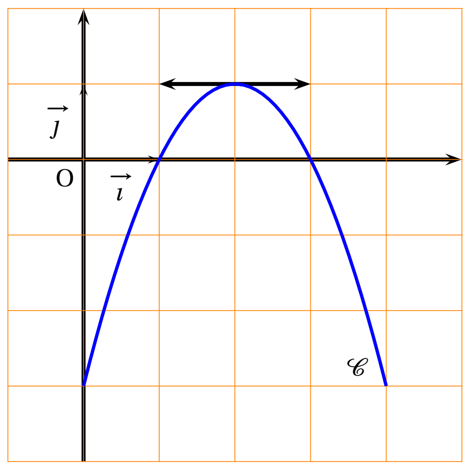
Baccalauréat ES 2005

L'intégrale de septembre 2004 à juin 2005

EXERCICE 1 **5 points**

Soit u une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;4]$.
La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique de cette fonction dans le repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Elle passe par les points de coordonnées respectives $(0\,;\,-3)$, $(1\,;\,0)$, $(2\,;\,1)$, $(3\,;\,0)$ et $(4\,;\,-3)$.
Elle admet, au point d'abscisse 2, une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

1. Sans justification
   - **a.** Dresser le tableau de variations de la fonction u, en précisant le signe de sa dérivée.
   - **b.** Dresser le tableau donnant le signe de la fonction u sur $[0\,;4]$.



2. On considère la fonction $f = \ln \circ u$ (fonction composée de u suivie de ln).
   On admet que f est dérivable en tout point où elle est définie.
   En justifiant soigneusement votre choix, dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse
   - **a.** f est définie sur $]0\,;4[$.
   - **b.** f est positive ou nulle sur son ensemble de définition.
   - **c.** $f'(2) = 0$.
   - **d.** La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe représentative de f.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **5 points**

Pour fabriquer un appareil on utilise successivement et dans cet ordre deux machines M_1 et M_2. La machine M_1 peut provoquer deux défauts d_1 et d_2. Un relevé statistique permet d'estimer que :

- 4 % des appareils présentent le défaut d_1 et lui seul ;
- 2 % des appareils présentent le défaut d_2, et lui seul ;
- 1 % des appareils présentent à la fois les défauts d_1 et d_2.

1. On prélève au hasard un appareil à la sortie de M_1. On note A l'évènement « l'appareil présente le défaut d_1 » ;
   B l'évènement « l'appareil présente le défaut d_2 » ;
   - **a.** Calculer les probabilités des évènements A et B notées respectivement $p(\text{A})$ et $p(\text{B})$.
     Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

b. Soit D l'évènement « l'appareil présente au moins un défaut ».
Montrer que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,07.

c. Quelle est la probabilité pour que l'appareil ne présente aucun défaut.
À la sortie de la machine M_1 les appareils en cours de fabrication passent par la machine M_2 qui peut provoquer un défaut d_3 dans les conditions suivantes :

• 60 % des appareils ayant au moins un défaut en sortant de M_1 présentent le défaut d_3 ;

• 3 % des appareils sans défaut à la sortie de M_1 présentent le défaut d_3.

2. On prélève au hasard un appareil après les passages successifs dans les machines M_1 et M_2.
On note C l'évènement « l'appareil présente le défaut d_3 ».

a. Traduire les informations précédentes à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Quelle est la probabilité qu'un appareil fabriqué soit sans défaut ?

EXERCICE 2 SPÉCIALITÉ **5 points**

Lucien, fumeur impénitent, décide d'essayer de ne plus fumer.
S'il ne fume pas un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0,3.
Par contre, s'il fume un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0,9.
On note F l'évènement « Lucien fume »et $\overline{\text{F}}$ l'évènement contraire.

1. Traduire ces informations à l'aide d'un graphe probabiliste dont les sommets seront notés F et $\overline{\text{F}}$.
On admet que la matrice M associée au graphe est $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'état probabiliste le n-ième jour est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \quad b_n)$ où a_n désigne la probabilité que Lucien fume le n-ième jour et b_n la probabilité que Lucien ne fume pas le n-ième jour.

a. On suppose que le premier jour la probabilité que Lucien fume est 0,2.
Déterminer P_1.

b. Calculer M^2 et en déduire P_3.

c. Déterminer P_{n+1} en fonction de P_n et en déduire la probabilité que Lucien fume le $(n+1)$-ième jour en fonction de a_n et b_n.

d. On considère la matrice ligne $P = (a \quad b)$ où a et b sont deux réels tels que $a + b = 1$.
Déterminer a et b pour que $P = PM$.
En déduire la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3 **10 points**

Une entreprise a lancé sur le marché un produit informatique en 1990.
Une étude statistique a permis d'établir les taux des ménages équipés entre 1993 et 2002.
Les résultats de cette étude sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Année	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Rang de l'année t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Taux de ménages équipés y_i	0,20	0,22	0,32	0,34	0,35	0,43	0,48	0,49	0,53	0,60

Cette entreprise doit prévoir une reconversion dès que 90 % des ménages seront équipés, c'est-à-dire dès que le taux des ménages équipés sera égal à 0,9.
Pour faire cette étude prévisionnelle, elle envisage deux types d'ajustement.
Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
(Unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 20 cm sur l'axe des ordonnées).
Les parties B *et* C *peuvent être traitées indépendamment de la partie* A.

Partie A - Ajustement affine

1. Représenter en couleur le nuage de points associé à la série statistique $\left(t_i, y_i\right)$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
2. Donner une équation de la droite D d'ajustement affine de y en t par la méthode des moindres carrés. On ne demande pas le détail des calculs et les valeurs seront arrondies à 10^{-3}.
3. Représenter D dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
4. Pourquoi cet ajustement ne permet-il pas d'effectuer des prévisions après l'année 2011 ?

Partie B - Ajustement logistique

On suppose que la situation est modélisée par la fonction f, définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, telle que

$$f(t) = \frac{1}{1+4\text{e}^{-0,2t}}.$$

Le nombre $f(t)$ donne en fonction du rang t de l'année le taux des menages équipés.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et en déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote notée Δ dont on donnera une équation.
2. Vérifier que, pour tout réel t de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(t) = \dfrac{0,8\text{e}^{-0,2t}}{\left(1+4\text{e}^{-0,2t}\right)^2}$.
   En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.
3. Tracer $\mathscr{C}$ et Δ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
4. Résoudre algébriquement l'inéquation $f(t) \geqslant 0,9$.

Partie C - Application

Dans cette partie, les pourcentages seront arrondis à l'unité.
On suppose que $f(t)$ est une approximation satisfaisante, au moins jusqu'en 2013, du taux des ménages équipés de ce produit informatique.
À l'aide de cette approximation et des résultats de la **partie B**, déterminer :

1. Le pourcentage des ménages équipés de ce produit informatique en 2008.
2. L'année à partir de laquelle 90 % des ménages seront équipés.

∾ Baccalauréat série ES France septembre 2004 ∾

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie pour tout x élément de $\mathbb{R}$ par $f(x) = 30\mathrm{e}^{-5x}$.
Soit g la fonction définie pour tout x élément de $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{5x} + 1$.
On admet que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Tracer sur la copie dans un même repère orthogonal les représentations graphiques des fonctions f et g sur l'intervalle $[0\,;\,0{,}5]$ (on prendra 20 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses et 0,5 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées).
4. Le but de cette question est de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\text{(E)} : \qquad f(x) = g(x).$$

   a. Montrer que (E) s'écrit aussi : $\left(\mathrm{e}^{5x}\right)2 + \left(\mathrm{e}^{5x}\right) - 30 = 0$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $X^2 + X - 30 = 0$.

   c. En déduire que $\dfrac{\ln 5}{5}$ est l'unique solution de l'équation (E).

5. Dans cette question, on considère la partie du plan située au dessus de l'axe des abscisses.
   Hachurer sur le graphique de la question 3 le domaine situé à la fois sous la courbe de f et sous la courbe de g, et limité par les droites d'équation $x = 0$ et $x = 0{,}5$.
   Calculer, en cm^2, l'aire $\mathscr{A}$ de ce domaine.
   Donner la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$ puis une valeur approchée à 10^{-1} près.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère une grande population d'acheteurs de yaourts.
On suppose que l'effectif de cette population est stable.
Une entreprise commercialise des yaourts sous la marque Y.
30 % des acheteurs de yaourts achètent la marque Y.
L'entreprise décide de faire une campagne publicitaire pour améliorer ses ventes.
Au bout d'une semaine, une enquête indique que :
• 20 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts des autres marques achètent maintenant des yaourts Y.
• 10 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts Y achètent maintenant des yaourts des autres marques.
L'entreprise continue sa campagne publicitaire. On fait l'hypothèse que l'évolution des résultats obtenus à l'issue de la première semaine de campagne publicitaire est la même les semaines suivantes.

1. Dessiner le graphe probabiliste correspondant à cette situation.
2. Soit $X_0 = (0{,}3 \qquad 0{,}7)$ la matrice ligne décrivant l'état initial de la population.

   a. Donner la matrice de transition (notée A) associée au graphe précédent.

   b. Déterminer la probabilité qu'un acheteur de yaourts choisi au hasard après deux semaines de campagne publicitaire, achète des yaourts de la marque Y.

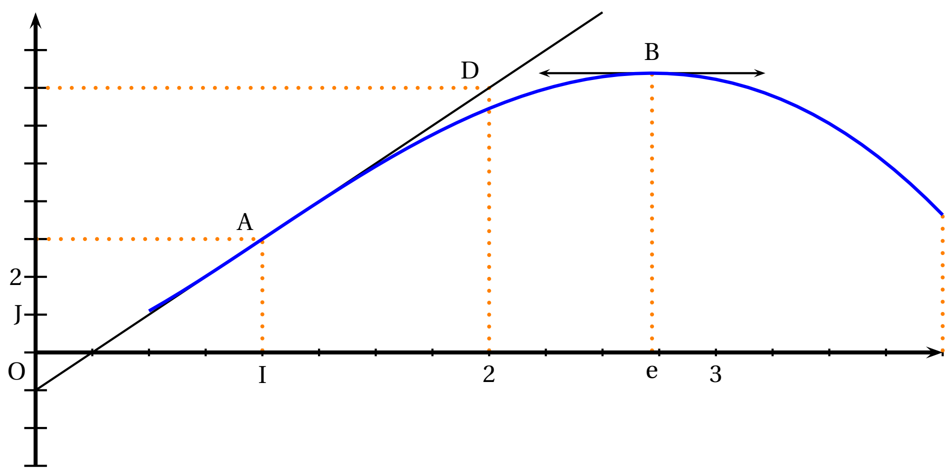
3. On admet que pour tout entier naturel n on a : $A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} + \left(\dfrac{1}{3}\right)0,7^n & \dfrac{1}{3} - \left(\dfrac{1}{3}\right)0,7^n \\ \dfrac{2}{3} - \left(\dfrac{2}{3}\right)0,7^n & \dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{2}{3}\right)0,7^n \end{pmatrix}$

Avec l'hypothèse ci-dessus, l'entreprise peut-elle espérer atteindre une part de marché de 70 % ? Justifier.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère une fonction f définie et dérivable sur $[0,5 ; 4]$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
La courbe $(\mathscr{C})$ est représentée ci-dessous.
La courbe $(\mathscr{C})$ passe par le point A et admet la droite (AD) pour tangente en A.
La courbe $(\mathscr{C})$ passe par le point B, d'abscisse e, et en B elle admet une tangente horizontale.
On rappelle que e est le nombre réel tel que $\ln \mathrm{e} = 1$.



1. En utilisant les données graphiques, donner sans justification :

- **a.** le nombre de solutions sur l'intervalle $[0,5 ; 4]$ de l'équation $f(x) = 6$, et une valeur approchée à 0,25 près des solutions éventuelles.
- **b.** Le signe de la dérivée f' de la fonction f sur l'intervalle $[0,5 ; 4]$.
- **c.** Les valeurs de $f'(1)$ et $f'(\mathrm{e})$.

2. Justifier que : $3 \leqslant \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 7$.

3. Soit h, g et j les fonctions définies pour tout réel x de l'intervalle $[0,5 ; 4]$ respectivement par :

$$h(x) = (4x)(1 - \ln x) \qquad g(x) = \frac{\mathrm{e}}{x} - 1 \qquad j(x) = \frac{2}{\mathrm{e}-1}(x - \mathrm{e})(x - 3).$$

Parmi ces trois fonctions, deux ne peuvent pas être la dérivée de la fonction f. Lesquelles ? Pourquoi ?

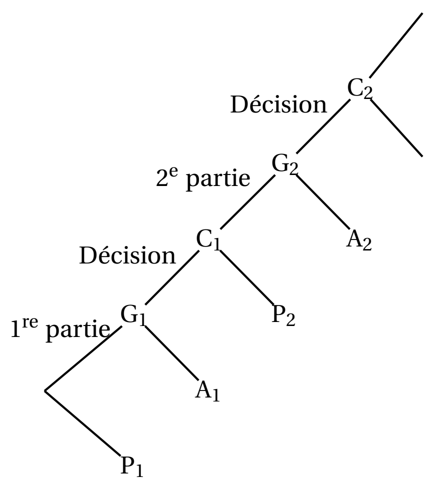
EXERCICE 3 **8 points**

Commun à tous les candidats

Un jeu télévisé se déroule sur quatre semaines maximum, et est organisé de la manière suivante :
Un candidat se présente la première semaine et joue une partie.
S'il la gagne, il a la possibilité de poursuivre en deuxième semaine ou de s'arrêter.

S'il la perd, il est éliminé.
Le même processus s'applique en deuxième et troisième semaine.
À l'issue de la quatrième partie le jeu s'arrête, que le candidat ait gagné ou perdu.
Un candidat ayant joué et gagné les quatre parties est déclaré « grand gagnant ».
On admet que pour un candidat donné, la probabilité de gagner une partie est la même chaque semaine et vaut $\frac{3}{5}$.
On admet également, qu'un candidat ayant gagné une partie décide d'arrêter le jeu avec une probabilité de $\frac{1}{10}$.

1. On a dessiné le début d'un arbre modélisant le fonctionnement du jeu, pour un candidat donné.
Compléter sur la feuille ANNEXE (à rendre avec la copie) l'arbre identique à celui-ci, et indiquer sur chaque branche les probabilités correspondantes.



G_1 désigne l'évènement : le candidat gagne la première partie.
P_1 désigne l'évènement : le candidat perd la première partie.
C_1 désigne l'évènement : le candidat décide de continuer le jeu après la première partie.
A1 désigne l'évènement : le candidat décide d'arrêter le jeu après la première partie.
On définit de même les évènements G_2, G_3, G_4, P_2, P_3, P_4, A_2 et A_3.

2. Calculer la probabilité que le candidat gagne la première partie et arrête le jeu.

3. Montrer que la probabilité que le candidat arrête le jeu après avoir gagné la deuxième partie est $0,032\,4$.

4. Calculer la probabilité que le candidat soit « grand gagnant »(donner une valeur approchée à 10^{-4} près).

5. On attribue un gain de 100 € à un candidat qui gagne la première partie et décide d'arrêter le jeu.
On attribue un gain de 1 000 € à un candidat qui a gagné les deux premières parties et décide d'arrêter le jeu.
On attribue un gain de 10 000 € à un candidat qui a gagné les trois premières parties et décide d'arrêter le jeu.
On attribue un gain de 100 000 € à un candidat « grand gagnant ».
Dans tous les autres cas, le candidat a perdu et ne gagne rien.
On donne le tableau suivant dont une case n'a pas été remplie :

Gain	0 €	100 €	1 000 €	10 000 €	100 000€
Probabilité (exacte ou arrondie)		0,06	0,032 4	0,017 5	0,094 5

a. Que vaut la probabilité manquante ? Justifier la réponse.

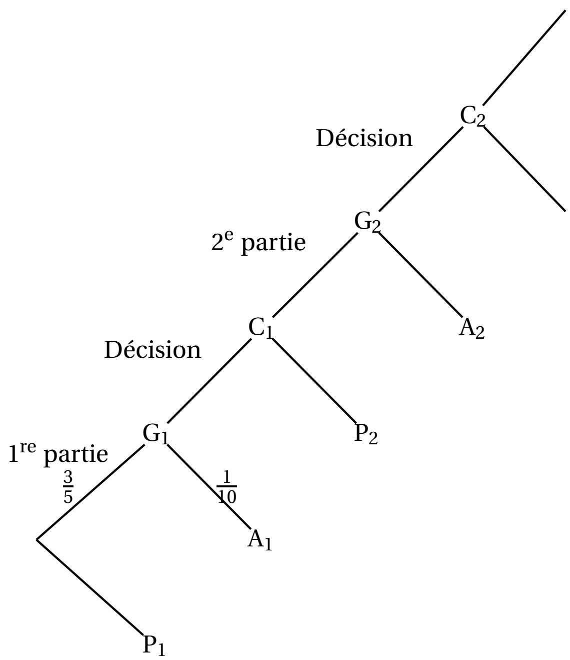
b. Donner une valeur approchée de l'espérance mathématique du gain à 1 € près.

c. Interpréter ce résultat.

ANNEXE

Exercice 3

À rendre avec la copie



∽ Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2004 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Le tableau suivant donne les indices des prix à la consommation pour les années 1990 à 1997.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Indice y_i	100	103,2	105,7	107,9	109,7	111,6	113,8	115,2

Source Insee

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal (2 cm représente une année en abscisse et 1 cm représente un point d'indice en ordonnée ; faire débuter la graduation à 100 sur l'axe des ordonnées).

   Calculer les coordonnées du point moyen et placer ce point.
2. À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement affine D par la méthode de moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-1} près). Représenter la droite D dans le repère précédent.
3. On envisage l'ajustement du nuage par une branche de parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, et l 'on cherche les trois nombres a, b et c. Pour cela on pose $z_i = \sqrt{1198 - 10y_i}$.

