∾ Baccalauréat S 2001 ∾

L'intégrale de septembre 2000 à juin 2001

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Antilles-Guyane septembre 2000 3

France septembre 2000 6

Polynésie septembre 2000 10

Nouvelle-Calédonie décembre 2000 14

Amérique du Sud décembre 2000 17

Nouvelle-Calédonie mars 2001 20

Pondichéry mars 2001 23

Amérique du Nord juin 2001 27

Antilles-Guyane juin 2001 30,

Asie juin 2001 34

Centres étrangers juin 2001 38

France juin 2001 42

Liban juin 2001 45

Polynésie juin 2001 49

Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2000

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Pour tout nombre complexe z, on considère

$$f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261.$$

   a. Soit b un nombre réel. Exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaire de $f(\text{i}b)$. En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution.

   b. Montrer qu'il existe deux nombres réels α et β, que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z,

$$f(z) = \left(z^2 + 9\right)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right).$$

   c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $f(z) = 0$.

2. Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal.

   a. Placer dans le plan $\mathscr{P}$ les points A, B, C et D ayant respectivement pour affixes : $a = 3\text{i}$, $b = -3\text{i}$, $c = 5 + 2\text{i}$ et $d = 5 - 2\text{i}$.

   b. Déterminer l'affixe de l'isobarycentre G des points A, B, C, D.

   c. Déterminer l'ensemble E des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

$$\|\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}} + \overrightarrow{M\text{D}}\| = 10.$$

   Tracer E sur la figure précédente.

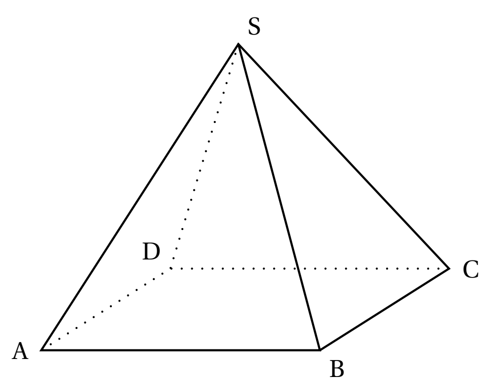
EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

1. Une fourmi se déplace sur les arêtes de la pyramide ABCDS. Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard (on suppose qu'il y a équiprobabilité) vers un sommet voisin ; on dit qu'elle « fait un pas ».

a. La fourmi se trouve en A.
Après avoir fait deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit :

- en A ?
- en B ?
- en C ?
- en D ?



b. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :
S_n l'évènement « la fourmi est au sommet S après n pas », et p_n la probabilité de cet évènement.
Donner p_1.
En remarquant que $\text{S}_{n+1} = \text{S}_{n+1} \cap \overline{\text{S}_n}$, montrer que

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}\left(1 - p_n\right).$$

2. On considère la suite (p_n), définie pour tout nombre entier n strictement positif par : $\begin{cases} p_1 = \dfrac{1}{3} \\ p_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(1 - p_n\right) \end{cases}$.

a. Montrer par récurrence que, pout tout entier naturel n strictement positif, on a $p_n = \dfrac{1}{4}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$.

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$.

PROBLÈME **12 points**

Enseignement obligatoire et de spécialité

L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résoudre une équation différentielle dont elle est solution.

A. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+2\mathrm{e}^x} - \ln\left(1+2\mathrm{e}^x\right).$$

1. Calculer $g'(x)$ et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de g en - ∞ et + ∞.
3. Dresser le tableau de variation de g.
4. Donner le signe de $g(x)$.

B. Étude d'une fonction et calcul d'une aire

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\ln\left(1+2\mathrm{e}^x\right).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x, $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-2x}g(x)$.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. On pourra remarquer que :

   si on pose $X = 1+2\mathrm{e}^x$, $f(x)$ s'écrit $4\dfrac{X}{(X-1)^2}\dfrac{\ln X}{X}$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Tracer $\mathscr{C}$.
5. Soit α un réel strictement positif.

   a. Vérifier que, pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+2\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x} - 2\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+2}$.

   En déduire la valeur de l'intégrale $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+2\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

   b. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :

   $$J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Donner une interprétation graphique de $J(\alpha)$.

C. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \ : \ y' + 2y = 2\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+2\mathrm{e}^x}.$$

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie **B)** est solution de (E).

2. Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}') \;:\; y' + 2y = 0.$$

3. Résoudre (E′) et en déduire les solutions de (E).

Baccalauréat S Métropole septembre 2000

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Les résultats seront donnés à 10^{-3} *près.*

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.
Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4. Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

1. On note :
- A_1 l'évènement « la personne est absente lors du premier appel » ;
- R_1 l'évènement « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel ».

Quelle est la probabilité de R_1 ?

2. Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente, et, alors, la probabilité pour qu'elle soit absente est 0,3. Et, sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité pour qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore 0,2.

Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

On note :

A_2 l'évènement « la personne est absente lors du second appel » ;

R_2 l'évènement « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel » ;

R l'évènement « la personne accepte de répondre au questionnaire ».

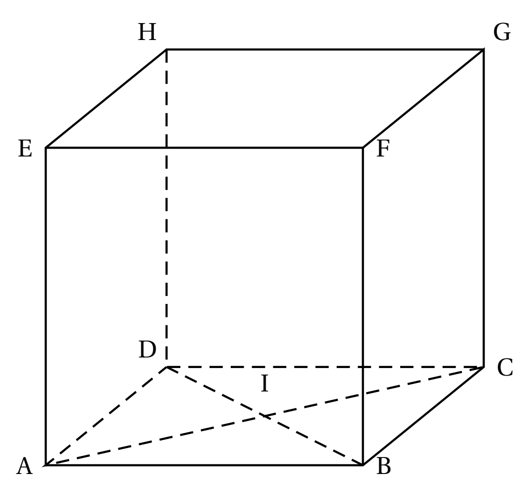
Montrer que la probabilité de R est 0,176. (On pourra utiliser un arbre).

3. Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, quelle est la probabilité pour que la réponse ait eu lieu lors du premier appel ?

4. On suppose que les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Un enquêteur a une liste de 20 personnes à contacter. Quelle est la probabilité pour qu'une au moins des 20 personnes de la liste accepte de répondre au questionnaire ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire (hors-programme en 2002)

Les questions **1)** et **2)** sont indépendantes.
L'espace est muni d'un repère orthonormal direct.
ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre. Son arête a pour longueur 1, le centre de la face ABCD est le point I.
Aucune figure n'est demandée sur la copie.



1. **a.** Déterminer $\overrightarrow{\mathrm{BC}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BA}}$.

   b. En déduire l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M de l'espace tels que :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BA}}\right) \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}M} = \overrightarrow{0}.$$

   c. Déterminer l'ensemble $(\mathscr{F})$ des points M de l'espace tels que :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BA}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{B}M} = 0.$$

2. On appelle P le barycentre du système { (A, 2) ; (C, - 1)}.

   a. Montrer que P est le symétrique de C par rapport à A.

   b. Soit $(\mathscr{G})$ l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{M\mathrm{A}} - \overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\| = \left\|-\overrightarrow{M\mathrm{A}} + 2\overrightarrow{M\mathrm{B}} - \overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\|.$$

   Déterminer l'ensemble $(\mathscr{G})$.
   Montrer que le point A appartient à l'ensemble $(\mathscr{G})$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. L'unité graphique est 4 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = 1, \quad b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}, \quad c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \quad d = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

1. **a.** Donner la forme exponentielle de c et la forme algébrique de d.

   b. Représenter les points A, B, C et D.

   c. Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.

2. Montrer que les points D, A et C sont alignés.
3. Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe s de centre O qui transforme A en C.
4. On note F et G les images par la similitude directe s des points D et C respectivement. Montrer que les points F, C et G sont alignés.
5. Déterminer l'affixe f du point F.
6. On considère la transformation φ qui à tout point M, d'affixe Z, associe le point M' d'affixe Z' telle que :

$$Z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\overline{Z} + \frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

   Pour toute droite δ du plan, on notera σ_δ la symétrie orthogonale d'axe δ.

   a. Soit r la transformation qui à tout point M_1 d'affixe Z_1, associe le point M_1' d'affixe Z_1', telle que :

$$Z_1' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}Z_1 + \frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Déterminer la nature de r et donner ses éléments caractéristiques.

   b. En utilisant les nombres complexes, donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$, puis déterminer la droite Δ telle que :

$$r = \sigma_\Delta \circ \sigma_{(\mathrm{AO})}.$$

c. Montrer que $\varphi = r \circ \sigma_{(\text{AO})}$. En déduire la nature de φ.

