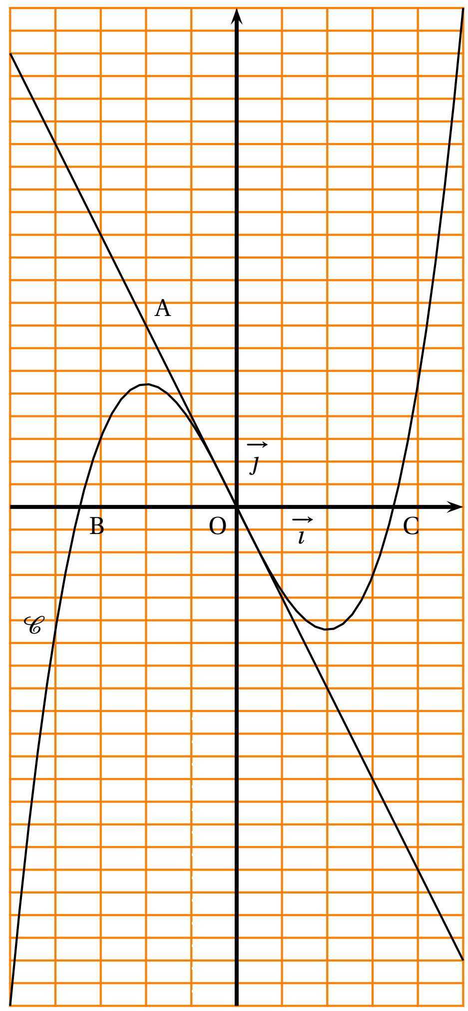
On décide d'approcher ce nuage par un arc de parabole ; pour cela on pose $z = \sqrt{y}$.

1. Donner le tableau des valeurs $(x_i\ ;\ z_i)$. Les valeurs z_i seront arrondies au millième.
   On suppose qu'un ajustement affine de z en x est justifié.
2. Donner une équation de la droite d'ajustement affine obtenue par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au millième).
3. En déduire l'expression de y en fonction de x, puis le temps de montage en 2005 et en 2007 arrondis au dixième.
4. Ces temps sont-ils plus plausibles que ceux obtenus dans la partie A ?
   Expliquer.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

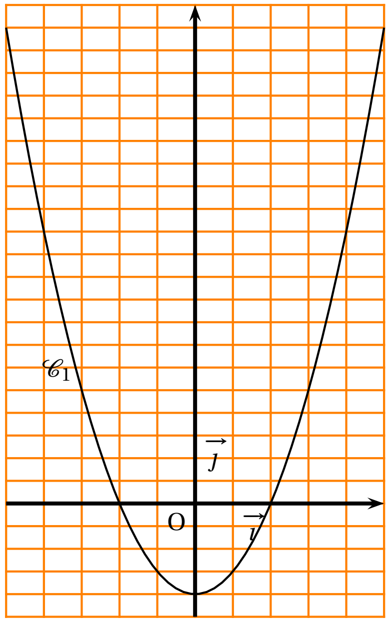
Chaque question comporte trois affirmations repérées par les lettres a, b, c.
Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse sans justification.
Les réponses seront transcrites dans le tableau figurant en annexe.
Soit f une fonction impaire définie et dérivable sur $[-5~;~5]$; on désigne par F une primitive de f sur cet intervalle.
Sur les graphiques ci-dessous, le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est un repère orthogonal.
La courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f.
Le point A a pour coordonnées $(-2~;~8)$, le point B a pour coordonnées $\left(-2\sqrt{3}~;~0\right)$ et le point C a pour coordonnées $\left(2\sqrt{3}~;~0\right)$.
La droite (OA) est la tangente en O à $\mathscr{C}$.



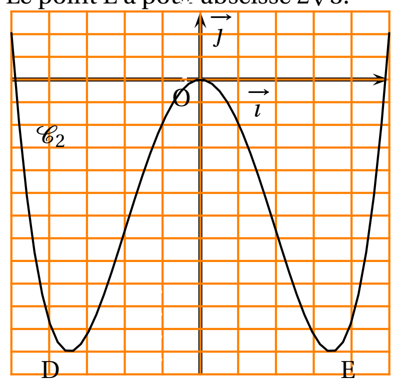
1. a. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de F'.
b. $f'(0) = -2$.
c. f est négative ou nulle sur $[-1~;~1]$.

2. a. Soit S l'aire , exprimée en unités d'aire, de la portion de plan délimitée pu $\mathscr{C}$, l'axe $\left(O~;~\vec{\imath}\right)$ et la droite d'équation $x = -2$.
On a : $0 \leqslant S \leqslant 2$.
b. $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
c. $F(2) - F(0) < 0$.