   Une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés est alors : $z = -x + 14$.
   a. Vérifier que $y = -0,1x^2 + 2,8x + 100,2$.
   b. Dans le repère précédent, et sans étudier la fonction correspondante, tracer la branche de parabole d'équation $y = -0,1x^2 + 2,8x + 100,2$ pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,7]$.
   c. En choisissant ce dernier ajustement, quelle prévision de l'indice des prix à la consommation pouvait-on faire fin 1997 pour 1998 ?
   d. On sait aujourd'hui que l'indice des prix à la consommation en 1998 était de 116. Calculer le pourcentage de l'erreur commise en utilisant la prévision trouvée en **3. c.**.

Exercice 2 **5 points**
(pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Un magasin vend des salons de jardin.
Une enquête statistique a montré que :
- 10 % des personnes qui entrent dans le magasin achètent une table ;
- parmi les personnes qui achètent une table, 80 % achètent un lot de chaises ;
- parmi les personnes qui n'achètent pas de table, 10 % achètent un lot de chaises.

Une personne entre dans le magasin.
On note T l'évènement : « La personne achète une table »
On note C l'évènement : « La personne achète un lot de chaises »

1. Traduire à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau la situation décrite ci-dessus.
2. **a.** Montrer que la probabilité que la personne achète un lot de chaises est égale à 0,17.
   b. Quelle est la probabilité que la personne n'achète pas de table sachant qu'elle a acheté un lot de chaises ?

3. À la fin de la journée, le directeur du magasin constate qu'il a réalisé en moyenne un bénéfice de 11,80 € par personne entrant dans le magasin.

   On sait que le directeur a fait un bénéfice de 50 € par table vendue.

   On appelle x le bénéfice exprimé en euros qu'il a réalisé par lot de chaises vendues. On se propose de calculer x.

   a. Reproduire et compléter le tableau suivant définissant la loi de probabilité « montant du bénéfice réalisé par personne entrant dans le magasin ».

Montant du bénéfice	0	50	x	$50+x$
Probabilité				

   b. Montrer que l'espérance mathématique de cette loi est égale à $5+0,17x$.

   c. Conclure.

EXERCICE 2 **5 points**
(pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Au cours de la première semaine de l'année scolaire, un professeur propose aux élèves de sa classe le choix entre deux sorties pédagogiques une sortie A et une sortie B.
20 % des élèves de la classe sont favorables à la sortie A et tous les autres élèves sont favorables à la sortie B.
Les arguments des uns et des autres font évoluer cette répartition en cours d'année. Ainsi 30 % des élèves favorables à la sortie A et 20 % des élèves favorables à la sortie B changent d'avis la semaine suivante.
On note :
a_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la semaine n ;
b_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie B la semaine n ;
P_n la matrice $(a_n\ ;\ b_n)$ traduisant l'état probabiliste la semaine n.

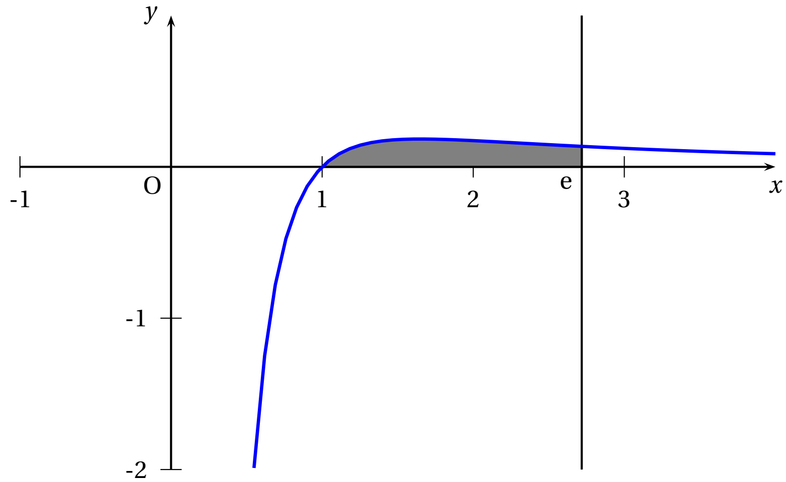
1. Déterminer l'état initial P_1.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
3. En déduire que $P_{n+1} = P_n \times \mathrm{M}$ où M est la matrice $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$
4. Déterminer l'état probabiliste P_3 et en déduire la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la troisième semaine.
5. Déterminer le réel x tel que $(x\ ;1-x) \times \mathrm{M} = (x\ ;\ 1-x)$.

   On admet que la suite (a_n) est croissante. La sortie A finira-t-elle par être préférée à la sortie B ?

EXERCICE 3 **6 points**

La figure ci-dessous représente la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

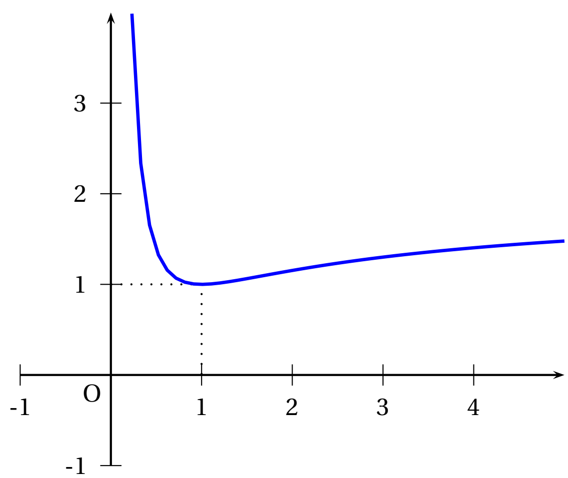


Graphique n$^{\text{o}}$ 1

1. **a.** Démontrer que la fonction présente un maximum en $x = \sqrt{\text{e}}$ et qu'il vaut $\dfrac{1}{2\text{e}}$.

   b. Donner le signe de $f(x)$ sur $]0~;~+\infty[$.

2. Une primitive F de la fonction f est représentée ci-dessous :



Graphique n$^{\text{o}}$ 2

Elle vérifie de plus $F(\text{e}) = \dfrac{2\text{e}-2}{\text{e}}$, $F\left(\sqrt{\text{e}}\right) = 2 - \dfrac{3}{\sqrt{\text{e}}}$.

   a. Les variations de la fonction F semblent-elles cohérentes avec le résultat de la question **1. b.** ? Justifier votre réponse.

   b. Donner, en le justifiant le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant F au point d'abscisse $\sqrt{\text{e}}$.

   c. Exprimer, en unités d'aire, l'aire de la partie grisée sur le graphique n $^{\text{o}}$ 1.

   d. La fonction G définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $G(x) = \dfrac{-1-\ln x}{x}$ est une primitive de la fonction f.
   Exprimer $F(x)$ en fonction de x, pour $x \in]0~;~+\infty[$.

EXERCICE 4 **4 points**

Soit f la fonction de la variable réelle définie sur $[0\,;\,10]$ par

$$f(x) = \frac{90}{2+\mathrm{e}^{-x}}.$$

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,10]$.
2. Calculer $f(0)$ et $f(10)$.
3. Déduire des questions précédentes que l'équation $f(x) = 44$ admet exactement une solution dans l'intervalle $[0\,;\,10]$. Donner un encadrement de cette solution par deux entiers consécutifs.
4. **a.** Vérifier que $f(x) = 45\dfrac{2\mathrm{e}^{x}}{2\mathrm{e}^{x}+1}$ et en déduire une primitive de f sur $[0\,;\,10]$.

   b. Montrer que $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 45\ln\left(\frac{2\mathrm{e}^2+1}{3}\right)$.
5. Soit g la fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{90}{2+\mathrm{e}^{-x}}$.

   La fonction g peut modéliser l'évolution des exportations d'une entreprise, x étant le temps écoulé en années depuis le 01/01/2000 et $g(x)$ étant le montant des exportations en millions d'euros de l'année correspondante.

   a. Quel est le montant des exportations de l'entreprise au 01/01/2000 ?

   b. En quelle année les exportations dépasseront-elles 44 millions d'euros ?
   L'entreprise peut-elle espérer que ses exportations dépasseront 45 millions d'euros sur l'une des onze années 2000 à 2010 ?

EXERCICE 1 **3 points**

x	$-\infty$		-2		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0		$+$		
variation de f	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$

On a donné le tableau de variations d'une fonction f définie sur
$]-\infty\ ;\ -2[\cup]-2\ ;\ +\infty[$, où α est le nombre réel strictement supérieur à 1 tel que $f(\alpha)=0$.
On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Dire pour chacune des cinq affirmations suivantes si elle est VRAIE ou si elle est FAUSSE ou si ON NE PEUT PAS CONCLURE. Aucune justification n'est demandée.
Le barème est le suivant :

- 0,5 point par réponse exacte ;
- 0,25 point par réponse fausse ;
- 0 point pour absence de réponse.

Cet exercice sera noté entre 0 et 3 ; il n'y aura pas de note globale négative.

1. La droite d'équation $y=-2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
2. L'équation $f(x)=1$ admet exactement deux solutions.
3. $f(x)\leqslant 0$ pour tout $x\in\ ]-5\ ;\ -2[$.
4. Sachant que α appartient à l'intervalle $]1\ ;\ 2[$, on a $\displaystyle\int_\alpha^2 f(x)\,\mathrm{d}x<0$.
5. Les primitives de f sont croissantes sur l'intervalle $[1\ ;\ \alpha]$.
6. Si $-2<x<1$ et $\alpha<x'$ alors $f(x)<f(x')$.

EXERCICE 2 **4 points**

Pour chacune des questions suivantes, indépendantes les unes des autres, il est proposé quatre réponses dont une seule est exacte. Donnez la bonne réponse en justifiant votre choix.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(2+\frac{3}{x}\right)=L$

   A. $L=0$ B. $L=\ln 2$ C. $L=\ln 5$ D. $L=0,7$.

2. La courbe représentative de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par
   $f(x)=x-2+\dfrac{3\text{e}^x}{\text{e}^x-1}$ admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation :

   A. $y=x+1$ B. $y=x-2$ C. $y=x$ D. $y=3$.

3. $I=\displaystyle\int_0^1 \text{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

   A. $I=\dfrac{1}{2}\text{e}^3-\dfrac{1}{2}\text{e}$ B. $I=\text{e}^3-1$ C. $I=0$ D. $I=2\text{e}^3-2\text{e}$.

4. Dans un lycée 45 % des élèves de terminale sont des garçons. Les élèves de ce lycée étudient l'anglais, l'allemand ou l'espagnol en première langue vivante.
• 70 % des élèves étudient l'anglais,
• 20 % des garçons étudient l'allemand,
• 40 % des élèves qui étudient l'anglais sont des garçons,
• il y a autant de garçons que de filles qui étudient l'espagnol.
À l'aide d'un tableau ou d'un arbre, répondre aux questions suivantes :

a. Quel est le pourcentage des garçons qui étudient l'anglais ?

A. 42 % B. 28 % C. 18 % D. 52 %

b. On choisit au hasard la fiche d'un élève parmi ceux qui ne pratiquent pas l'allemand. Quelle est la probabilité que ce soit une fille qui étudie l'espagnol ?

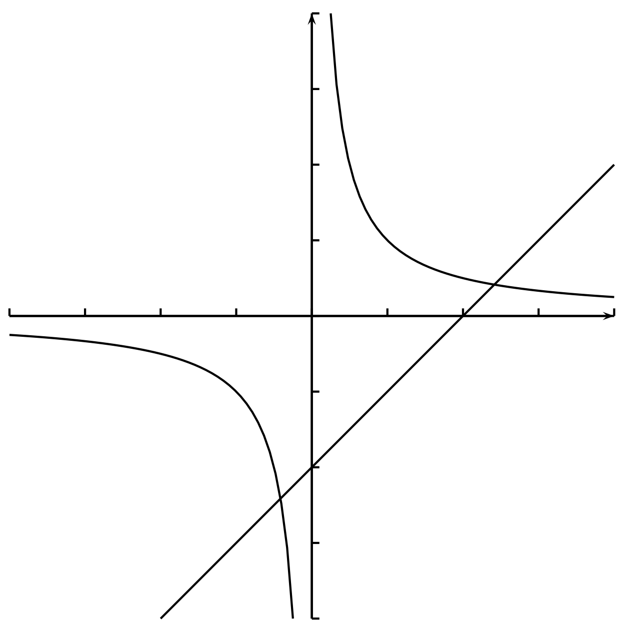
A. $\frac{2}{7}$ B. $\frac{4}{43}$ C. $\frac{8}{55}$ D. $\frac{5}{16}$.

EXERCICE 3 **5 points**

pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité

Soit l'équation (E) : $\frac{1}{x} = x - 2$ où l'inconnue est un réel de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Un élève a représenté sur sa calculatrice l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et la droite d'équation $y = x - 2$.



Au vu du graphique ci-dessus obtenu à l'écran de sa calculatrice, combien l'équation (E) semble-t-elle admettre de solutions sur $]0\ ;\ +\infty[$?

2. Un second élève considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x - 2 - \frac{1}{x}.$$

a. Déterminer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition.

b. On note g' la fonction dérivée de g. Calculer $g'(x)$. Montrer que g est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

c. En déduire le nombre de solutions de l'équation (E) et en donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

3. Un troisième élève dit : « Je peux résoudre l'équation (E) algébriquement ». Justifier, en résolvant l'équation (E), que ce troisième élève a raison.

EXERCICE 3 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi la spécialité

Pour modéliser la production d'une entreprise les économistes utilisent des fonctions qui suivent le modèle dit de Cobb-Douglas : $z = Ax^{\alpha}y^{\beta}$ (A, α, β réels strictement positifs), où z désigne une quantité obtenue à partir de deux quantités variables x et y.

Partie A

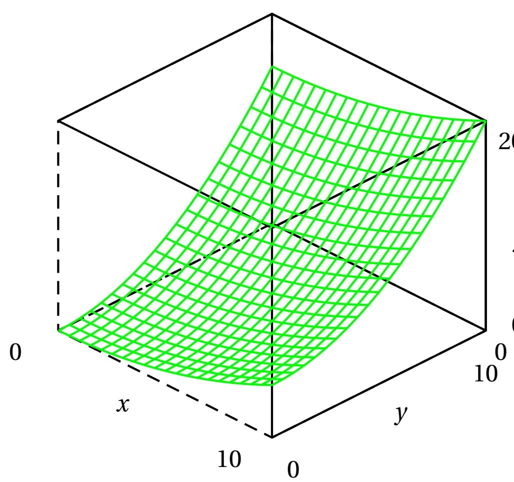
On considère les fonctions f et h définies pour $x \in [0~;~10]$ et $y \in [0~;~10]$ respectivement par

$$f(x~;~y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad h(x~;~y) = \frac{1}{4}x^2y.$$

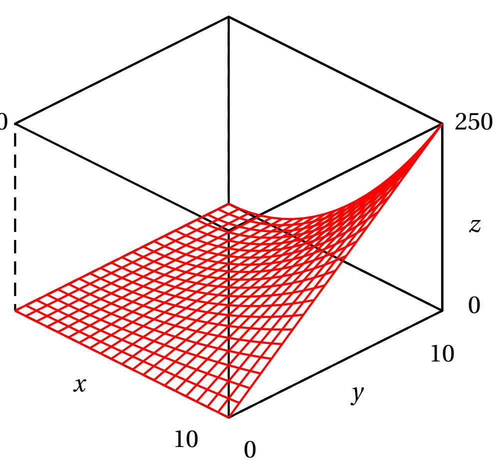
1. Vérifier que f et h sont deux fonctions de Cobb-Douglas en donnant pour chacune d'elles les valeurs A, α, β.

2. Les représentations graphiques de f et h figurent parmi les trois représentations graphiques ci-dessous.

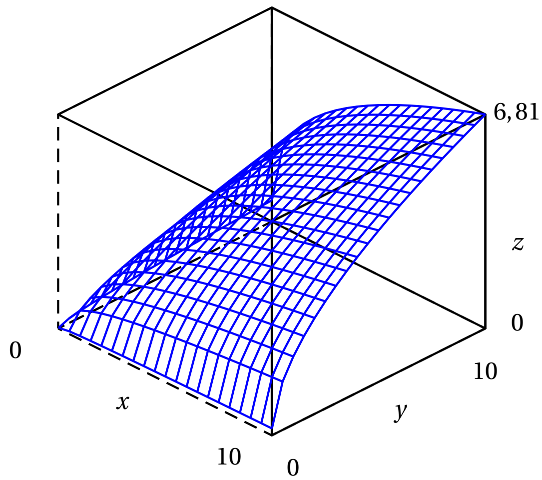
Associer à chaque fonction sa représentation graphique. Les choix seront justifiés.



représentation 1



représentation 2

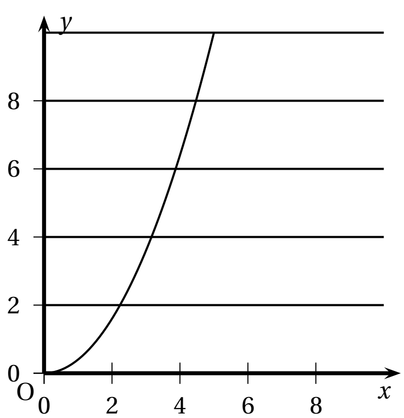


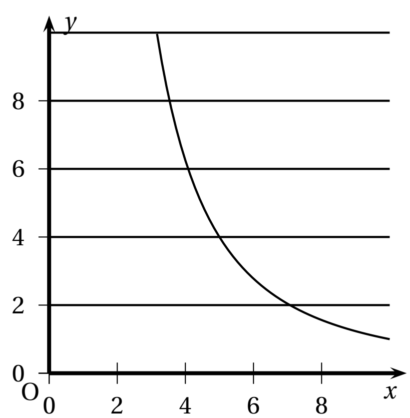
représentation 3

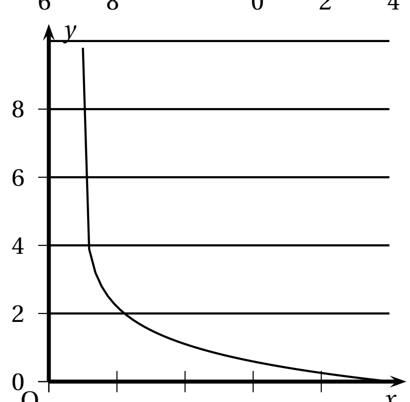
Partie B

La fabrication d'un produit dépend des durées de fonctionnement de deux machines M et M′. Les durées de fonctionnement des machines M et M′ exprimées en centaines d'heures sont respectivement égales à x et y. La quantité produite, exprimée en tonnes, est $z = h(x,\ y)$, où h est la fonction définie à la **partie A**.