PROBLÈME **11 points**

Enseignement obligatoire et de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2+\cos x)\text{e}^{1-x}$.
On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) > 0$.
2. **a.** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.

   b. En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $2 + \cos x + \sin x > 0$.

   c. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\text{e}^{1-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\text{e}^{1-x}$.

   b. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   c. Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.
4. **a.** Montrer que, sur l'intervalle $[0\,;\pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α.

   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5. Représenter la courbe $(\mathscr{C})$ sur $[0\,;4]$.

Partie B

On veut calculer l'aire, $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

1. Montrer que : $\mathscr{A} = 2\text{e} - 2 + \displaystyle\int_0^1 \cos t\,\text{e}^{1-t}\,\text{d}t$.
2. On pose $\text{I} = \displaystyle\int_0^1 \cos t\,\text{e}^{1-t}\,\text{d}t$ et $\text{J} = \displaystyle\int_0^1 \sin t\,\text{e}^{1-t}\,\text{d}t$.

   a. À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que : $\text{I} = -\cos 1 + \text{e} - \text{J}$ et $\text{J} = -\sin 1 + 1$.

   b. En déduire la valeur de I.
3. Déterminer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ en unités d'aire, puis donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$ à 10^{-2} près par défaut.

Partie C

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -1 - \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$.

1. **a.** Montrer que la fonction h admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

   b. Calculer la primitive H de la fonction h, qui prend en 0 la valeur $(1 + \ln 3)$.
2. **a.** Déterminer $\ln\left(f(x)\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

   b. Étudier le sens de variation de la fonction H.

   c. Déterminer le tableau de variations de H.
3. On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto 1 - x + \ln(2 + \cos x)$. (On ne demande pas de représenter Γ).
   On appelle Δ la droite d'équation $y = -x + 1$.

   a. Étudier la position relative de Γ et de Δ.

   b. Déterminer les abscisses des points communs à Γ et Δ.

4. **a.** Établir une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.

   b. Étudier la position relative de Γ et T.

5. Montrer que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on donnera des équations.

∽ Baccalauréat S Polynésie septembre 2000 ∾

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k (k est un entier et $1 \leqslant k \leqslant 6$).
Ce dé a été pipé de telle sorte que :
• les six faces ne sont pas équiprobables,
• les nombres $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6$, dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r,
• les nombres $p_1,\ p_2,\ p_4$ dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. Démontrer que : $p_k = \dfrac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant 6$.
2. On lance ce dé une fois et on considère les évènements suivants :
   – A : « le nombre obtenu est pair »
   – B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 »
   – C : « le nombre obtenu est 3 ou 4 ».

   a. Calculer la probabilité de chacun de ces évènements.

   b. Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.

   c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Les évènements A et C sont-ils indépendants ?
3. On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :
   • d'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires,
   • d'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.

   Le joueur lance le dé :
   • s'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1,
   • s'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2.

   On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche, on note G cet évènement.

   a. Déterminer la probabilité de l'évènement G ∩ A, puis la probabilité de l'évènement G.

   b. Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.

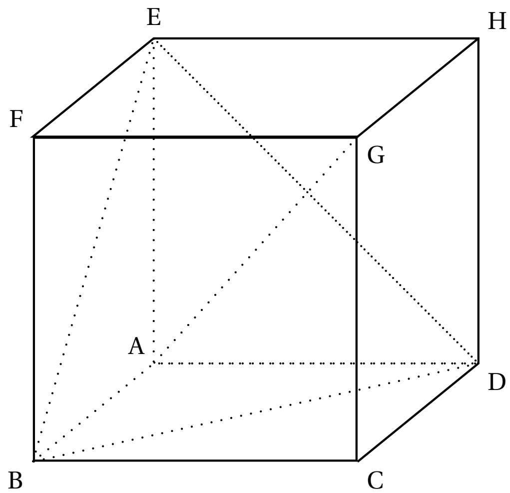
1. **a.** Exprimer plus simplement le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

   b. En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$ est nul.

   c. Démontrer de même que le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE}$ est nul.

   d. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).
2. Soit I le centre de gravité du triangle BDE. Déduire de **1 a** que le point I est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE), et préciser la position du point I sur le segment [AG].