3. Parmi les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ l'une représente f' et l'autre représente F.
a. Une équation de $\mathscr{C}_1$ est $y = x^2 - 2$.
b. $\mathscr{C}_2$ est la courbe représentative de f'.
c. $\displaystyle\int_{0}^{2\sqrt{3}} f(x)\,\mathrm{d}x = -10$.



$\mathscr{C}_2$ est la représentation graphique d'une fonction dérivable.
Le point D a pour abscisse $-2\sqrt{3}$.
Le point E a pour abscisse $2\sqrt{3}$.



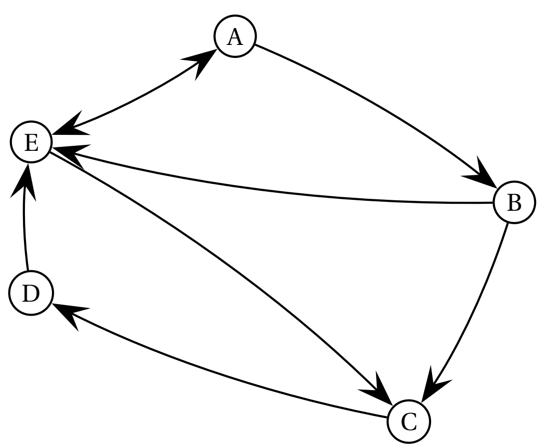
EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Chaque question comporte trois affirmations repérées par les lettres a, b, c.
Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie oufausse sans justification.

Les réponses seront transcrites dans le tableau figurant en annexe.

Dans une ville la circulation réglementée par des sens uniques est représentée par le graphe G ci-dessous dont les sommets illustrent les carrefours existant entre les rues.



1. Les sommets étant classés dans l'ordre alphabétique,
0 1 0

a. la matrice associée au graphe G est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b. la matrice associée au graphe G est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c. la matrice associée au graphe G est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

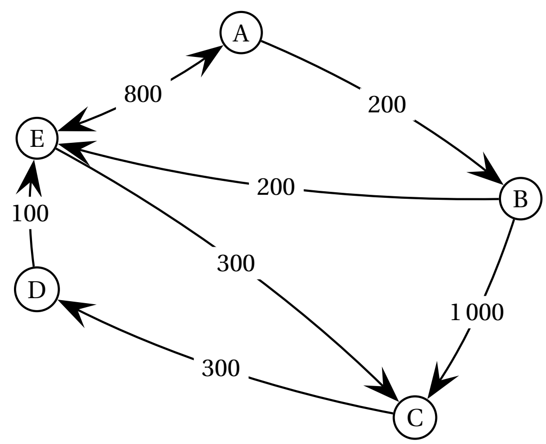
2. Le nombre de chaînes de longueur 3 qui vont du sommet A vers le sommet D du graphe G est :

a. 3

b. 2

c. 4

3. Le graphe G est pondéré par la distance exprimée en mètres entre deux carrefours comme suit :



Un automobiliste est au carrefour A et cherche à rejoindre le carrefour D.

Le poids (minimum) en mètres de la plus courte chaîne reliant le sommet A au sommet D est :

a. 1 400

b. 1 000

c. 900

4. En tenant compte du sens de circulation la plus grande distance parcourue est :

a. de A vers D.

b. de B vers D.

c. de C vers B.

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = 2\ln(t+1)+1 \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{4}{1+\mathrm{e}^{-t}}.$$

1. Étude de la fonction f

a. Étudier la limite de f en $+\infty$.

b. Étudier le sens de variation de f.
Dresser le tableau de variations de f.

2. Étude de la fonction g

a. Étudier la limite de g en $+\infty$.

b. Étudier le sens de variation de g.
Dresser le tableau de variations de g.

3. Étude graphique
Sur la feuille donnée en annexe, la courbe $\mathcal{C}$ est la représentation graphique de f dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On appelle Γ la courbe représentative de la fonction g dans ce repère.

a. Une des deux courbes admet une asymptote. Préciser laquelle et tracer cette asymptote dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

b. Tracer la courbe Γ.

c. À l'aide du graphique, donner une valeur approchée à $0,1$ près de l'abscisse α du point d'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et Γ, puis étudier graphiquement le signe de $g(t) - f(t)$ suivant les valeurs de t.