1. Dans cette question la quantité produite est fixéeà 25 tonnes.
Quelle est, parmi les trois représentations graphiques suivantes, celle de la section du plan d'équation $z = 25$ avec la surface d'équation $z = \frac{1}{4}x^2 y$?







2. Les horaires de travail font que la somme des durées de fonctionnement des deux machines M et M′ est de huit centaines d'heures.

a. Montrer que $z = 2x^2 - \dfrac{1}{4}x^3$.

b. Soit la fonction g définie par $g(x) = 2x^2 - \dfrac{1}{4}x^3$ pour $x \in [0~;~8]$.

Étudier les variations de g et en déduire les durées de fonctionnement x et$y$ qui assurent une production maximum.

EXERCICE 4 — 8 points

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x\mathrm{e}^x - 1.$$

1. a. On admet que la limite de g en $-\infty$ est -1. Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de g. Justifier toutes les affirmations qui sont notées dans ce tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-\dfrac{1}{\mathrm{e}} - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

b. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2. On note f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \ln x.$$

a. Étudier la limite de f en 0.

b. Vérifier que, pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$, où f' est la fonction dérivée de f.

c. Dresser le tableau de variations de f, en admettant que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.

3. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal. Prendre 4 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Tracer $\mathscr{C}$, en prenant 0,6 comme valeur approchée de α.

4. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x~;~y)$ du plan muni du repère ci-dessus tels que : $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

a. Hachurer l'ensemble $\mathscr{D}$.

b. Vérifier que la fonction U définie sur $]0~;~+\infty[$ par $U(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien.

c. En déduire une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.

d. Calculer l'aire de $\mathscr{D}$ en unités d'aire. Puis en donner une valeur approchée en cm^2 à 10^{-2} près.

Baccalauréat ES Pondichéry 31 mars 2005

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Une résidence de vacances propose deux types d'appartements (studio et deux-pièces) à louer à la semaine. L'appartement doit être restitué parfaitement propre en fin de séjour.

Le locataire peut décider de le nettoyer lui-même ou peut choisir l'une des deux formules d'entretien suivantes : la formule Simple (nettoyage de l'appartement en fin de séjour par le personnel d'entretien) ou la formule Confort (nettoyage quotidien du logement durant la semaine et nettoyage complet en fin de séjour par le personnel d'entretien).

Le gestionnaire a constaté que :

– 60 % des locataires optent pour un studio et parmi ceux-ci 20 % ne souscrivent aucune formule d'entretien ;
– La formule Simple a beaucoup de succès : elle est choisie par 45 % des locataires de Studio et par 55 % des locataires de deux-pièces ;
– 18 % des locataires ne souscrivent aucune formule.

On rencontre un résident au hasard.

Soit S l'évènement « Le résident a loué un studio »

A l'évènement « Le résident a souscrit la formule Simple »

B l'évènement « Le résident a souscrit la formule Confort »

R l'évènement « Le résident n'a souscrit aucune formule d'entretien »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. **a.** Quelle est la probabilité que le résident ait loué un deux-pièces ?

   b. Calculer $P_{\text{S}}(\text{B})$.
3. **a.** Calculer $P(\text{R} \cap \text{S})$; en déduire $P\left(\text{R} \cap \overline{\text{S}}\right)$.

   b. Le résident a loué un deux-pièces. Montrer que la probabilité qu'il assure lui-même le nettoyage de son appartement est 0,15.
4. Le gestionnaire affirme que près de la moitié des résidents choisit la formule Simple. Présenter les calculs qui justifient son affirmation.
5. La location d'un studio à la semaine coûte 350 euros, celle d'un deux-pièces 480 euros.

   La formule Simple coûte 20 euros et la formule Confort 40 euros.

   Soit L le coût de la semaine (loyer et entretien) ; il prend différentes valeurs L_i. On désigne par p_i, la probabilité que le coût de la semaine soit égal à L_i.

   a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

L_i	350	370	390	480	500	520
p_i	0,12		0,21			0,12

   b. Calculer l'espérance de L. En donner une interprétation.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples ; pour chacune des cinq questions, une et une seule affirmation est exacte.

Indiquez sur votre copie le numéro de la question et recopiez l'affirmation exacte sans justifier votre choix.

Barème : À chaque question est attribué 1 point.

Une réponse inexacte enlève 0,5 point.

Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est ramenée à zéro.

Soit f la fonction définie sur $]4\,;\,+\infty[$ par $f(x) = -2x+1-\dfrac{8}{x-4}$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1. Une autre expression de $f(x)$ est
   - $f(x) = -2x+1-\dfrac{2}{x-1}$
   - $f(x) = \dfrac{2x^2-9x+12}{4-x}$
   - $f(x) = \dfrac{2x^2+9x-2}{x-4}$
2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $]4\,;\,+\infty[$. Une expression de $f'(x)$ est
   - $f'(x) = -2-\dfrac{8}{(x-4)^2}$
   - $f'(x) = \dfrac{(2-x)(x-6)}{(x-4)^2}$
   - $f'(x) = \dfrac{-2x^2+16x-24}{(x-4)^2}$
3. La courbe Γ admet pour asymptote
   - la droite d'équation $y = 4$
   - la droite d'équation $x = 4$
   - la droite d'équation $y = 4x$
4. La droite d'équation $y = -2x+1$ est
   - asymptote à la courbe Γ
   - située en dessous de la courbe Γ
   - tangente à la courbe Γ.
5. La fonction $x \longmapsto F(x)$ donnée par
   - $F(x) = -x^2+x+8(x-4)^2$
   - $F(x) = -x^2+x+8\ln(x-4)$
   - $F(x) = -x^2+x-8\ln(x-4)$

   est une primitive de f sur $]4\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

L'objet de cet exercice est de démontrer le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$.

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on a : $f'(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{2x}$.
2. En déduire le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$ (les limites aux bornes ne sont pas demandées).
3. Justifier alors que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$,on a : $\ln x < \sqrt{x}$.

Partie B : Utilisation des théorèmes de comparaisons

1. Démontrer que, pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a :
   $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

On rappelle que la dérivée de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ *est* $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne la population d'une ville nouvelle entre less années 1970 et 2000.

Année	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Rang de l'année x	0	5	10	15	20	25	30
Population en milliers d'habitants y	18	21	25	30	36	42	50

Le nuage de points associé à ce tableau est représenté graphiquement sur l'annexe jointe le rang x de l'année est en abscisse et la population y en ordonnée.
Cette annexe sera complétée au fur et à mesure des questions et rendue avec la copie.

Partie A : Un ajustement affine

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième).

   Tracer cette droite sur le graphique donné en annexe.
2. Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2003, à un millier près.

Partie B : Un ajustement exponentiel

1. L'allure du nuage incite à chercher un ajustement par une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = a\mathrm{e}^{bx}$ où a et b sont des réels.

   Déterminer a et b tels que $f(0) = 18$ et $f(30) = 50$. On donnera une valeur arrondie de b au millième.
2. Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2003, à un millier près.
3. Tracer la courbe représentative de f sur le graphique donné en annexe.
4. La population en 2003 était de 55 milliers. Lequel des deux ajustements vous semble le plus pertinent ? Justifier votre choix.

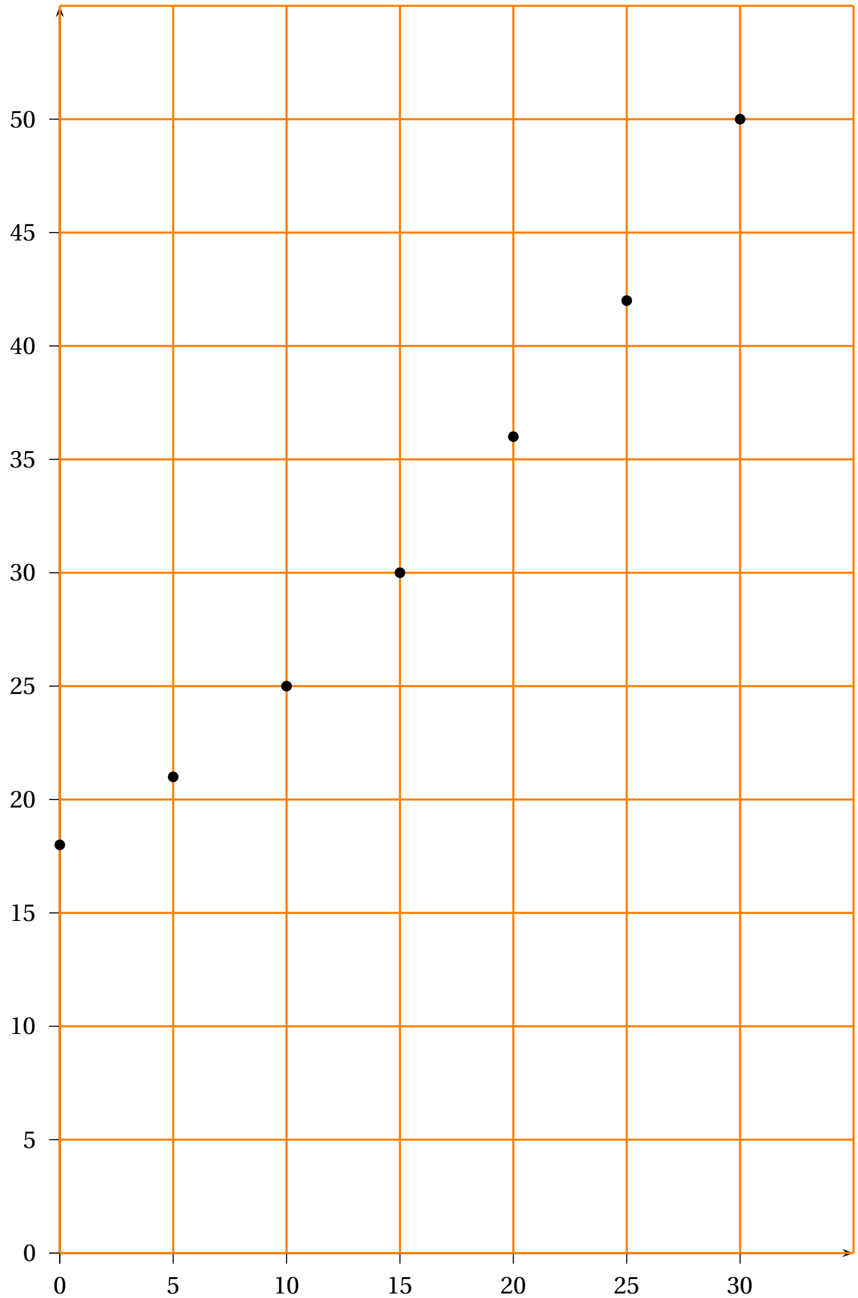
Partie C : Calcul d'une valeur moyenne

On considère maintenant que, pour une année, la population est donnée en fonction du rang x par $f(x) = 18\mathrm{e}^{0,034x}$.

1. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur $[0\,;\,30]$; on donnera le résultat arrondi au dixième.
2. À l'aide d'une lecture graphique, déterminer l'année au cours de laquelle la population atteint cette valeur moyenne ?

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 4



Durée : 3 heures

Baccalauréat ES Amérique du Nord 1er juin 2005

Exercice 1 **3 points**

Commun tous les candidats

Les deux questions sont indépendantes.
Les résultats seront arrondis à 10^{-2}.
Le gouvernement d'un pays envisage de baisser un impôt de 30 % en cinq ans.

1. On suppose que le pourcentage de baisse est le même chaque année.
   Vérifier que ce pourcentage de baisse annuel est alors égal à environ 6,89 %.
2. La première année cet impôt baisse de 5 %, la deuxième année la baisse est de 1 % et la troisième année de 3 %.
   a. Quelle est la baisse, en pourcentage, de cet impôt au terme de ces trois premières années ?
   b. Pour atteindre son objectif quel pourcentage annuel de baisse doit décider ce gouvernement, en supposant que ce pourcentage est le même sur les deux dernières années ?

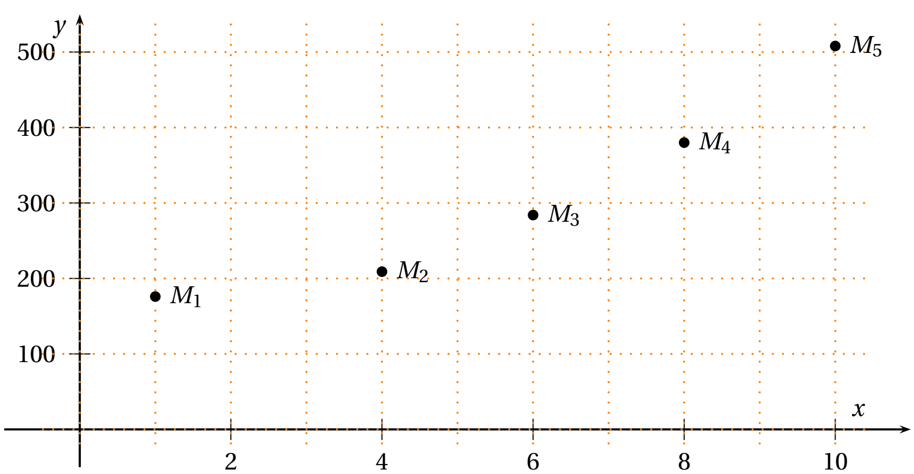
Exercice 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le tableau suivant donne l'évolution du chiffre d'affaires (C.A.), en millions d'euros, sur la période 1994-2003.

Année	1994	1997	1999	2001	2003
Rang x_i	1	4	6	8	10
C.A. y_i	176	209	284	380	508

1. Le nuage de points $M_i(x_{i\ ;\ y_i})$ est représenté ci-dessous dans un repère orthogonal. Un ajustement affine semble-t-il adapté ?

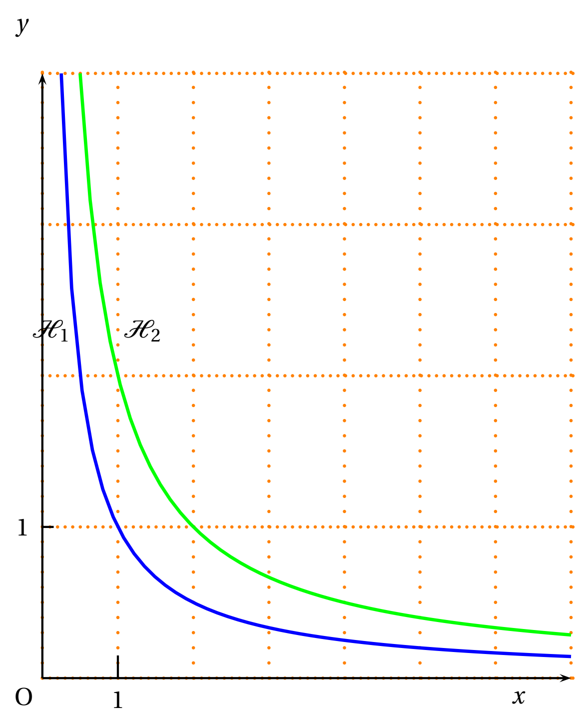


2. On pose $z_i = \ln y_i$.
   a. Calculer, en arrondissant à 10^{-2} près, pour i variant de 1 à 5, les valeurs z_i, associées aux rangs x_i du tableau.
   b. Construire le nuage de points $N_i(x_i\ ;\ z_i)$ dans le repère orthogonal suivant :
   - sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter 1 année,

- sur l'axe des ordonnées, on placera 5 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter le nombre 0, 1.

3. a. Déterminer avec la calculatrice une équation de la droite d d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-3} près) et tracer la droite d dans le repère précédent.
   b. En déduire une relation entre y et r de la forme $y = A \times k^x$. (arrondir A à l'entier près et k à 10^{-2} près)
4. a. Tracer la droite d dans le même repère que celui du nuage de points (N_i).
   b. Donner une estimation, arrondie au millier d'euros, du chiffre d'affaires en 2005.
   c. À partir de quelle année peut-on prévoir que le chiffre d'affaires sera supérieur à 1 milliard d'euros ?

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi la spécialité mathématique



Les courbes $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ représentées dans le repère orthonormal ci-dessus ont respectivement pour équation

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad y = \frac{2}{x}.$$

On note $\mathscr{D}_2$ le domaine délimité par les courbes $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.
On note $\mathscr{D}_2'$ le domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{H}_1$ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

1. Colorier les domaines $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_2'$ d'une couleur différente et montrer qu'ils ont la même aire.
   Soit n un entier naturel strictement positif. On note u_n l'aire du domaine $\mathscr{D}_n$ délimité par les courbes $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ et les droites d'équation $x = n$ et $x = n+1$.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   On pourra comparer les nombres $n(n+2)$ et $(n+1)^2$.

4. Étudier la convergence de la suite (u_n).
5. Déterminer la plus grande valeur de n telle que l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ reste supérieure à $\dfrac{1}{10}$ d'unité d'aire. Soit N cette valeur.
6. Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = N$.