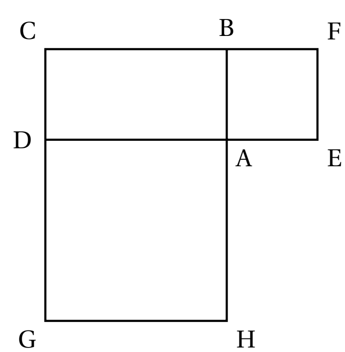
3. Dans cette question, l'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(\text{A}\,;\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}})$.
   a. Écrire une équation du plan (BDE).
   b. Écrire une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point H et orthogonale au plan (BDE).
   c. Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite Δ avec le plan (BDE).
   d. En déduire la distance du point H au plan (BDE).



EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un rectangle de sens direct, AEFB et ADGH sont des carrés de sens direct.

1. Le but de cette première question est de démontrer que les droites (AC), (EG) et (FH) sont concourantes. Pour cela on note I le point d'intersection des droites (EG) et (FH) et on introduit :
   • l'homothétie h_1 de centre I qui transforme G en E.
   • l'homothétie h_2 de centre I qui transforme F en H.



   a. Déterminer l'image de la droite (CG) par l'homothétie h_1 puis par la composée $h_2 \circ h_1$.
   b. Déterminer l'image de la droite (CG) par la composée $h_1 \circ h_2$.
   c. Justifier l'égalité :

$$h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2.$$

   En déduire que la droite (AC) passe aussi par le point I.

2. On se propose ici de démontrer que la médiane issue du sommet A du triangle AEH est une hauteur du triangle ABD. On note O le milieu du segment [EH].
   a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\text{AO}}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\text{AE}}$ et $\overrightarrow{\text{AH}}$.
   b. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\text{BD}}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}$.
   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AO}} \cdot \overrightarrow{\text{BD}}$ et conclure.

3. Dans cette question, on étudie la similitude directe S qui transforme A en B et D en A.
   On pose AB = 1 et AD = k $\quad (k > 0)$.
   a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude S.
   b. Déterminer l'image de la droite (BD), puis l'image de la droite (AO), par cette similitude S.
   c. En déduire que le point d'intersection Ω des droites (BD) et (AO) est le centre de la similitude S.

PROBLÈME **10 points**

Enseignement obligatoire et de spécialité

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}.$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

A. Étude de la fonction f

et construction de la courbe $(\mathcal{C})$

1. Étudier la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$ (on pourra écrire $xe^{x-1} = \dfrac{1}{e}xe^{x}$).
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et préciser la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite Δ.
3. a. Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f.
   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f' en précisant la limite de la fonction f' en $-\infty$.
   c. Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de f' pour tout réel x.
   d. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. Soit I l'intervalle $[1{,}9\,;\,2]$. Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique, α.
5. Tracer la droite Δ et la courbe $(\mathcal{C})$ (unité graphique : 2 cm).

B. Recherche d'une approximation de α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par :

$$g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right).$$

1. Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur I et démontrer que, pour tout x appartenant à I, $g(x)$ appartient à I.
3. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle I, $|g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{9}$.
4. Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n).$$

   On déduit de la question **B 2** que tous les termes de cette suite appartiennent à l'intervalle I. On ne demande pas de le démontrer.

a. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{9}|u_n - \alpha|$.

b. En déduire, en raisonnant par récurrence, que :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}.$$

c. En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

C. Calcul d'aire

1. En intégrant par parties, calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\alpha} x\mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}x$.

2. **a.** Déterminer, en unités d'aire, l'aire $\mathscr{A}$ de la portion de plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = \alpha$.

b. Démontrer qu'on peut écrire $\mathscr{A} = (\alpha - 1)\left(\alpha - \dfrac{1}{\alpha}\right)$.

ൟ Baccalauréat série S Nouvelle – Calédonie ൟ décembre 2000

Exercice 1 **5 points**

Dans l'espace muni du repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :
A(4, 0, 0), B(2, 4, 0), C(0, 6, 0), S(0, 0, 4), E(6, 0, 0) et F(0, 8, 0)

1. Réaliser une figure comportant les points définis dans l'exercice que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que E est le point d'intersection des droites (BC) et (OA).
3. On admettra que F est le point d'intersection des droites (AB) et (OC).

   a. Déterminer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{\text{SE}} \wedge \overrightarrow{\text{EF}}$. En déduire l'équation cartésienne du plan (SEF).

   b. Calculer les coordonnées du point A′ barycentre des points pondérés (A, 1) et (S, 3).

   c. On considère le plan P parallèle au plan (SEF) et passant par A′. Vérifier qu'une équation cartésienne de P est $4x+3y+6z-22=0$.