4. Calcul de primitives

a. Montrer que $g(t) = \dfrac{4\text{e}^t}{\text{e}^t + 1}$ pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$.
En déduire une primitive de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. Soit H la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$H(t) = (t+1)\ln(1+t) - t.$$

Déterminer la dérivée de H et en déduire une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

5. Application économique
Un plan de restructuration dans une industrie est établi sur cinq ans. On admet que $f(t)$ modélise le nombre d'emplois créés, en milliers d'emplois, et que $g(t)$ représente le nombre d'emplois supprimés, en milliers d'emplois, t représentant le temps en années.
On admet que, sur cinq ans, la variation du nombre d'emplois est donnée par :

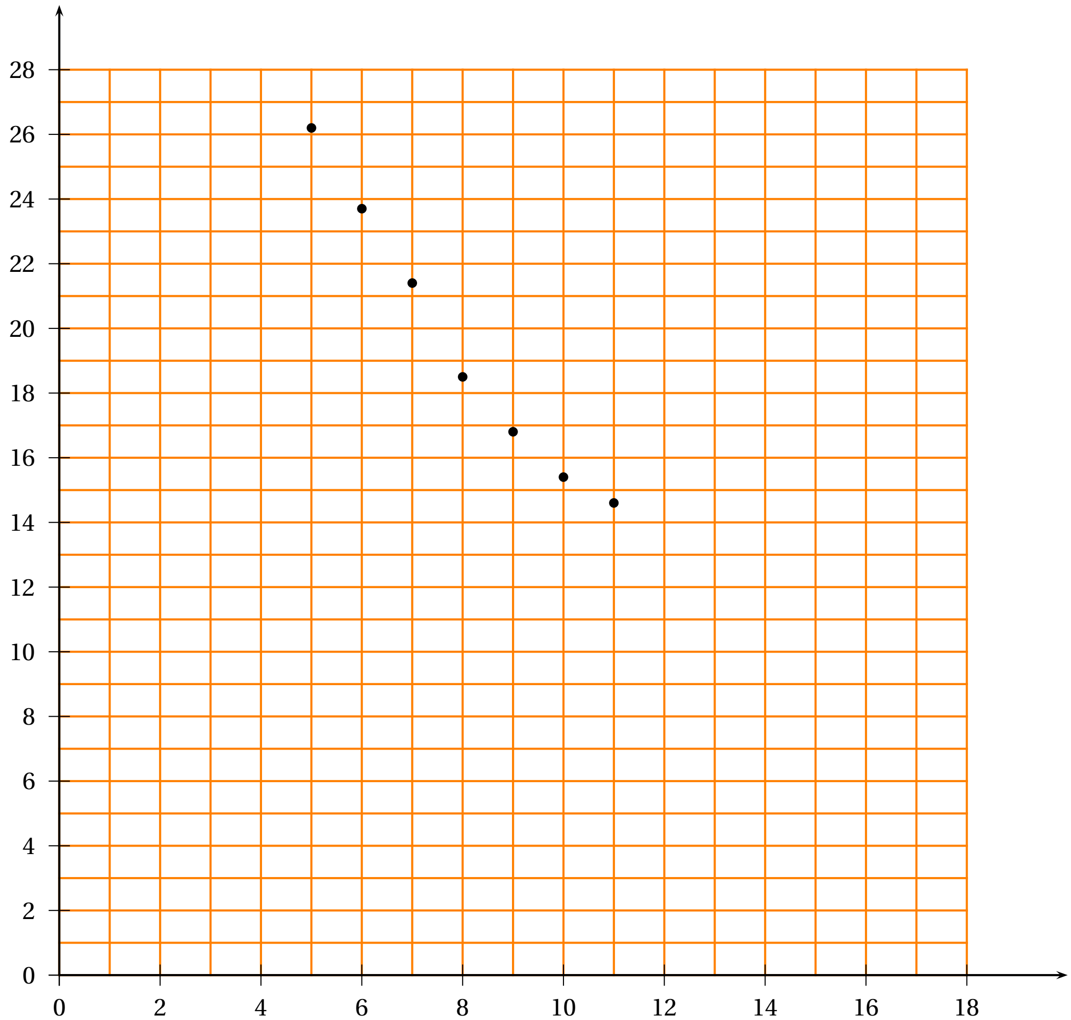
$$\text{I} = \int_0^5 [f(t) - g(t)]\,\text{d}t.$$

a. Calculer I et donner la variation du nombre d'emplois sur les cinq ans à la dizaine d'emplois près.
Interpréter ce résultat.

b. Déterminer, à l'aide de la **question 3**, le temps nécessaire, exprimé en mois, pour que le nombre d'emplois créés soit supérieur au nombre d'emplois supprimés.

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 1



Exercice 2

Question 1		Vrai ou Faux
	a	
	b	
	c	
Question 2		Vrai ou Faux
	a	
	b	
	c	
Question 3		Vrai ou Faux
	a	
	b	
	c	

Problème