EXERCICE 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte. L'exercice consiste à cocher cette réponse exacte sans justification.
Barème : Une bonne réponse rapporte 1 point ; une mauvaise réponse enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total de points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

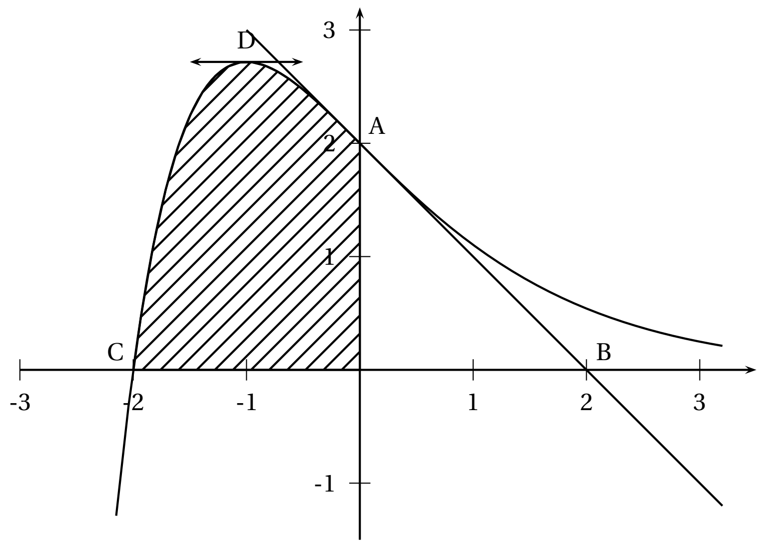
COMPLÉTER LE DOCUMENT RÉPONSE DONNÉ EN ANNEXE

QUESTIONS	RÉPONSES
1. Soit une série statistique à deux variables $(x\ ;\ y)$. Les valeurs de x sont 1, 2, 5, 7, 11, 13 et une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés est $y = 1,35x + 22,8$. Les coordonnées du point moyen sont :	☐ (6,5 ; 30,575) ☐ (32, 575 ; 6,5) ☐ (6,5 ; 31,575)
2. (u_n) est une suite arithmétique de raison -5 Laquelle de ces affirmations est exacte ?	☐ Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = 5$ ☐ $u_{10} = u_2 + 40$ ☐ $u_3 = u_7 + 20$
3. L'égalité $\ln(x^2 - 1) = \ln(x - 1) + \ln(x + 1)$ est vraie	☐ Pour tout x de $]-\infty\ ;\ -1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ ☐ Pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\}$. ☐ Pour tout x de $]1\ ;\ +\infty[$
4. Pour tout réel x, le nombre $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 2}$ égal à :	☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 2}$ ☐ $\dfrac{1 - e^{-x}}{1 + 2e^{-x}}$
5. On pose $\text{I} = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x - 1}\,\text{d}x$ et $\text{J} = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - 1}\,\text{d}x$ alors le nombre I − J est égal à	☐ $\ln\dfrac{2}{3}$ ☐ $\ln\dfrac{3}{2}$ ☐ $\dfrac{3}{2}$
6. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\left(1 - \dfrac{2}{100}\right)^x \leqslant 0,5$ est	☐ $S = \left]-\infty\ ;\ \dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,98)}\right]$ ☐ $S = \left[\dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,98)}\ ;\ +\infty\right[$ ☐ $S = \left[\ln\dfrac{0,5}{0,98}\ ;\ +\infty\right[$

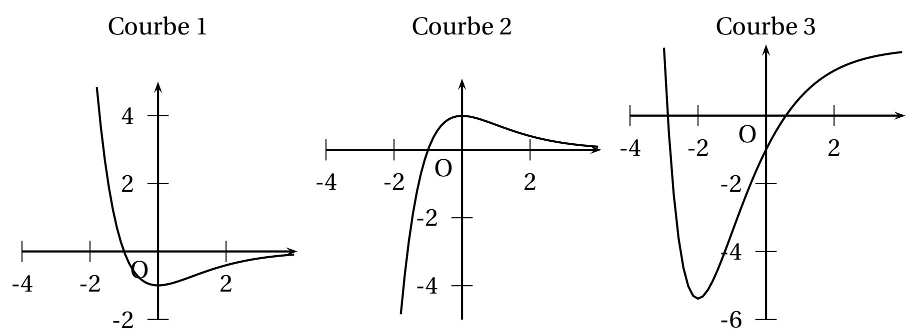
EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthononnal, d'une fonction f définie sur ℝ. La courbe Γ passe parlespoints A(0 ; 2) et C(−2 ; 0) et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse −1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une primitive F de f sur ℝ.



Déterminer la courbe associée à Ia fonction f' et celle qui est associée à la fonction F.

Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix

2. **a.** Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

   b. On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = (x+K)\mathrm{e}^{\alpha x}$ où K et α sont des constante réelles.

   Calculer $f'(x)$, puis traduire les renseignements trouvés à la question précédente par un système d'équations d'inconnues K et α.

   En déduire que f est définie par $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

3. **a.** Montrer que la fonction φ définie par $\varphi(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f.

   b. En déduire la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface hachurée.

   On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième du résultat.

∾ Baccalauréat ES Antilles–Guyane juin 2005 ∾

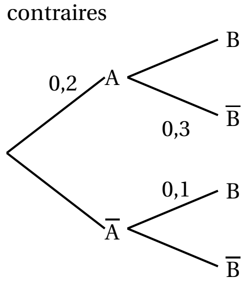
EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples ; pour chacune des cinq questions, une et une seule affirmation est exacte.

Indiquez sur votre copie le numéro de la question et la bonne affirmation sans justifier votre choix.

Barème :
À chaque question et attribué un certain nombre de points.
Une réponse inexacte enlève la moitié des points affectés.
Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Si le total est négatif, il est ramené à zéro.

<table>
<tr>
<td>Question 1
Ce tableau incomplet donne les résultats d'un sondage dans une population de 60 personnes.
<table>
<tr><td></td><td>Cadres</td><td>Employés</td></tr>
<tr><td>Hommes</td><td></td><td>25</td></tr>
<tr><td>Femmes</td><td>8</td><td>15</td></tr>
</table>
On interroge une personne au hasard ; la probabilité que ce soit une femme sachant que c'est un cadre est :</td>
<td>$\dfrac{2}{15}$</td>
<td>$\dfrac{2}{5}$</td>
<td>$\dfrac{8}{23}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Question 2
Une loi de probabilité d'espérance μ, de variance V et d'écart type σ est définie par le tableau ci-dessous.
<table>
<tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,2</td><td>0,4</td><td>0,1</td><td>0,3</td></tr>
</table>
On a alors :</td>
<td>$\text{V} = \dfrac{5}{4}$</td>
<td>$\mu = 2$</td>
<td>$\sigma = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Question 3
Soient C et D deux évènements indépendants.
On donne $P(\text{C}) = \dfrac{1}{3}$ et $P(\text{D}) = \dfrac{1}{12}$.
On a alors :</td>
<td>$P(\text{D} \cap \text{C}) = \dfrac{5}{12}$</td>
<td>$P(\text{C} \cup \text{D}) = \dfrac{7}{18}$</td>
<td>$P_{\text{D}}(\text{C}) = \dfrac{1}{36}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Question 4
On lance une pièce de monnaie équilibrée quatre fois de suite.
La probabilité d'obtenir au moins une fois pile est :</td>
<td>$\dfrac{1}{4}$</td>
<td>$\dfrac{15}{16}$</td>
<td>$\dfrac{1}{16}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Question 5
Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre ci-dessous où A et B sont deux évènements, $\overline{\text{A}}$ et $\overline{\text{B}}$ leurs évènements contraires

Alors on a :</td>
<td>$P(\text{B}) = 0,22$</td>
<td>$P\left(\overline{\text{A}} \cap \text{B}\right) = 0,8$</td>
<td>$P_{\text{B}}(\text{A}) = 0,7$</td>
</tr>
</table>

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit f une fonction dont le tableau de variations, incomplet est le suivant ; on désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	$\ldots$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\ldots$

On admet que f est définie sur $]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

où $a,\ b$ et c sont des réels.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de $a,\ b$ et c.
2. En vous aidant des informations contenues dans le tableau de variations ci-dessus, montrer que l'on a : $a = 1,\ b = -1,\ c = 4$.
3. Déterminer les limites manquantes dans le tableau de variations fourni.
4. Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet comme asymptote la droite D d'équation $y = x - 1$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de son asymptote D.
5. Déterminer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^2 [f(x) - (x-1)]\,\mathrm{d}x$ et interpréter le résultat en terme d'aire.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans une zone de marais on s'intéresse à la population des libellules.
On note P_0 la population initiale et P_n la population au bout de n années.
Des études ont permis de modéliser l'évolution de P_n par la relation :

$$\text{(R) Pour tout entier naturel } n \text{ on a : } P_{n+2} - P_{n+1} = \frac{1}{2}\left(P_{n+1} - P_n\right).$$

On suppose que $P_0 = 40\,000$ et $P_1 = 60\,000$.
On définit l'accroissement de la population pendant la n-ième année par la différence $P_n - P_{n-1}$.

1. Calculer l'accroissement de la population pendant la première année, la deuxième année, la troisième année, puis en déduire P_2 et P_3.
2. On considère les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$U_n = P_{n+1} - P_n \quad \text{et} \quad V_n = P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n.$$

a. Prouver que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
Exprimer U_n en fonction de n.

b. En utilisant la relation (R), calculer $V_{n+1} - V_n$.
En déduire que, pour tout n, on a : $V_n = P_1 - \dfrac{1}{2}P_0$.
Calculer V_n.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $P_n = 2(V_n - U_n)$.
En déduire une expression de P_n en fonction de n.

d. Montrer que la suite (P_n) converge et calculer sa limite.
Que peut-on en déduire en ce qui concerne l'évolution de cette population au bout d'un nombre d'années suffisamment grand ?

EXERCICE 3 **10 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise a noté les valeurs du coût total de production $C(x)$ d'un engrais en fonction de la masse x produite.
Le tableau ci-dessous donne les valeurs x_i de masse d'engrais produite et celles $y_i = C(x_i)$ des coûts totaux de production correspondants pour i entier variant de 1 à 5.

x_i en tonnes	10	12	14	16	18
y_i en centaines d'euros	100	110	145	196	308

Partie A

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 0,5 cm pour une tonne sur l'axe des abscisses et 0,05 cm pour une centaine d'euros sur l'axe des ordonnées.)
2. On recherche une fonction définie sur l'intervalle $[10\,;\,18]$ dont la courbe représentative « ajuste » de façon acceptable le nuage de points.
   Une fonction f est dite « acceptée » si, pour les cinq valeurs x_i du tableau, on a :

$$-10 \leqslant f(x_i) - C(x_i) \leqslant 10.$$

a. Soit f la fonction définie sur $[10\,;\,18]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{0,3x} + 80.$$

Recopier et compléter le tableau ci-dessous (les valeurs sont arrondies à 10^{-2}).
La fonction f est-elle « acceptée » ?

x_i	10	12	14	16	18
$f(x_i)$					
$f(x_i) - C(x_i)$					

b. Étudier les variations de f sur $[10\,;\,18]$ et tracer la courbe représentative de la fonction f dans le repère précédent.

Partie B : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[10\,;\,18]$ par

$$g(x) = (0,3x - 1)\mathrm{e}^{0,3x} - 80.$$

1. On désigne par g' la fonction dérivée de g.
Montrer que, pour tout x de $[10\,;\,18]$, on a : $g'(x) = 0,09x\mathrm{e}^{0,3x}$.
En déduire le sens de variations de g sur $[10\,;\,18]$.

2. Établir le tableau de variations de g sur l'intervalle $[10\,;\,18]$.

3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[10\,;\,18]$ et donner un encadrement de α à 10^{-1}.
En déduire le signe de $g(x)$ sur $[10\,;\,18]$.

Partie C

Le coût moyen de production d'une tonne en fonction de la masse x produite est exprimé en centaines d'euros par :

$$C_m(x) = \frac{f(x)}{x}$$

où f est la fonction étudiée dans la **partie A** et $x \in [10\,;\,18]$.

1. On désigne par C'_m la fonction dérivée de la fonction C_m.
Calculer $C'_m(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[10\,;\,18]$.

2. Déduire à l'aide de la **partie B** le sens de variations de la fonction C_m sur l'intervalle $[10\,;\,18]$.

3. Pour quelle production, en tonnes, a-t-on un coût moyen minimal ?
Quel est ce coût à un euro près par défaut ?

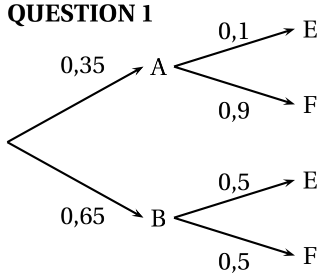
EXERCICE 1 **3 points**

Commun tous les candidats

Pour chaque question, une seule réponse $\boxed{\textbf{a}}$, $\boxed{\textbf{b}}$, $\boxed{\textbf{c}}$, *ou* $\boxed{\textbf{d}}$, *est exacte.*
Indiquer sur la copie la réponse exacte.
Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte 1 *point. Une mauvaise réponse enlève* 0,5 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève, aucun point.*
Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

Les trois arbres donnés ci-dessous représentent des situations probabilistes. Les nombres indiqués sur les différentes flèches sont des probabilités, et, en deuxième niveau, des probabilités conditionnelles. Ainsi pour l'arbre donné dans la question 1 : $0,35 = P(\text{A})$ et $0,1 = P_{\text{A}}(\text{E})$.

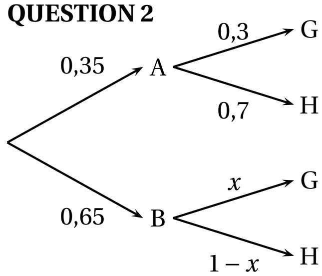
QUESTION 1



La probabilité de l'évènement E est égale à :

$\boxed{\textbf{a}}$ 0,5 $\boxed{\textbf{b}}$ 0,1 $\boxed{\textbf{c}}$ 0,6 $\boxed{\textbf{d}}$ 0,36

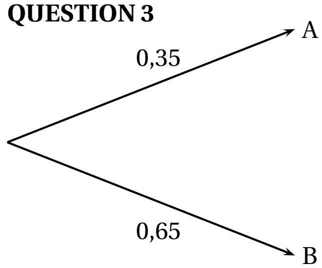
QUESTION 2



Les évènements A et G étant supposés indépendants, x est égal à :

$\boxed{\textbf{a}}$ 0,35 $\boxed{\textbf{b}}$ 0,1 $\boxed{\textbf{c}}$ 0,3 $\boxed{\textbf{d}}$ 0,36

QUESTION 3



Ici la situation probabiliste est associée à une expérience aléatoire schématisée par l'arbre ci-contre.
Cette experience aléatoire est répétée quatre fois de façon indépendante.
La probabilité d'obtenir au moins une fois l'évènement A est égale à :

$\boxed{\textbf{a}}$ 0,35 $\boxed{\textbf{b}}$ 0,821 493 75
$\boxed{\textbf{c}}$ 0,178 506 25 $\boxed{\textbf{d}}$ 0,015 006 25

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A

Soit la fonction f définie pour tout x élément de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{20}{1+15\mathrm{e}^{-0,4x}}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur cet intervalle.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement le résultat.
2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

PARTIE B

La fonction f modélise sur l'intervalle $[0\,;\,14]$ la fonction coût total de production, en euro, d'un produit. Sa représentation graphique sur cet intervalle, notée Γ, est donnée en **ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)**.
Pour une quantité de produit q, exprimée en tonnes et comprise entre 0 et 14, on pose donc :

$$f(q) = \frac{20}{1+15\mathrm{e}^{-0,4q}}.$$

Pour tout q dans l'intervalle $[0\,;\,14]$, le quotient $\dfrac{f(q)}{q}$ est appelé coût moyen de production de q tonnes de produit.

1. Pour q dans l'intervalle $[0\,;\,14]$, soit Q le point d'abscisse q de la représentation graphique (Γ) de la fonction f.
   Montrer que le coefficient directeur de la droite $(\mathrm{O}Q)$ est égal au coût moyen $\dfrac{f(q)}{q}$.
2. L'entreprise cherche à minimiser le coût moyen de production.
   Par lecture graphique indiquer la valeur de q qui réalise ce minimum et la valeur de ce minimum.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour fabriquer un alliage une usine utilise deux métaux A et B en quantités x et y exprimées en tonnes. Le coût de production qui en résulte, exprimé en milliers d'euros, est donné par la formule :

$$C(x, y) = 2x + 0,5y^2 + 4.$$

L'ANNEXE 1 (à rendre avec la copie) comporte deux figures.
- La figure 1 représente la surface d'équation $z = C(x\ ;\ y)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 20$ et $O \leqslant y \leqslant 12$.
- La figure 2 représente les courbes de niveau de cette surface pour z variant de 20 en 20.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

Cette partie est un questionnaire choix multiples constitué de deux questions, chacune comportant quatre propositions de réponse dont une seule est exacte.
Une bonne réponse rapportera 0,5*point.*
Une mauvaise réponse sera pénalisée de 0,25 *point.*
Si le total des points de cette partie est négatif, la note attribuée sera 0.
Les réponses seront indiquées sur la copie. Aucune justification n'est demandée.

1. Lequel des points donnés ci-dessous est un point de la surface d'équation $z = C(x\ ;\ y)$?

$\boxed{\textbf{a}}$ M(13 ; 9 ; 60) $\boxed{\textbf{b}}$ N(12 ; 4 ; 40) $\boxed{\textbf{c}}$ R(12 ;.8 ; 60) $\boxed{\textbf{d}}$ S(15 ; 4 ; 40)

2. La courbe de niveau $z = 20$ est :

$\boxed{\textbf{a}}$ une parabole $\boxed{\textbf{b}}$ une droite $\boxed{\textbf{c}}$ une hyperbole $\boxed{\textbf{d}}$ autre réponse

Partie 2

Les métaux A et B sont achetés respectivement 0,5 et 1 millier d'euros la tonne. L'entreprise affecte 11 milliers d'euros à l'achat des métaux.

1. Un exemple :
Si l'entreprise achète 4 tonnes de métal A, combien de tonnes de métal B achète-t-elle ?

2. Cas général
Soit x la quantité de métal A et y la quantité de métal achetées.
Montrer que x et y sont liées par la relation $x + 2y = 22$.

3. **a.** Tracer sur la figure 2 de l'ANNEXE 1 l'ensemble des points dont l'équation est

$$x + 2y = 22.$$

b. En déduire, graphiquement le coût minimum de production des alliages pour un investissement de 11 milliers d'euros, et les quantités.correspondantes de métaux A et B achetées.

EXERCICE 3 **3 points**
Commun à tous les candidats

La courbe $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 6]$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée sur la **feuille ANNEXE 2**.
Soit A le point du plan de coordonnées $(-1;0)$ et B le point du plan de coordonnées $(1 ; 5)$. Le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.

1. Déterminer $f'(1)$, où f' est la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 6]$.
2. L'une des trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, et $\mathscr{C}_3$ représentées sur les figures 1, 2 et 3 de la **feuille ANNEXE 2** représente la fonction f'. Laquelle ?
   Justifier votre réponse.