4. Le plan P coupe les arêtes [SO], [SA], [SB] et [SC] de la pyramide SOABC respectivement aux points O′, A′, B′ et C′.

   a. Déterminer les coordonnées de O′.

   b. Vérifier que C′ apour coordonnées $\left(0,\ 2,\ \dfrac{8}{3}\right)$.

   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (SB), en déduire les coordonnées du point B′.

5. Vérifier que O′A′B′C′ est un parallélogramme.

Exercice 2 **5 points**

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2-2z+2=0.$$

   Préciser le module et un argument de chacune des solutions.

   b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$(-\text{i}z+3\text{i}+3)^2-2(-\text{i}z+3\text{i}+3)+2=0.$$

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives
$z_{\text{A}}=1+\text{i},\ z_{\text{B}}=\overline{z_{\text{A}}},\ z_{\text{C}}=2z_{\text{B}}$.

   a. Déterminer les formes algébriques de z_{B} et z_{C}.

   b. Placer les points A, B et C.

   c. Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle $(\mathscr{C})$ de centre I d'affixe 3 et de rayon $\sqrt{5}$.

   d. Calculer $\dfrac{z_{\text{C}}-3}{z_{\text{A}}-3}$; en déduire la nature du triangle IAC.

   e. Le point E est l'image du point O par la translation de vecteur $2\overrightarrow{\text{IC}}$. Déterminer l'affixe du point E.

f. Le point D est l'image du point E par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Déterminer l'affixe du point D.

g. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 2 **spécialité**

Dans tout l'exercice x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$.
S est l'ensemble des couples (x, y) tels que PGCD$(x\ ;\ y) = y - x$.

1. **a.** Calculer le PGCD(363 ; 484).
   b. Le couple (363 ; 484) appartient-il à S ?
2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple $(n\ ;\ n+1)$ appartient-il à S ?
   Justifier votre réponse.
3. **a.** Montrer que $(x\ ;\ y)$ appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel k non nul tel que $x = k(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$.
   b. En déduire que pour tout couple $(x\ ;\ y)$ de S on a :
   PPCM $(x\ ;\ y) = k(k+1)(y-x)$.
4. **a.** Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.
   b. En déduire l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ de S tels que
   PPCM $(x\ ;\ y) = 228$.

Problème **10 points**

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A

On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

et on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1. **a.** Déterminer la limite de u en $-\infty$.
   b. Montrer que, pour tout x réel, on a $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.
   En déduire la limite de u en $+\infty$.
2. **a.** Montrer que $[u(x)+2x]$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.
   b. Montrer que pour tout x réel, on a $u(x) > 0$. En déduire le signe de $[u(x)+2x]$.
   c. Interpréter graphiquement ces résultats.
3. **a.** Montrer que la dérivée de la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u'(x) = \frac{-u(x)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

   b. Étudier les variations de la fonction u.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et son asymptote oblique.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^x \frac{-1}{\sqrt{t^2+1}}\,\text{d}t.$$

et (Γ) sa courbe représentative.

1. Justifier que pour tout x réel on a $f(x) = \ln u(x)$ en utilisant la question **A 3 a**.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$, puis en $+\infty$ et étudier les variations de f.
3. **a.** Déterminer une équation de la droite (T) tangente à la courbe (Γ) au point d'abscisse 0.

   b. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x)+x$. Montrer que φ est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi(0) = 0$. En déduire la position de ta courbe (Γ) par rapport à la tangente (T).
4. Tracer sur le même graphique la courbe (Γ) et la tangente (T).

Partie C

1. On pose $\alpha = \dfrac{1-\text{e}^2}{2\text{e}}$, montrer que $u(\alpha) = \text{e}$ et en déduire $f(\alpha)$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_\alpha^0 \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\,\text{d}x$.
3. Soit V une primitive de u et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \dfrac{\text{e}^t-\text{e}^{-t}}{2}$.

   a. Montrer que $u\left(\dfrac{\text{e}^t-\text{e}^{-t}}{2}\right) = \text{e}^{-t}$.

   b. Justifier que $V\circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est définie par
   $$\left(V\circ g\right)'(t) = \frac{1+\text{e}^{-2t}}{2}.$$

   c. En déduire que $V(0)-V(\alpha) = (V\circ g)(0)-(V\circ g)(-1) = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1+\text{e}^{-2t}}{2}\,\text{d}t$, puis que $\displaystyle\int_\alpha^0 u(x)\,\text{d}x = \frac{\text{e}^2+1}{4}$.
4. On admet que pour tout x réel, $f(x) < u(x)$.
   Déduire des questions précédentes l'aire, en unité d'aires, du domaine limité par les courbes ($\mathscr{C}$), (Γ) et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 0$.