EXERCICE 4 **9 points**
Commun à tous les candidats

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution du prix d'une matière première.
On ne fera qu'un seul graphique qui sera complété tout au long des questions.

Partie A

le tableau suivant donne le prix d'une tonne de matière première en milliers d'euros au 1er janvier de chaque année :

Année	1998	1999	2000	2001
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3
Prix d'une tonne en milliers d'euro y_i	6,48	5,74	5,19	5,01

1. Sur la copie, représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$, le plan étant rapporté a un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 2 cm pour un millier d'euros sur l'axe des ordonnées).
2. Dans cette question, on envisage un ajustement affine pour modéliser l'évolution du prix de cette matière première.
   a. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés, et la tracer sur le graphique précédent (les calculs seront effectués à la calculatrice et les résultats seront donnés à 10^{-3} près).
   b. En supposant que cet ajustement affine reste valable pour les années suivantes, quel serait le prix d'une tonne de matière première au 1er janvier 2005 ?

Partie B

En fait, à partir de l'année 2001, le prix d'une tonne de cette matière première commence à remonter, comme le montre le tableau suivant :

Année	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année : x_i	3	4	5	6
Prix d'une tonne en milliers d'euro y_i	5,01	5,10	5,20	5,52

1. Placer sur le graphique de la **partie A** les points associés à ce 2e tableau.

2. On désire trouver une fonction qui modélise l'évolution de ce prix sur la période 1998–2008.

Pour cela, on considère la fonction f définie pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,11]$ par

$$f(x) = x + 10 - 5\ln(x+2).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur cet intervalle, et on notera f' sa fonction dérivée.

a. Donner un tableau de valeurs de la fonction f pour les valeurs de x entières comprises entre 0 et 11. Les valeurs de la fonction seront arrondies à 10^{-2}.

b. Calculer $f'(x)$, puis étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,11]$.

Dresser son tableau de variations. Les valeurs des extremums seront données à 10^{-2} près.

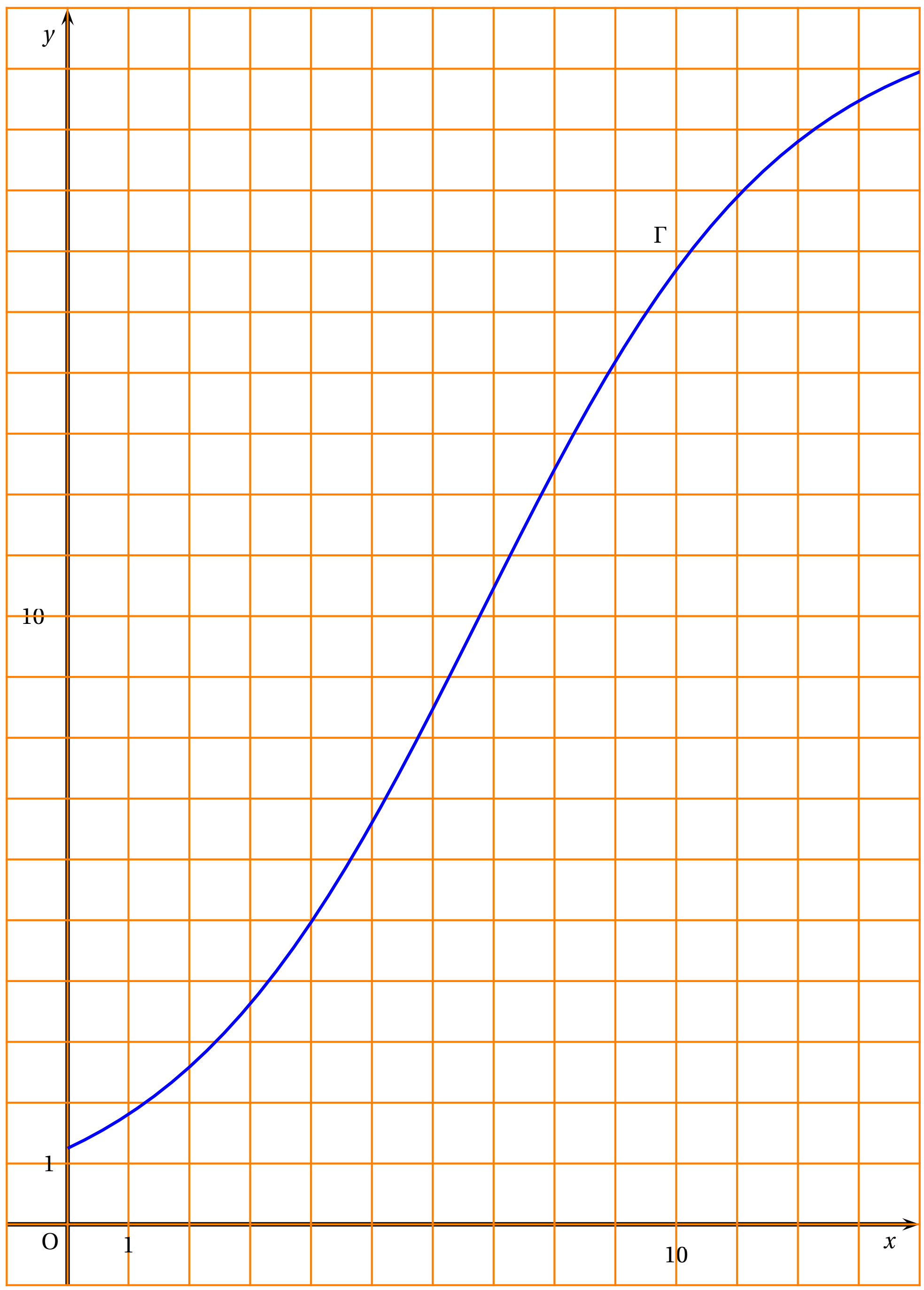
c. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f sur le graphique de la **partie 4.**

3. On admet que la fonction f modélise l'évolution du prix de cette matière première sur la période 1998–2008.

a. Selon ce modèle, quel serait le prix d'une tonne de matière première au $^{\text{er}}$ janvier 2005 ?

b. Déterminer en quelle année le prix d'une tonne de matière première retrouvera sa valeur de 1998.

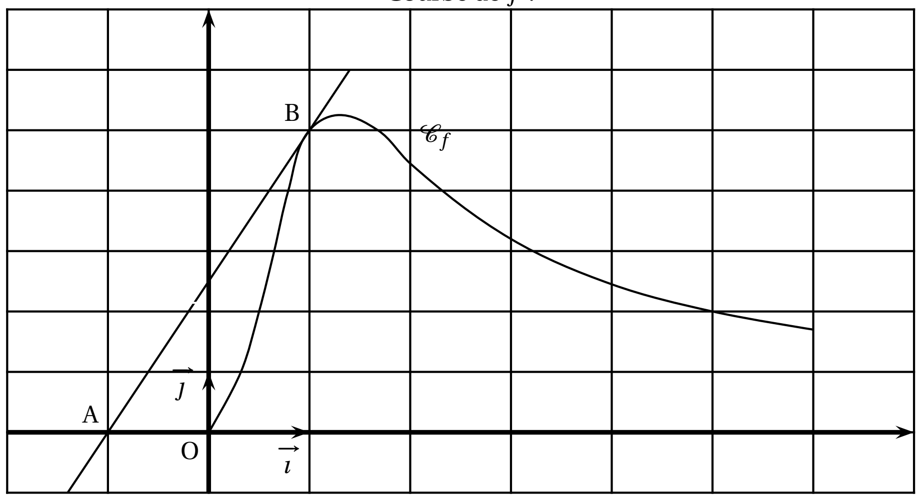
ANNEXE 1
Exercice 2
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
À rendre avec la copie
Courbe Γ



ANNEXE 2

Exercice 3

Courbe de f :



Propositions pour la courbe de f' :

Figure 1

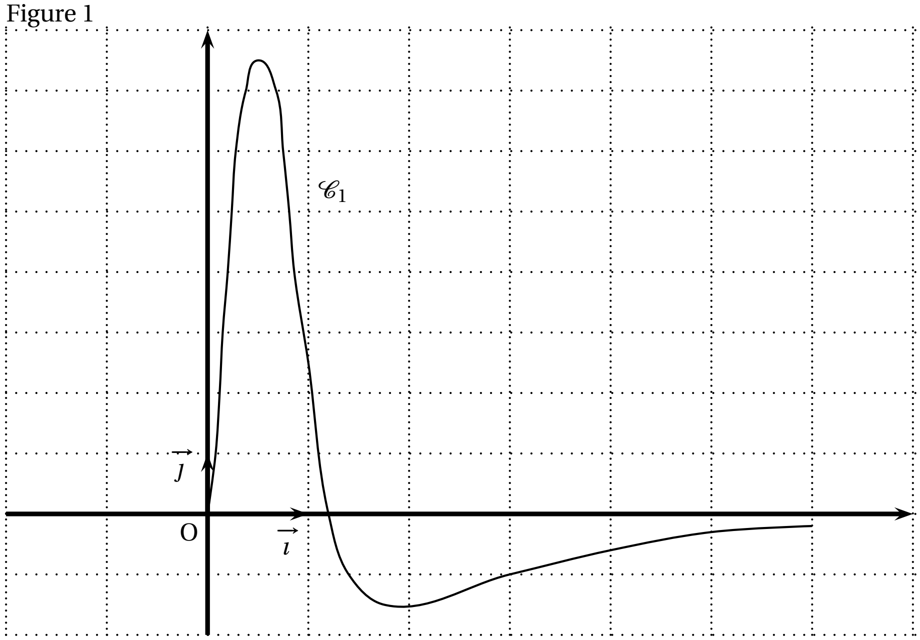


Figure 2

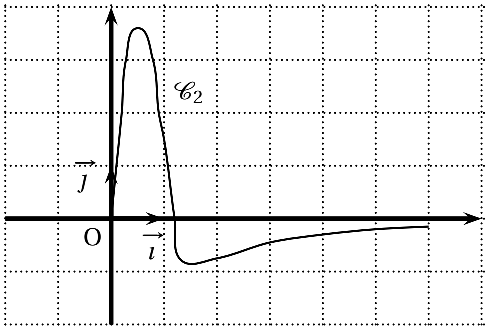
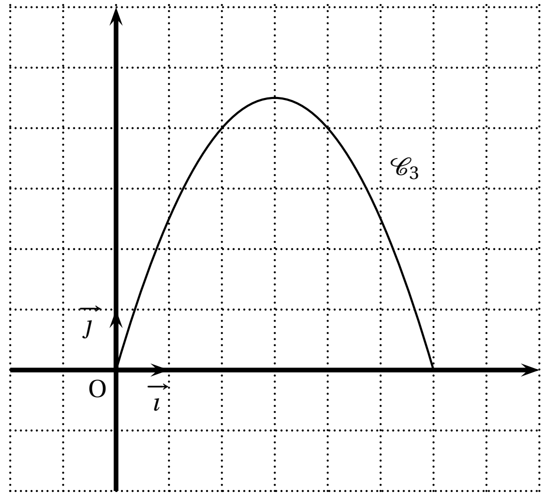


Figure 3



ANNEXE 1
Exercice 2
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
À rendre avec la copie

Figure 1 : surface d'équation $z = C(x\ ;\ y)$

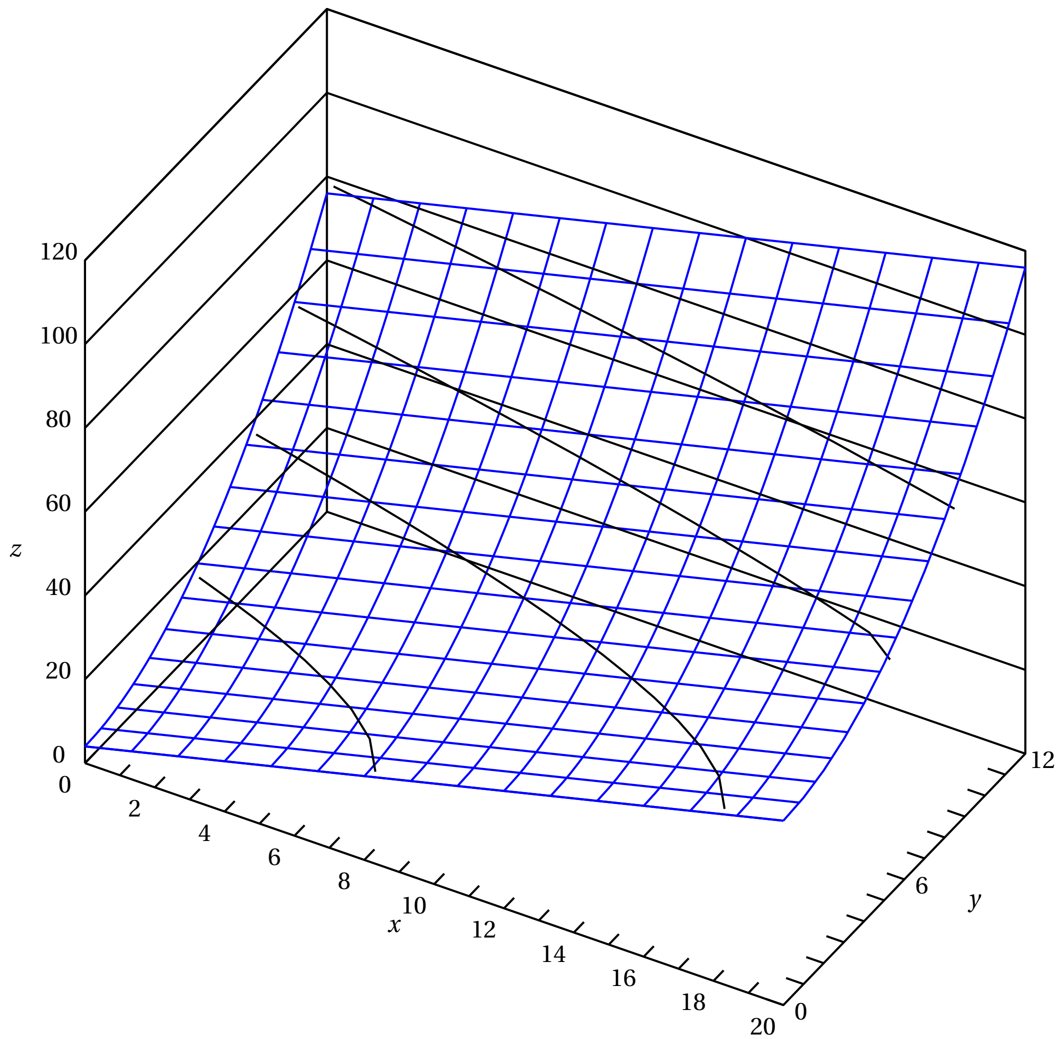
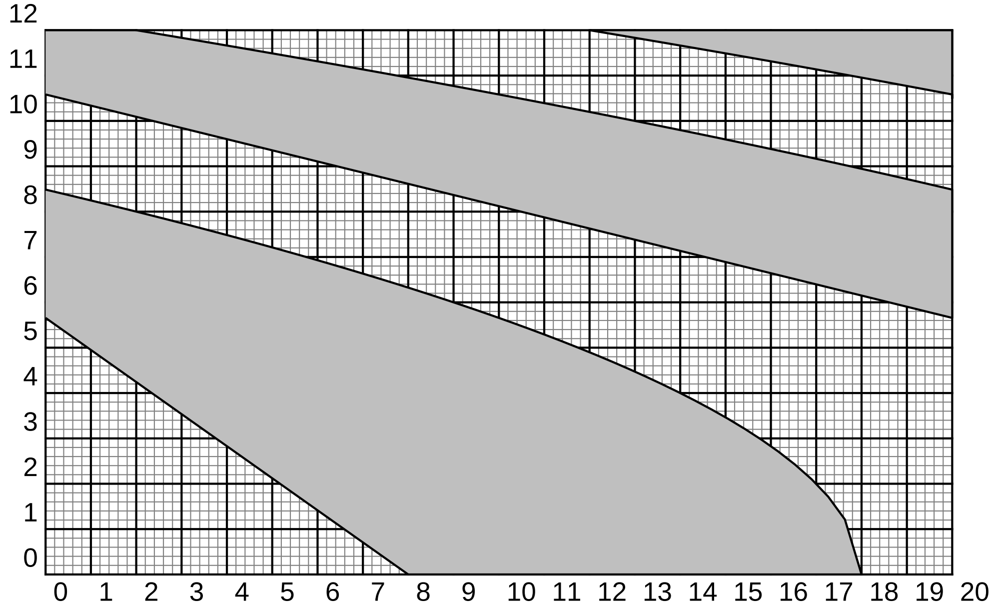


Figure 2 : courbes de niveau



Baccalauréat ES Centres étrangers juin 2005

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte.
L'exercice consiste à cocher cette réponse exacte sans explication.
Barème : Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une mauvaise réponse enlève 0,25 point.
L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total de points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

	QUESTIONS	RÉPONSES CHOISIES
1.	La fonction : $x \longmapsto \text{e}x + \ln 2$ a pour dérivée	☐ $x \longmapsto \text{e}x$ ☐ $x \longmapsto \text{e}x + \frac{1}{2}$ ☐ $x \longmapsto \text{e}$
2.	La fonction $x \longmapsto \ln(3x) + \ln 3$ a pour dérivée	☐ $x \longmapsto \frac{1}{3x} + \frac{1}{3}$ ☐ $x \longmapsto \frac{1}{x}$ ☐ $x \longmapsto \frac{1}{3x}$
3.	Sur $\mathbb{R}$, une primitive de la fonction $x \longmapsto \text{e}^{-2x+3}$ est	☐ $x \longmapsto -2\text{e}^{-2x+3}$ ☐ $x \longmapsto \text{e}^{-2x+3}$ ☐ $x \longmapsto -\frac{1}{2}\text{e}^{-2x+3}$
4.	Dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\text{e}^{2x} + \text{e}^{x} - 6 = 0$ possède	☐ 2 solutions ☐ 1 solution ☐ 0 solution
5.	Dans $]0\,;\,+\infty[$, l'équation : $(\ln x]^2 + \ln x - 6 = 0$ possède	☐ 2 solutions ☐ 1 solution ☐ 0 solution
6.	Dans $\mathbb{R}$ l'équation : $1,1^{x} = 2,2$ a pour solution le nombre	☐ 2 ☐ $\ln 2$ ☐ $\frac{\ln 2,2}{\ln 1,1}$

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

(*Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles*)
Une boîte de jeu est constituée de questions portant sur les deux thèmes « Cinéma » ou « Musique ».
Cette boîte contient un tiers de questions portant sur le thème « Cinéma », les autres portant sur le thème « Musique ».
Le candidat à ce jeu s'appelle Pierre.