∽ Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2000 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2, indiscernables au toucher.

On tire une boule du sac, on note son numéro x et on la remet dans le sac, puis on tire une seconde boule, on note son numéro y et on la remet dans le sac.

Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

À chaque tirage de **deux boules**, on associe dans le plan, muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, le point M de coordonnées $(x\,;\,y)$.

On désigne par D le disque de centre O et de rayon 1,7.

Les résultats seront donnés sous forme de **fraction irréductible**.

1. Placer dans le plan muni du repère $(\text{O}\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les points correspondant aux différents résultats possibles.
2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

   A « Le point M est sur l'axe des abscisses » ;

   B « Le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 ».
3. **a.** Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe la somme $x^2 + y^2$. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Calculer son espérance mathématique $\text{E}(X)$.

   b. Montrer que la probabilité de l'évènement « le point M appartient au disque D » est égale à $\dfrac{4}{9}$.
4. On tire 5 fois de suite, de façon indépendante, deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi 5 points du plan.

   Quelle est la probabilité de l'évènement suivant :

   C : « Au moins un de ces points appartient au disque D » ?
5. On renouvelle n fois de suite, de façon indépendante, le tirage de deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi n points du plan.

   Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins un de ces points appartient à D » soit supérieure ou égale à 0,999 9.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats qui n'ont pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$(unité graphique : 2 cm).

1. **a.** Donner l'écriture algébrique du nombre complexe de module 2 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\text{i}z - 2 = 4\text{i} - z$. On donnera la solution sous forme algébrique.
2. On désigne par I, A et B les points d'affixes respectives 1, 2i et 3 + i.

   a. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

   b. Calculer l'affixe z_C du point C image de A par la symétrie de centre I.

   c. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{z_{\text{C}} - z_{\text{B}}}{z_{\text{A}} - z_{\text{B}}}$.

   En déduire le module et un argument de ce nombre. (z_{A} et z_{B} désignent les affixes des points A et B).

d. Soit D le point d'affixe z_D tel que $z_D - z_C = z_A - z_B$.
Montrer que ABCD est un carré.

3. Pour tout point M du plan, on considère le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MI}$.

b. Montrer que le point K défini par $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = 2\overrightarrow{AB}$ est le milieu du segment [AD].

c. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que

$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|2\overrightarrow{AB}\right\|.$$

Construire Γ.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm). On désigne par m un nombre réel. On considère la transformation T_m du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = (m + \text{i})z + m - 1 - \text{i}$$

Partie A

1. Peut-on choisir m de telle sorte que T_m soit une translation ?

2. Déterminer le réel m de telle sorte que T_m soit une rotation. Préciser alors le centre et l'angle de cette rotation.

Partie B

Dans la suite de l'exercice on pose $m = 1$.

1. **a.** Calculer l'affixe du point Ω invariant par T_m.

b. Pour tout nombre complexe z différent de 1, calculer $\dfrac{z'-1}{z-1}$.

En interprétant géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z'-1}{z-1}$, démontrer que T_1 est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

c. Démontrer que, pour tout nombre z on a : $z' - z = \text{i}(z-1)$. En déduire que si M est distinct de Ω, alors le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle en M.

2. On définit dans le plan une suite (M_n) de points en posant :

$$M_0 = \text{O},\ M_1 = \text{T}_1(M_0),\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul : } M_n = \text{T}_1(M_{n-1}).$$

a. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan muni du repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = \Omega M_n$. Démontrer que la suite (d_n) est une suite géométrique. Converge-t-elle ?

PROBLÈME **11 points**

Partie A étude préliminaire : mise en place d'une inégalité.

1. Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   On désigne par Δ la droite d'équation $y = x+1$ et par Γ la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^x$.
   a. Que représente la droite Δ pour la courbe Γ ?
   b. Tracer dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la droite Δ et donner l'allure de Γ.
2. **a.** Démontrer que pour tout réel t, $\mathrm{e}^t \geqslant t+1$. Interpréter graphiquement ce résultat.
   b. En déduire que pour tout réel t, $\mathrm{e}^{-t} + t + 1 \geqslant 2$, et que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ on a : $\dfrac{1}{x} + \ln x + 1 \geqslant 2$.

Partie B étude d'une fonction.

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = (x+1)\ln x.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

1. **a.** étudier le sens de variations de g en utilisant la **partie A**.
   b. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$.
2. **a.** Déterminer une équation de la tangente D à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
   b. On appelle h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $h(x) = g(x) - 2x + 2$.
   étudier le sens de variations de h. On pourra utiliser la question **A 2 b**.
   En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.
   c. étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.
3. Tracer $\mathscr{C}$ et D dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \displaystyle\int_n^{n+1} g(x)\,\mathrm{d}x$.
   a. Donner une interprétation géométrique de U_n.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul on a :
   $$g(n) \leqslant U_n \leqslant g(n+1).$$
   c. En déduire le sens de variation de la suite (U_n).
   d. La suite (U_n) est-elle convergente ?

Partie C étude d'une primitive.

G désigne la primitive de g sur $]0\,;\,+\infty[$ qui s'annule en 1.
On a donc : pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $G(x) = \displaystyle\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Quel est le signe de $G(x)$ suivant les valeurs de x ?
2. Calculer $G(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Déterminer les limites de G en 0 et en $+\infty$.
   Pour l'étude en $+\infty$, on pourra mettre x en facteur dans l'expression $G(x)$.
   Pour l'étude en 0, on admettra que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$.

Baccalauréat série S Nouvelle-Calédonie mars 2001

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 9}\right).$$

et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique relative à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les images de 0 et de 4 par f, puis l'antécédent de 0 par f.
   a. Calculer la limite de f en $+\infty$.

   b. Montrer que, pour tout x réel, $\sqrt{x^2+9} + x = \dfrac{9}{\sqrt{x^2+9} - x}$ et en déduire la limite de f en $-\infty$.
2. Montrer que, pour tout réel, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. On considère la fonction g définie, pour tout x réel, par

   $$g(x) = \frac{1}{2}\text{e}^{x} - \frac{9}{2}\text{e}^{-x}$$

   et $(\mathscr{C}')$ sa représentation graphique dans le même repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

   a. Démontrer que, pour tout x réel, $(g \circ f)(x) = x$.
   On admettra de même que, pour tout x réel, $(f \circ g)(x) = x$.

   b. En déduire que le point $M(x\,;\,y)$ appartient à $(\mathscr{C})$ si, et seulement si, le point $M'(y\,;\,x)$ appartient à $(\mathscr{C}')$.

   c. Démontrer que la fonction g est négative sur $[0\,;\,\ln 3]$.
4. Soit D_1 et D_2 les domaines définis par :

   $$D_1 = \left\{M(x\,;\,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant \ln 3 \\ g(x) \leqslant y \leqslant 0 \end{array}\right\} \quad ; \quad D_2 = \left\{M(x\,;\,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} -4 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{array}\right\}.$$

   Les domaines D_1 et D_2 ont la même aire, calculer cette valeur commune en unités d'aire.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A (1 ; 2 ; 2), B (3 ; 2 ; 1) et C (1 ; 3 ; 3).

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan. Donner une équation de ce plan.
2. On considère les plans (P_1) et (P_2) d'équations respectives :
   $(\text{P}_1) : x - 2y + 2z - 1 = 0$; $(\text{P}_2) : x - 3y + 2z + 2 = 0$.

   a. Montrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants. On notera (Δ) leur droite d'intersection.

   b. Montrer que le point C appartient à la droite (Δ).

   c. Démontrer que le vecteur $\vec{u}\,(2\,;\,0\,;\,-1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

d. En déduire une représentation paramétrique de la droite (Δ).

3. Pour déterminer la distance du point A à la droite (Δ) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2k+1 \\ y = 3 \qquad (k \in \mathbb{R}), \\ z = -k+3 \end{cases}$$

on considère le point M de paramètre k de la droite (Δ).

a. Déterminer la valeur de k pour que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{A}M}$ et $\overrightarrow{u}$ soient orthogonaux.

b. En déduire la distance du point A à la droite (Δ).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans tout l'exercice, x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$.
S est l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ tels que P.G.C.D. $(x\,;\,y) = y - x$.