PREMIÈRE PARTIE : Dans cette partie, on pose à Pierre une question choisie au hasard dans la boîte et on sait que :

– La probabilité que Pierre réponde correctement à une question du thème « Cinéma »est égale à $\frac{1}{2}$.

– La probabilité que Pierre réponde correctement une question du thème « Musique »est égale à $\frac{3}{4}$.

On considère les évènements suivants :
C : la question porte sur le thème « Cinéma »,
M : la question porte sur le thème « Musique. »,
E : Pierre répond correctement à la question posée.

1. Déterminer la probabilité de l'évènement :
« La question porte sur le thème « Musique » et Pierre y a répondu correctement ».

2. Montrer que la probabilité de l'évènement E est égale à $\frac{2}{3}$.

3. On suppose que Pierre n'a pas répondu correctement à la question posée ; quelle est la probabilité pour que la question ait porté sur le thème « Cinéma » ?
(*Certaines de ces réponses pourront être justifiées à l'aide d'un arbre de probabilités*)

DEUXIÈME PARTIE : En fait le jeu se déroule de la façon suivante :
On pose à Pierre une première question (selon les modalités décrites dans la première partie) et il marque 5 points s'il répond correctement et le jeu s'arrête.
Sinon, on lui pose une deuxième question choisie, indépendamment de la première et il marque 2 points s'il répond correctement et le jeu s'arrête.
Sinon, on lui pose une troisième question (choisie indépendamment des deux précédentes) et il marque 1 point s'il répond correctement.
Sinon le jeu s'arrête et il ne marque aucun point.
À chaque fois qu'une question est tirée, on remet dans la boîte une question portant sur le même thème.

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

2. Définir la loi de probabilité du nombre de points marqués par Pierre.

3. Calculer l'espérance mathématique du nombre de points marqués par Pierre.

EXERCICE 2 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs »et « non-fumeurs ».
Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre,
• 60 % des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
• 10 % des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.
On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non-fumeurs.
On désigne par :
• f_n le pourcentage de fumeurs à la génération de rang n,
• $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang n, où n est un entier naturel.
On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs.
On a donc $f_0 = g_0 = 0,5$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.

2. Justifier l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix} \times \text{ A où A désigne la matrice : } \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.

4. Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.

5. Montrer que : pour tout entier naturel n, $f_{n+1} = 0,5f_n + 0,1$.

6. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = f_n - 0,2$.

 a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

 b. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

 c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $f_n = 0,3 \times 0,5^n + 0,2$.

 d. Déterminer la limite de la suite (f_n) lorsque n tend vers $+\infty$ et l'interpréter.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Sur la figure ci-dessous on donne les représentations graphiques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de deux fonctions f_1 et f_2 définies et dérivables sur $[0 ; 3]$.

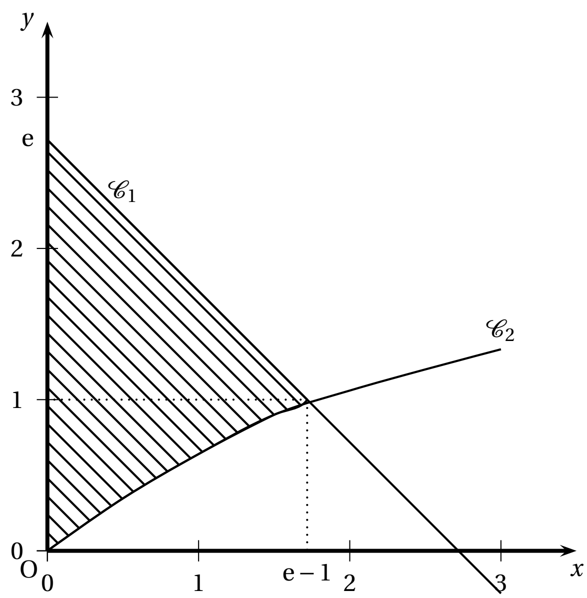


Figure 1

1. L'une des deux courbes représentées ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.

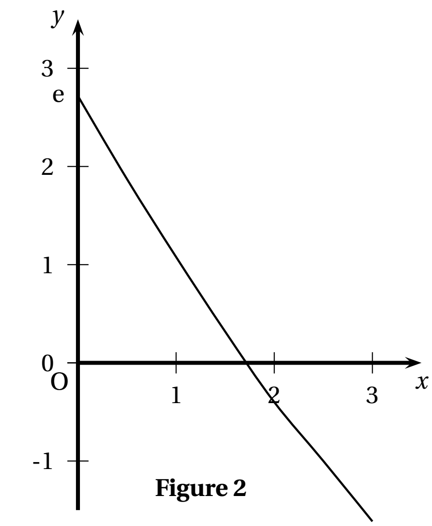


Figure 2

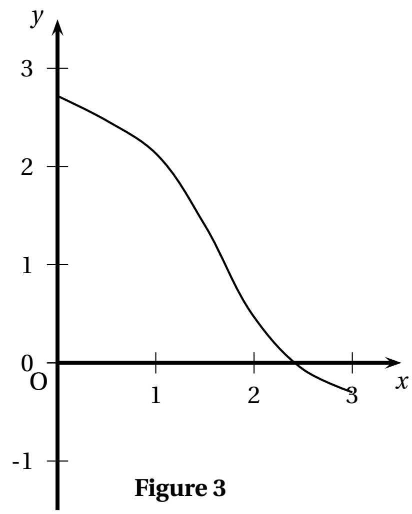


Figure 3

Laquelle de ces deux courbes ne peut pas convenir ?

2. **a.** Donner le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;3]$.

   b. Donner le tableau de signes de la fonction f' dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;3]$.

3. On note F une primitive de f sur $[0\,;3]$. Indiquer les variations de F sur l'intervalle $[0\,;3]$.

4. L'une des trois fonctions représentées ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction F.

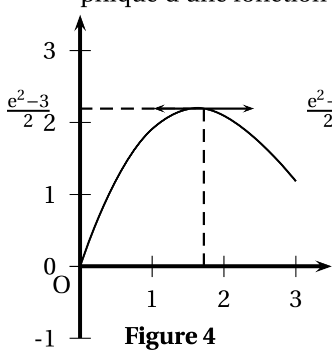


Figure 4

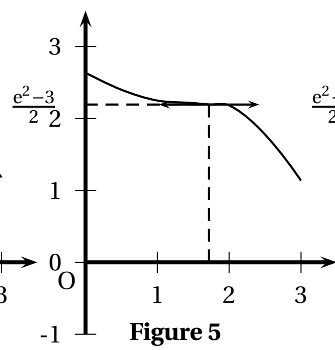


Figure 5

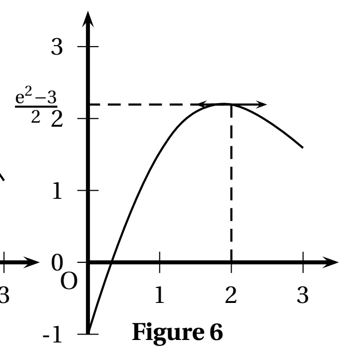


Figure 6

Justifier que les courbes représentées sur les figures 5 et 6 ne peuvent pas convenir.

5. Donner la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^{e-1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

6. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré sur la figure 1.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous tes candidats

Un club sportif a été créé en 1998 ; à l'origine le nombre d'adhérents était égal à 600.

Première partie Étude du nombre d'adhérents de 1998 à 2004

On donne, dans le tableau ci-dessous, le nombre d'adhérents de 1998 à 2003 :

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003
rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
nombre d'adhérents y_i	600	690	794	913	1 045	1 207

On pose $Y_i = \ln\left(y_i\right)$ et on réalise un ajustement affine par la méthode des moindres carrés du nuage de points $(x_i\ ;\ Y_i)$.
Une équation de la droite d'ajustement de Y par rapport à x est $Y = 0,14x + 6,397$.
En utilisant cet ajustement,

1. déterminer une prévision du nombre d'adhérents en 2004.
2. justifier les affirmations suivantes :

   a. $y_i = 600 \times 1,15^{x_i}$; 600 a été arrondi à l'unité, 1,15 a été arrondi au centième.

   b. De 1998 à 2004, on peut considérer que le nombre d'adhérents a augmenté de 15 % par an.

Deuxième partie : Étude du nombre d'adhérents à partir de l'année 2004

En fait le club a compté 2 400 adhérents lors de l'année 2004.
On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3\,600}{1 + 0,5\mathrm{e}^{-x}}.$$

On suppose que le nombre d'adhérents en $(2004 + n)$ est égal à $f(n)$, où n est un entier naturel.

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$ et l'interpréter.
2. On se propose de calculer le nombre moyen d'adhérents M de 2005 à 2009

   a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

Année	2005	2006	2007	2008	2009
n	1	2	3	4	5
$f(n)$	3 040				
Les valeurs de $f(n)$ seront arrondies à l'unité					

   b. Calculer la valeur de M, moyenne du nombre prévisionnel d'adhérents entre 2005 et 2009 (le résultat sera arrondi à l'unité).

3. On considère la fonction F définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(x) = 3\,600 \ln\left(\mathrm{e}^x + 0,5\right).$$

   a. Montrer que F est une primitive de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

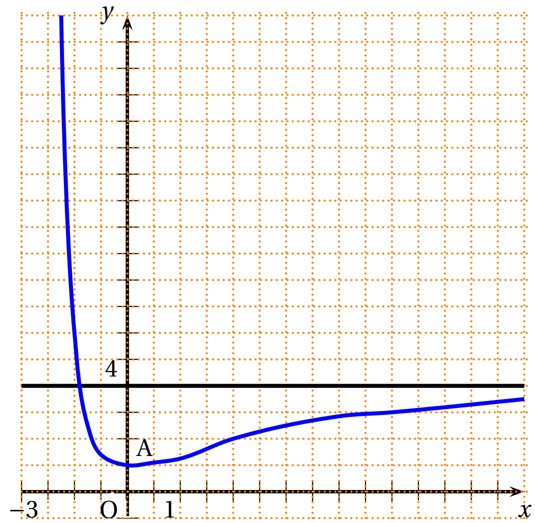
   b. Calculer la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 5,5]$.
   On pourra constater que les valeurs M et μ sont proches.

Baccalauréat ES Métropole juin 2005

EXERCICE 1 **3 points**

Commun tous les candidats

La courbe ($\mathscr{C}$) donnée ci-contre est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-3\ ;\ +\infty[$.
On sait que le point A de coordonnées $(0\ ;\ 1)$ appartient à la courbe ($\mathscr{C}$) et que la fonction f admet un minimum pour $x = 0$.
En outre, les droites d'équations respectives $y = 4$ et $x = -3$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.



Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles.
Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de cocher cette réponse *sur la feuille réponse fournie en* **ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)**.
Une réponse exacte rapporte 0,5 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

1. La limite de la fonction f en $+\infty$ est :	• $+\infty$ • -3 • 4
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]-3\ ;\ +\infty[$	• $f'(0) = 1$ • $f'(1) = 0$ • $f'(0) = 0$
3. L'équation de la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A est :	• $y = 1$ • $y = x$ • $y = 0$
4. Sur l'intervalle $]-3\ ;\ +\infty[$, l'équation $f(x) = x$	• n'admet aucune solution • admet comme solution unique : $x = 0$ • admet une solution unique appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ 2[$

Dans les deux questions suivantes, on considère la fonction g définie sur l'intervalle $]-3\ ;\ +\infty[$ par $g = \ln \circ f$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

5. Si $x = 0$, alors	• on ne peut pas calculer $g(x)$ • $g(x) = 1$ • $g(x) = 0$
6. On peut affirmer que sur l'intervalle $]-3\ ;\ +\infty[$	• g a les mêmes variations que la fonction ln • g a les mêmes variations que la fonction f • g a les variations inverses de celles de la fonction f

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

En 2004, une caisse de retraite propose à ses adhérents un barème de rachat d'un trimestre de cotisation des années antérieures selon le tableau suivant :

Âge de l'adhérent en années	54	55	56	57	58
Rang x_i	0	1	2	3	4
Montant y_i du rachat d'un trimestre de cotisation en euros	2 229	2 285	2 340	2 394	2 449

(Source : *CARMF* mai 2004)

1. Calculer l'augmentation en pourcentage du montant du rachat d'un trimestre entre un salarié de 54 ans et un salarié de 58 ans. On donnera le résultat arrondi à l'unité.
2. Sur votre copie, représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal :
   - sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 2 cm pour une unité ;
   - sur l'axe des ordonnées, on placera 2200 à l'origine et on choisira 1 cm pour 20 euros.
3. *Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés.*

   Le nuage de points permet de penser qu'un ajustement affine est justifié.

   Donner une équation de la droite de régression (D) de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.

   Représenter la droite (D) dans le repère précédent.
4. Quel serait avec cet ajustement affine le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans ?
5. En fait le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans est de 2 555 euros et le montant du rachat d'un trimestre après 60 ans est calculé de la façon suivante : à partir de 60 ans, le montant du rachat baisse de 3 % par an.

   Calculer le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié ayant 65 ans.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Au 1^er^ janvier 2005, une ville en pleine expansion avait une population de 100 000 habitants.

Un bureau d'étude fait l'hypothèse qu'à partir du 1er janvier 2005 :
• le nombre d'habitants de la ville augmente chaque année de 5 % du fait des naissances et des décès ;
• du fait des mouvements migratoires, 4 000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans cette ville.

Partie A : étude théorique

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants de cette ville au 1er janvier de l'année 2005+n.
Ainsi, $u_0 = 100\,000$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,05u_n + 4\,000$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n + 80\,000$.
   a. Calculer v_0.
   b. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   c. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que $u_n = 180\,000 \times (1,05)^n - 80\,000$.
   d. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie B

Le but de cette partie est de prévoir l'évolution de la population jusqu'en 2020, en utilisant le modèle théorique étudié à la **partie A**.

1. Quel sera le nombre d'habitants de la ville au 1er janvier 2020 ?
2. À partir de quelle année la population de cette ville dépassera-t-elle 200 000 habitants ?

FORMULAIRE POUR L'EXERCICE 2
SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $a \in \mathbb{R}$:
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = u_n + a, \quad u_n = u_0 + na.$

Suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $b \in \mathbb{R}$:
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = bu_n, \quad u_n = u_0 b^n.$

Somme de termes : • $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

• Si $b \neq 1$ alors $1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

EXERCICE 3 **7 points**
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2 + 10\mathrm{e}^{-0,5x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal et (D) la droite d'équation $y = x - 2$. La courbe $(\mathscr{C})$ est partiellement représentée en **ANNEXE 2**.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On pose $\alpha = 2\ln 5$.

a. Montrer que $f(\alpha) = \alpha$.

b. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de α.

3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et on note f' la fonction dérivée de f sur cet intervalle.

a. Calculer $f'(x)$,pour tout x élément de l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, et dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur cet intervalle.

4. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)] = 0$ et que, pour tout x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$,

$$f(x)-(x-2) > 0.$$

Donner l'interprétation graphique de ces résultats.

5. Sur le graphique donné en **ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)** :

a. placer le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse α ;

b. tracer la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse α ;

c. tracer la droite (D).

6. On note $\mathscr{A}$ l'aire (en unités d'aire) du domaine E délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 6$.

a. Hachurer sur le graphique, donné en **ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)**, le domaine E, puis exprimer l'aire A à l'aide d'une expression faisant intervenir une intégrale.

b. Déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$, puis en donner la valeur arrondie au centième.

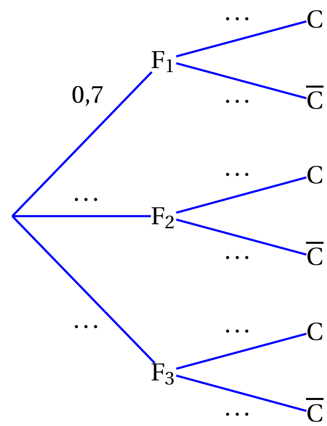
EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une usine d'emballage de pommes est approvisionnée par trois producteurs. Le premier producteur fournit 70 % de l'approvisionnement de cette usine, le reste étant également partagé entre le deuxième producteur et le troisième.
Avant d'être emballées, les pommes sont calibrées par une machine pour les trier selon leur diamètre. Les pommes dont le diamètre est conforme aux normes en vigueur sont emballées, les autres, dites « hors calibre », sont rejetées.
Il a été constaté que 20 % des pommes fournies par le premier producteur sont hors calibre, 5 % des pommes fournies par le second producteur sont hors calibre et 4 % des pommes fournies par le troisième producteur sont hors calibre.
Chaque jour les pommes livrées par les différents producteurs sont entreposées dans le même hangar. Pour l'étude du problème qui suit, on convient qu'elles sont bien mélangées.
Un contrôle de qualité sur les pommes est effectué de la manière suivante : un contrôleur choisit de manière aléatoire une pomme dans ce hangar, puis mesure son diamètre pour déterminer si elle est de « bon calibre »ou « hors calibre ».
Un mercredi matin, un contrôle de qualité est effectué par le contrôleur de la manière décrite ci-dessus.
On appellera F_1 l'évènement : « la pomme prélevée provient du premier producteur »
F_2 l'évènement : « la pomme prélevée provient du deuxième producteur »
F_3 l'évènement : « la pomme prélevée provient du troisième producteur »
C l'évènement : « la pomme prélevée a un bon calibre »
$\overline{\text{C}}$ l'évènement : « la pomme prélevée est hors calibre ».
Tous les résultats de cet exercice seront donnés à 10^{-4} *près.*

1. Déterminer les probabilités des évènements F_2 et F_3.

2. Recopier sur votre copie et compléter l'arbre suivant :



3. Justifier que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre et provienne du troisième producteur est 0,144 0.
4. Montrer que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre est : 0,846 5.
5. La pomme mesurée est hors calibre. Le contrôleur affirme :

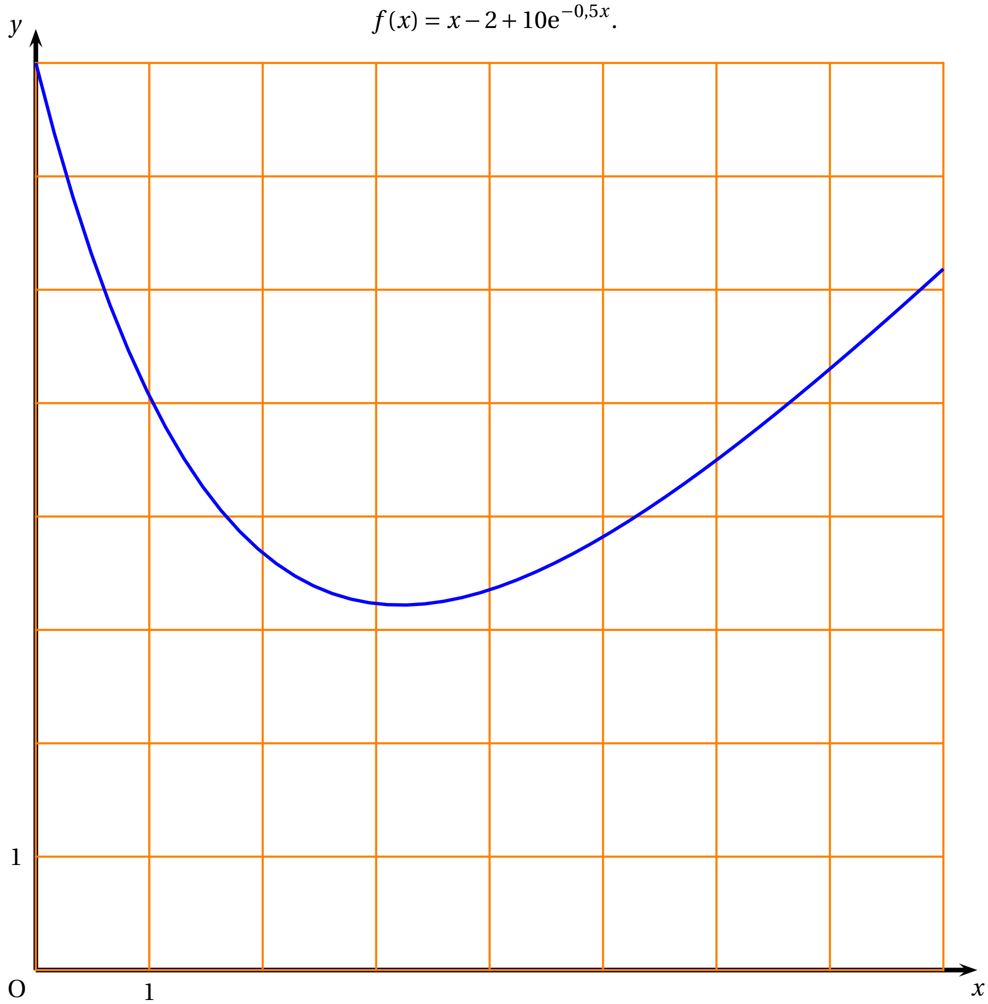
   « Cette pomme provient très probablement du premier producteur ».

   Quel calcul permet de justifier cette affirmation ?
   Faire ce calcul et conclure.

ANNEXE 2
Exercice 2
À rendre avec la copie

Courbe représentative $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $[0\,;\,8]$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = x - 2 + 10\mathrm{e}^{-0,5x}.$$



∽ Baccalauréat ES La Réunion juin 2005 ∾

EXERCICE 1 **5 points**
Commun tous les candidats

Au rayon « image et son » d'un grand magasin, un téléviseur et un lecteur de DVD sont en promotion pendant une semaine. Une personne se présente :

- la probabilité qu'elle achète le téléviseur est $\frac{3}{5}$;
- la probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle achète le téléviseur est $\frac{7}{10}$;
- la probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle n'achète pas le téléviseur est $\frac{1}{10}$.

On désigne par T l'évènement : « la personne achète le téléviseur »et par L l'évènement : « la personne achète le lecteur de DVD ».
On notera $\overline{\text{T}}$ et $\overline{\text{L}}$ les évènements contraires respectifs de T et de L.

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer les probabilités des évènements suivants (les résultats seront donnés sous forme de fractions) :
   a. « la personne achète les deux appareils »
   b. « la personne achète le lecteur de DVD »
   c. « la personne n'achète aucun des deux appareils ».
3. Montrer que, si la personne achète le lecteur de DVD, la probabilité qu'elle achète aussi le téléviseur est $\frac{21}{23}$.
4. Avant la promotion, le téléviseur coûtait 500 € et le lecteur de DVD 200 €. Pendant cette semaine, le magasin fait une remise de 15 % pour l'achat d'un seul des deux appareils et de 25 % pour l'achat des deux appareils. On désigne par D la dépense effective (en €) de la personne.
   a. Déterminer les valeurs possibles de D.
   b. Déterminer la loi de probabilité de D.
   c. Calculer l'espérance mathématique de D.
   d. Le responsable du rayon « image et son »prévoit qu'il se présentera dans la semaine 80 personnes intéressées par ces deux appareils. Quel chiffre d'affaires peut-il espérer effectuer sur la vente de ces deux appareils ?

EXERCICE 2 **4 points**
Commun tous les candidats

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Une seule-réponse par question est acceptée et aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte 0,5 *point. Une mauvaise réponse enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, la note totale attribuée à l'exercice est* 0.

1. La population d'une commune rurale diminue de 2 % par an.

Sa population aura diminué de moitié dans :

A : 15 ans B : 20 ans C : 35 ans D : 50ans

2. Le prix d'un article augmente d'un certain pourcentage puis baisse immédiatement du même pourcentage. Finalement le prix de cet article :

A : a augmenté **B** : a baissé **C** : n'a pas varié **D** : on ne peut pas savoir

3. La population mondiale a doublé entre 1960 et 2000.

Le taux d'accroissement moyen annuel a été de :

A : 3 % **B** : 2,75 % **C** : 2,5 % **D** :1,75 %

4. Pour tout réel x, $(\text{e}^x)^2 \times \text{e}^{3x-1}$ est égal à :

A : e^{x^2+3x-1} **B** : $\text{e}^{2x(3x-1)}$ **C** : $\dfrac{\text{e}^{5x}}{\text{e}}$ **D** : $\dfrac{\text{e}^{(x^2)}}{\text{e}^{1-3x}}$

5. Le nombre -2 est solution de l'équation :

A : $\text{e}^x = -2$ **B** : $\text{e}^{\ln x} = -2$ **C** : $\ln x = -\ln 2$ **D** : $\ln \text{e}^x = -2$

6. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(x+3) < \ln 6$ est :

A : $S =]-\infty\ ;\ 3[$ **B** : $S =]-3\ ;\ 3[$ **C** : $S =]0\ ;\ 3[$ **D** : $S =]3\ ;\ +\infty[$

7. $\displaystyle\int_1^4 x^2\,\text{d}x =$

A : 6 **B** : 15 **C** : 21 **D** : 63

8. La valeur moyenne sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$ de la fonction qui à x associe $\dfrac{1}{x}$ est :

A : $\dfrac{1}{2}$ **B** : $\dfrac{2}{3}$ **C** : $\ln\sqrt{3}$ **D** : $\ln 2$

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Sur un parcours donné, la consommation y d'une voiture est donnée en fonction de sa vitesse moyenne x par le tableau suivant :

x (en km/heure)	80	90	100	110	120
y (en litres/100 km)	4	4,8	6,3	8	10

1. La consommation est-elle proportionnelle à la vitesse moyenne ? Justifier la réponse.
2. **a.** Représenter le nuage de points correspondant à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal du plan (on prendra 2 cm pour 10 km/h sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 litre sur l'axe des ordonnées).

   b. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.

   c. À l'aide de la calculatrice, donner une équation, sous la forme $y = ax+b$, de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés et tracer cette droite (on arrondira a au millième et b au centième).

d. En utilisant cet ajustement, estimer la consommation aux 100 km (arrondie au dixième) de la voiture pour une vitesse de 130 km/h.

3. La forme du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel. On pose : $z = \ln y$ et on admet que la droite d'ajustement obtenue pour les cinq points $(x\ ;\ z)$ du nuage par la méthode des moindres carrés, a pour équation $z = 0,0234x - 0,5080$.

a. Écrire y sous la forme $y = A\mathrm{e}^{Bx}$ $\left(\text{donner } A \text{ et } B \text{arrondis à } 10^{-4}\right)$.

b. Tracer, sur le même graphique, la courbe d'équation $y = A\mathrm{e}^{Bx}$ pour x élément de l'intervalle $[80\ ;\ 120]$.

c. En utilisant cet ajustement, estimer la consommation aux 100 km (arrondie au dixième) de la voiture, pour une vitesse de 130 km/h.

4. Des deux valeurs obtenues dans les questions **2. d.** et **3. c.**, pour la consommation à une vitesse de 130 km/h, laquelle vous semble la plus proche de la consommation réelle ? Expliquer votre choix.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le 1er janvier 2005, une grande entreprise compte 1 500 employés. Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10 % de l'effectif du 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.

Pour tout entier naturel n, on appelle u_n le nombre d'employés de l'entreprise le 1er janvier de l'année $(2005 + n)$.

1. **a.** Calculer u_0, u_1 et u_2.

La suite u de terme général u_n est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier les réponses.

b. Expliquer ensuite pourquoi on a, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 100$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 1000$.

a. Démontrer que la suite v de terme général v_n est géométrique. Préciser sa raison.

b. Exprimer v_n en fonction de n.

En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 500 \times 0,9^n + 1000$.

c. Déterminer la limite de la suite u.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -50 \times 0,9^n$.

En déduire le sens de variation de la suite u.

4. Au 1er janvier 2005, l'entreprise compte un sur-effectif de 300 employés. À partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise ne sera -t-elle plus en sur-effectif ?

EXERCICE 4 **6 points**

Commun tous les candidats

On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f définie sur $]0\ ;\ 1[\cup [1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x\ln x}$$

et on nomme $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$-\mathrm{e}$	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	0

1. Justifier les éléments suivants donnés par ce tableau de variations :
   signe de $f'(x)$, limites aux bornes de l'ensemble de définition, image de $\frac{1}{\mathrm{e}}$ par f.
   On admet que : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.
2. Combien la courbe $\mathscr{C}$ possède-t-elle d'asymptotes ? Donner une équation de chacune d'elles.
3. **a.** Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point A d'abscisse $\frac{1}{\mathrm{e}}$.
   b. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point B d'abscisse e.
4. Indiquer pour quelles valeurs du réel k l'équation $f(x) = k$.
   a. ne possède aucune solution ;
   b. possède une solution unique ;
   c. possède deux solutions distinctes.

(Aucune justification n'est attendue dans cette question, on pourra s'aider de la représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide de la calculatrice)

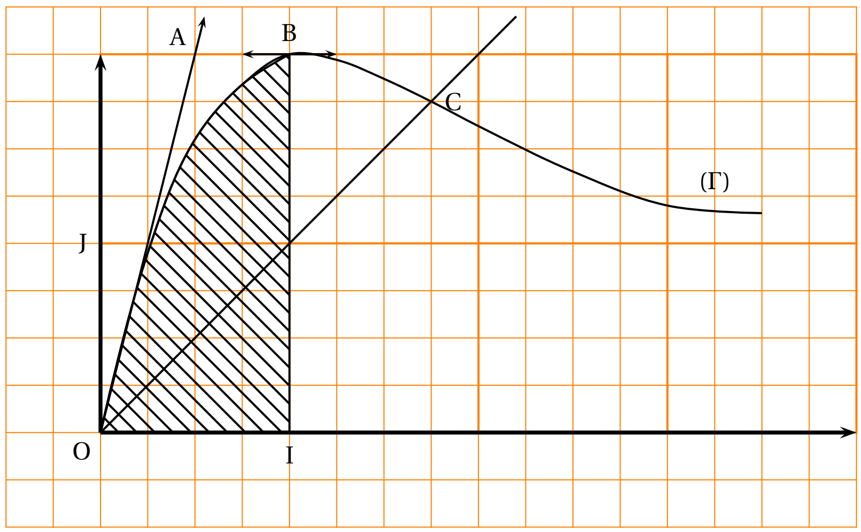
↫ Baccalauréat ES Liban 6 juin 2005 ↬

Exercice 1 **5 points**

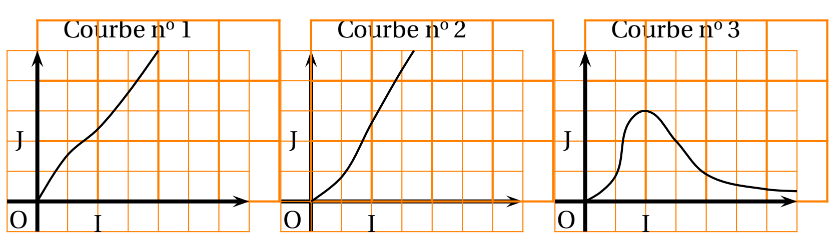
Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormal du plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm, la courbe (Γ), tracée ci-dessous, est la représentation graphique d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,3{,}5]$.

- I et J sont les points du plan tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$;
- C est le point de (Γ) situé sur la bissectrice de $\widehat{IOJ}$;
- (OA) est la tangente en O à (Γ) ;
- $\mathscr{S}$ est la surface hachurée sur la figure ci-dessous :



1. Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
   a. Quel est le tableau de variations de g sur $[0\,;\,3{,}5]$?
   b. Quelles sont les valeurs de $g'(0)$ et de $g'(1)$?
   c. Quelles sont les coordonnées du point C ?
   d. Résoudre l'inéquation $g(x) \geqslant x$ sur $[0\,;\,3{,}5]$.
2. Définir la surface $\mathscr{S}$ par un système d'inéquations et déterminer graphiquement un encadrement de l'aire de $\mathscr{S}$ d'amplitude 2 cm^2.
   Rappel : l'aire d'un trapèze est donnée par la formule : $\mathscr{A} = \dfrac{(B+b)\times h}{2}$ *où B et b sont les bases du trapèze et h sa hauteur.*
3. On suppose que l'une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la primitive de la fonction g s'annulant en 0. En justifiant l'élimination de deux des courbes, indiquer celle qui est la représentation graphique de cette primitive.



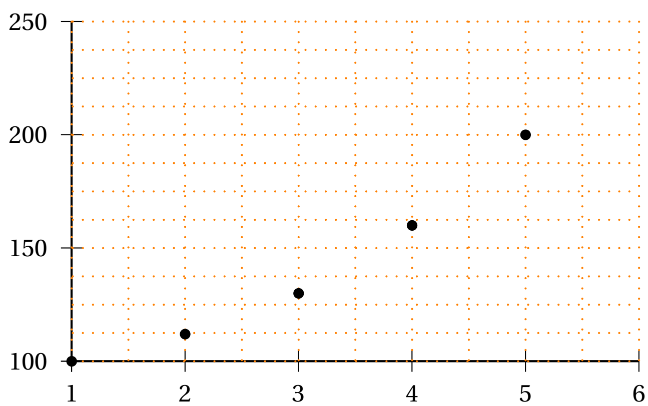
EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un fournisseur d'accès à internet, souhaite faire une prévision du nombre de ses abonnés pour l'année 2005, il établit un relevé du nombre des abonnés des années 2000 à 2004.

Il affecte l'indice 100 à l'année 2000 pour établir la statistique des abonnés et consigne les données sur le tableau et le graphique ci-dessous :

Année	2000	2001	2002	20003	2004
Rang x_i	1	2	3	4	5
Indice y_i	100	112	130	160	200



Partie A

1. Le nombre d'abonnés était de 2040 pour l'année 2000, de combien est-il pour l'année 2004 ?
2. Quel est le pourcentage d'augmentation du nombre d'abonnés entre 2003 et 2004 ?
3. Quelle est l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés ?
4. Quelles prévisions du nombre d'abonnés peut-on faire pour les années 2005 et 2010 ?

   On arrondira à l'entier le plus proche.

Partie B

Le fournisseur décide d'utiliser un changement de variable pour obtenir un autre ajustement, il crée un nouveau tableau en posant $Y = \ln(y)$.

1. Recopier et compléter le tableau. *On donnera des valeurs approchées à* 10^{-2}.

x_i	1	2	3	4	5
$Y_i = \ln y_i$					

2. Dans le plan muni d'un repère, construire le nuage de points de coordonnées $(x_i\ ;\ Y_i)$ et la droite de régression de Y en x donnée par l'équation : $Y = 0,17x + 4,39$.
3. Exprimer le nombre d'abonnés n_i en fonction du rang x_i de l'année.
4. En déduire une nouvelle prévision du nombre d'abonnés pour les années 2005 et 2010.

EXERCICE 2 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi la spécialité mathématique

Utiliser le DOCUMENT RÉPONSE DONNÉ EN ANNEXE

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on désigne par $\mathscr{S}$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace tel que $z = 3xy$. On dit $\mathscr{S}$ est la surface d'équation $z = 3xy$.
Une courbe de niveau de cote z_0 est l'intersection d'un plan d'équation $z = z_0$, parallèle au plan $(x\mathrm{O}y)$ avec la surface $\mathscr{S}$. On définit de façon identique une courbe de niveau d'abscisse x_0 et une courbe de niveau d'ordonnée y_0.

1. Soient les courbes de niveau d'abscisse 1, d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ et d'abscisse 2.

   Tracer les projections orthogonales de ces courbes de niveau dans le plan $(y\mathrm{O}z)$ sur la figure 1 du document réponse.

2. **a.** Quelle est la nature des courbes de niveau d'abscisse constante ?

   b. Montrer que les courbes de niveau de cote constante non nulle sont des hyperboles.

3. Sur la figure 2 sont représentées trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ représentant les projections orthogonales dans le plan $(x\mathrm{O}y)$ de trois courbes de niveau de cote constante k.

   Préciser, en le justifiant, la valeur de k associée à chaque courbe.

4. Le point A$'$ représenté sur la courbe $\mathscr{C}_2$ de la figure 2 est la projection orthogonale dans le plan $(x\mathrm{O}y)$ d'un point A$(x\,;\,y\,;\,z)$, de la surface $\mathscr{S}$.

   a. Déterminer les coordonnées du point A dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

   b. Préciser les coordonnées du point A$''$, projeté orthogonal de A dans le plan $(y\mathrm{O}z)$, puis placer ce point A$''$ sur la figure 1.

5. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3x + 6y - z - 6 = 0$.

   a. Montrer que le point A appartient au plan $\mathscr{P}$.

   b. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ contient la courbe de niveau d'abscisse 2.

   c. Démontrer que l'intersection de la surface $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$ est la réunion de deux droites : la courbe de niveau d'abscisse 2 et une autre droite que l'on déterminera par un système d'équations cartésiennes.
   On pourra utiliser la factorisation $x + 2y - xy - 2 = (x-2)(1-y)$.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Tableau d'informations n° 1

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
Signe de $u(x)$		+	0	−		−	0	+	
Signe de $u'(x)$		−		−	0	+		+	

Le tableau d'informations n° 1 ci-dessus fournit des informations sur une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Établir un tableau des variations de la fonction u.

On considère maintenant les fonctions f et g définies par $f(x) = \ln[u(x)]$ et $g(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ où u désigne la fonction de la question précédente.

2. **a.** Une des deux affirmations suivantes est fausse, laquelle ? Justifier en précisant le bon ensemble de définition :

Affirmation 1 : « La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ » ;

Affirmation 2 : « La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ ».

b. Donner les variations des fonctions f et g. Énoncer le(s) théorème(s) utilisé(s).

c. Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x)$

d. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 1$.

3. Voici d'autres informations relatives à la fonction u et à sa dérivée u'.

Tableau d'informations n°2.

x	-2	0	$\frac{1}{2}$	2	3
$u(x)$	4	-2	$-\frac{9}{4}$	0	4
$u'(x)$	-5	1	0	3	5

Terminer chacune des deux phrases **a.** et **b.** par la réponse qui vous semble exacte, parmi celles proposées dans les cadres ci-dessous, en justifiant votre choix.

a. La tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 2 est parallèle :

• à l'axe des abscisses	• à la droite d'équation $y = x$	• à la droite d'équation $y = 3x$

b. Le nombre $f'(-2)$:

• n'existe pas	• vaut -20	• vaut $-\frac{4}{5}$	• vaut $-\frac{5}{4}$	• vaut $\frac{5}{4}$

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

On propose aux élèves, Quentin, Nicolas et Lucien de répondre à un Q.C.M. comportant quatre questions dont voici le barème et les instructions :

Pour chaque question, une seule des quatre propositions A, B, C ou D est exacte.

L'élève recopie sur sa feuille une grille de réponses présentée comme ci-dessous :

Question	Réponse : A, B, C, D
1	
2	
3	
4	

Une bonne réponse rapporte 1 point ; une mauvaise réponse enlève 0,5 point.
L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total de points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.
Les trois candidats répondent correctement à la première question.

1. Quentin choisit de ne pas répondre à la question n° 2 et de donner une réponse à chacune des deux dernières questions, en choisissant au hasard et de façon équiprobable, l'une des quatre réponses proposées.
   - **a.** Quelles notes peut-il obtenir à ce Q.C.M. ?
   - **b.** Combien de grilles différentes peut-il remplir ?
   - **c.** Quelle probabilité a-t-il de ne faire aucune faute ?
   - **d.** Quelle probabilité a-t-il de faire deux fautes ?
   - **e.** Construire un tableau qui associe, à chaque total de points, sa probabilité. En déduire l'espérance mathématique de la note obtenue.
2. Nicolas adopte la stratégie de donner une réponse à chacune des trois dernières questions en choisissant au hasard et de façon équiprobable l'une des quatre réponses proposées.
   - **a.** Quelles notes peut-il obtenir à ce Q.C.M. ?
   - **b.** Combien de grilles différentes peut-il remplir ?
   - **c.** Quelle probabilité a-t-il de ne faire aucune faute ?
   - **d.** Quelle probabilité a-t-il de faire trois fautes ?
   - **e.** Construire un tableau qui associe, à chaque total de points, sa probabilité. En déduire l'espérance mathématique de la note obtenue.
3. Lucien choisit de ne répondre à aucune des trois dernières questions.

   Classer les stratégies de Quentin, Nicolas et Lucien.

ANNEXE

DOCUMENT RÉPONSE À RENDRE AVEC LA COPIE

(Exercice 2 spécialité)

Figure 1

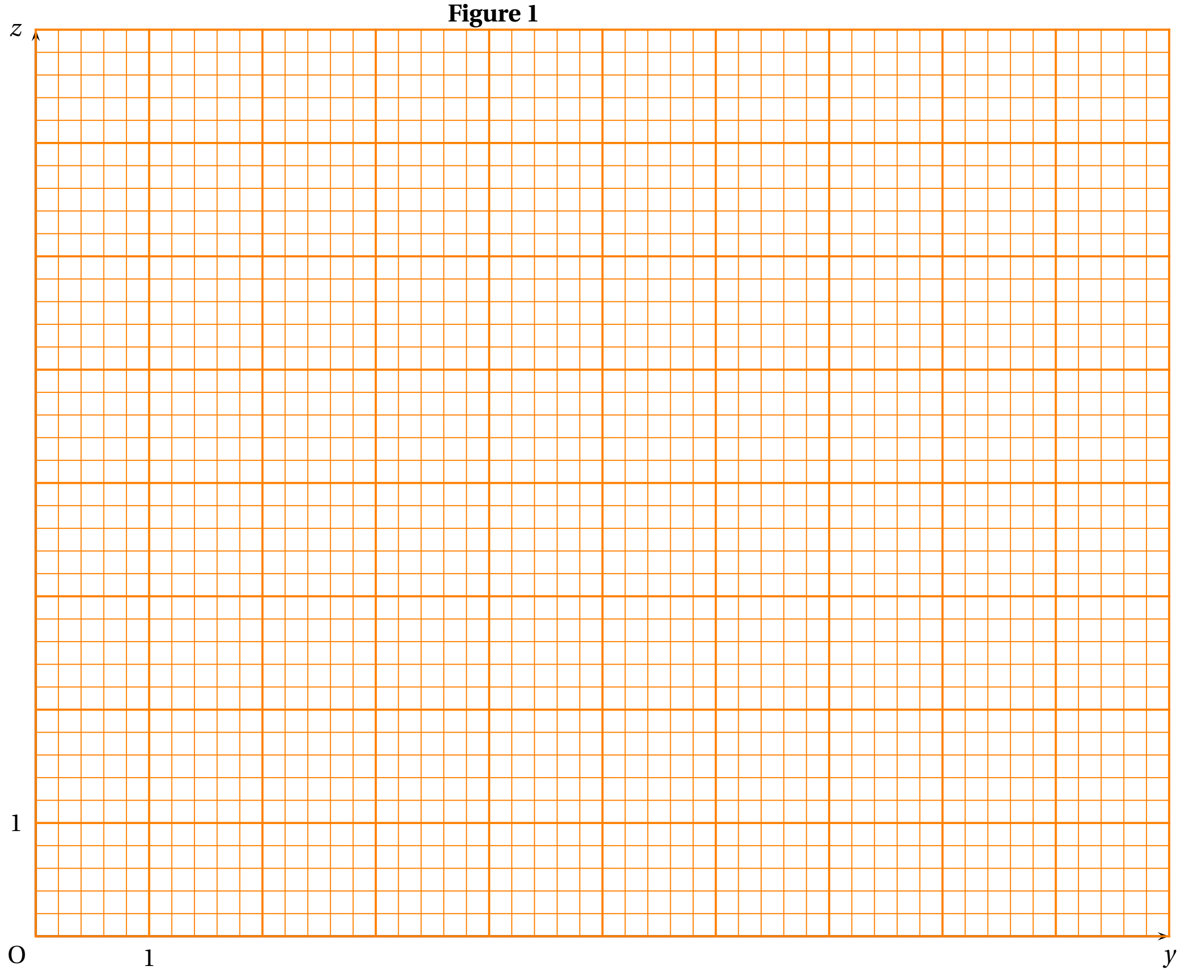
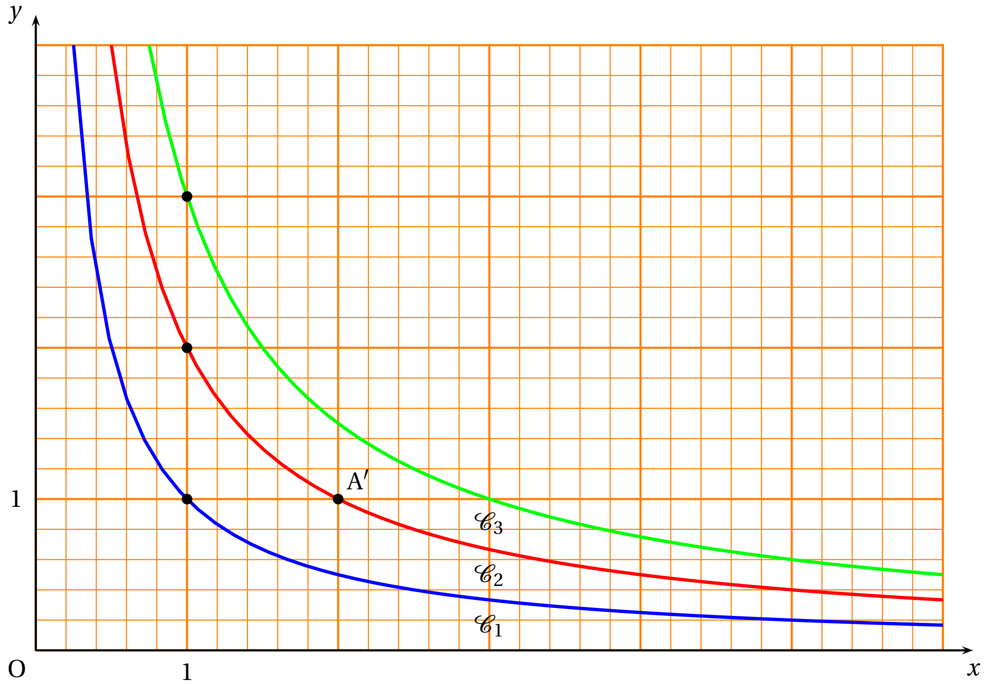


Figure 2



y
1
O
1
x
A′
$\mathscr{C}_3$
$\mathscr{C}_2$
$\mathscr{C}_1$

Baccalauréat ES Polynésie 9 juin 2005

EXERCICE 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

Une entreprise étudie la progression de ses bénéfices ou pertes, évalués au premier janvier de chaque année, depuis le 1er janvier 1999. Chaque année est identifiée par son rang.
À l'année 1999 est attribué le rang 0 et à l'année $1999 + n$ le rang n ainsi 2001 a le rang 2.
Le tableau ci-dessous indique pour chaque rang x_i d'année le bénéfice ou perte réalisé, exprimé en milliers d'euros et noté y_i.

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	$-25,000$	$-3,111$	$9,892$	$17,788$	$22,598$	$25,566$

On cherche à approcher ces bénéfices par une fonction.
Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = -\mathrm{e}^{\left(-\frac{x}{2}+4\right)} + 30.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 1 cm pour une unité en abscisses et 1 cm pour 4 unités en ordonnées.

1. On considère que l'approximation des bénéfices par f est satisfaisante si la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées y_i et les valeurs approchées $f(x_i)$ est inférieure à $0,5$.

   L'approximation par f est-elle satisfaisante ? (Le résultat obtenu à l'aide de la calculatrice constituera une justification acceptable pour cette question.)
2. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote D dont on précisera l'équation.

   c. Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à D.
3. **a.** Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser le tableau de variations.

   b. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. **a.** En utilisant le modèle que constitue la fonction f, en quelle année le bénéfice évalué au 1er janvier dépassera-t-il 29 800 euros ?

   b. Ce bénéfice atteindra-t-il 30 000 euros ? Justifier.
5. Construire $\mathscr{C}_f$, en faisant apparaître tous les éléments graphiques mis en évidence dans les questions précédentes.

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une urne contient des jetons bleus, des jetons blancs et des jetons rouges.
10 % des jetons sont bleus et il y a trois fois plus de jetons blancs que de jetons bleus.
Un joueur tire un jeton au hasard.

S'il est rouge, il remporte le gain de base.
S'il est blanc, il remporte le carré du gain de base.
S'il est bleu, il perd le cube du gain de base.

1. On suppose que le gain de base est 2 euros.

a. Déterminer la loi de probabilité sur l'ensemble des résultats possibles.

b. Calculer le gain moyen que l'on peut espérer réaliser sur un grand nombre de tirages.

2. On cherche à déterminer la valeur g_0 du gain de base, telle que le gain moyen réalisé sur un grand nombre de tirages soit maximal. Le résultat sera arrondi au centime d'euro.

Soit x le gain de base en euros.

a. Montrer que le problème posé revient à étudier les éventuels extremums de la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = -0,1x^3 + 0,3x^2 + 0,6x.$$

b. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Déterminer $f'(x)$.

c. En déduire le sens de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

d. Conclure sur le problème posé.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

La figure de l'annexe représente un pavé droit ; le point O est le milieu de [AD].

Soit P le milieu du segment [EF].

1. **a.** Quel ensemble de points de l'espace a pour équation $z = 2$?

b. Déterminer une équation du plan (ABF).

c. En déduire un système d'équations qui caractérise la droite (EF).

2. **a.** Quelles sont les coordonnées des points A, G et P ?

b. Placer sur la figure le point Q de coordonnées (0 ; 0,5 ; 0).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (APQ).

3. **a.** Construire sur la figure les segments [PQ] et [AG].

b. Le point G appartient-il au plan (APQ) ? Justifier.

4. On construit la figure précédente à l'aide d'un logiciel de géométrie, puis on demande au logiciel de représenter le point d'intersection des droites (AG) et (PQ). Quelle pourrait être la réponse de l'ordinateur ?

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples ; pour chacune des quatre questions, une et une seule affirmation est exacte.

Indiquez sur votre copie le numéro de la question et recopiez l'affirmation exacte ; aucune justification n'est demandée sauf pour la question 4.

Barème des trois premières questions :

À chaque question est attribué 1 *point.*

Une réponse inexacte enlève 0,5 *point.*

Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est ramenée à zéro.

1. Soient A et B deux évènements. II est possible que :

- $p(\text{A}) = 0,8$ et $p(\text{B}) = 0,4$ et $p(\text{A} \cap \text{B}) = 0,1$.
- $p(\text{A}) = 0,7$ et $p(\text{B}) = 0,5$ et $p(\text{A} \cap \text{B}) = 0,2$.
- $p(\text{A}) = 0,8$ et $p(\text{B}) = 0,9$ et $p(\text{A} \cap \text{B}) = -0,1$.

2. Soient A et B deux évènements indépendants tels que p(A) = 0,3 et p(B) = 0,2. Alors :

- $p(\text{A} \cap \text{B}) = 0,5$.
- Les informations précédentes ne suffisent pas à calculer $p(\text{A} \cap \text{B})$.
- $p(\text{A} \cap \text{B}) = 0,06$.

3. Si A et B sont deux évènements incompatibles mais non impossibles, alors A et B sont indépendants.

- Cette affirmation est vraie.
- Cette affirmation est fausse.
- On ne peut pas savoir.

4. On justifiera soigneusement la réponse à cette question.

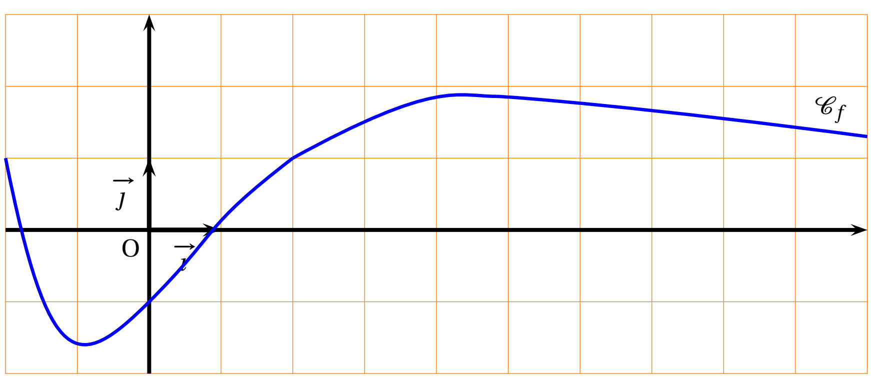
On répète quatre fois de manière indépendante une expérience aléatoire dont la probabilité de succès est 0,35. Alors la probabilité d'obtenir au moins un succès est :

- environ 0,015.
- environ 0,821.
- environ 0,985.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2\ ;\ 10]$. La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal.
On précise que le point d'abscisse 4,83 de $\mathscr{C}_f$ a pour ordonnée 1,86 et que cette valeur est le maximum de la fonction f.
On note $\mathscr{C}_F$ la courbe représentative de la primitive F de f qui s'annule en 1. On précise que le point A(5 ; 5,43) appartient à $\mathscr{C}_F$.
On note $\mathscr{C}_{f'}$ la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f.
Toutes les estimations graphiques seront données à 0,25 près. Les résultats des calculs numériques seront arrondis à 10^{-2}.



1. **a.** Déterminer graphiquement sur quel(s) intervalle(s) $\mathscr{C}_{f'}$ est située en dessous de l'axe des abscisses.

b. Déterminer, en justifiant, l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_F$ en A.

c. Préciser, en justifiant, le sens de variation de F sur l'intervalle $[-2\ ;\ 10]$.

2. **a.** Déterminer $\displaystyle\int_1^5 f(t)\,\mathrm{d}t$.

b. Rappeler la formule de la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a ; b]$ et donner une interprétation de cette notion dans le cas où f est positive.

c. Donner la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1 ; 5]$.

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 2 (spécialité)