1. a. Calculer le P.G.C.D. (363 ; 484).

b. Le couple (363 ; 484) appartient-il à S ?

2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple $(n\,;\,n+1)$ appartient-il à S ? Justifier votre réponse.

3. a. Montrer que $(x\,;\,y)$ appartient à S si, et seulement si, il existe un entier naturel k non nul tel que $x = k(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$.

b. En déduire que, pour tout couple $(x\,;\,y)$ de S, on a :
P.P. C.M. $(x\,;\,y) = k(k+1)(y-x)$.

4. a. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b. En déduire l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ de S tels que P.P.C.M. $(x\,;\,y) = 228$.

PROBLÈME **10 points**

Il est possible que certains des résultats, à démontrer dans ce problème, ne soient pas lisibles sur l'écran de votre calculatrice graphique.

Partie A

⋆ **Étude d'une fonction**

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{10(x-8)}{x(x-1)}$$

et on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative relative à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Déterminer les limites de f quand x tend vers 1 par valeurs inférieures et quand x tend vers 1 par valeurs supérieures.

c. En déduire les asymptotes à la courbe $(\mathscr{C})$.

2. a. Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

b. Montrer que $f'(x)$ s'annule pour $\alpha = 8 + 2\sqrt{14}$ et pour $\beta = 8 - 2\sqrt{14}$.

c. Dresser le tableau de variation de f

3. Soit I le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

a. Déterminer une équation de la droite (Δ) tangente en I à la courbe $(\mathscr{C})$.

b. Montrer que le point L, intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec son asymptote horizontale, appartient à la droite (Δ).

c. Représenter la partie de la courbe $(\mathscr{C})$ pour les valeurs de x strictement supérieures à 1 (unités graphiques : 1 cm en abscisse et 3 cm en ordonnée).

4. **a.** Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x élément de l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$, on ait $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$.

b. Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 8.

Calculer, en unités d'aire, en fonction de λ, l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 8$ et $x = \lambda$.

c. Calculer la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Partie B

⋆ **Probabilités**

Une urne contient n boules $(n > 8)$ dont 3 jaunes et 5 vertes.
Les autres boules sont rouges.
I. Étude d'un cas particulier : $n = 16$. Il y a donc 8 boules rouges.

1. On tire une boule de l'urne, on note sa couleur, on la remet, puis on effectue un nouveau tirage d'une boule.

Déterminer la probabilité des évènements suivants :

– A : « On obtient deux boules rouges »,
– B : « On obtient une boule rouge puis une boule verte ou une boule verte puis une boule rouge »,
– C : « On obtient une boule rouge puis une boule jaune ou une boule jaune puis une boule rouge »,
– D : « On obtient au moins une boule rouge ».

2. On effectue maintenant un *tirage simultané de deux boules* de l'urne.

Déterminer la probabilité des évènements :

– A′ « On obtient deux boules rouges »,
– B′ « On obtient une boule rouge et une boule verte ».

II. n quelconque $(n > 8)$ Il y a donc $(n - 8)$ boules rouges.

1. Comme dans le cas particulier précédent, on tire une boule de l'urne, on note sa couleur, on la remet, puis on effectue un nouveau tirage d'une boule. Déterminer en fonction de n la probabilité de l'évènement :

« Obtenir une boule rouge puis une boule verte, ou une boule verte puis une boule rouge ».

2. On revient au **tirage simultané de deux boules :**

a. Déterminer en fonction de n la probabilité de l'évènement :

« Obtenir deux boules rouges ».

b. Calculer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'évènement :

« Obtenir une boule rouge et une boule verte ».

c. En utilisant les variations de la fonction f étudiée dans la partie **A**, indiquer les valeurs de n qui rendent p_n maximum, puis indiquer la valeur de ce maximum.

∽ Baccalauréat S Pondichéry mai 2001 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

1. On pose, pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

b. Prouver que, pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

c. Montrer, en utilisant une intégration par parties que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$$

2. On considère la suite réelle (a_n), définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_n = \frac{1}{\mathrm{e}} + (-1)^n I_n.$$

b. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère l'application f qui à tout nombre complexe z différent de 1, associe le nombre complexe

$$f(z) = \frac{2-\mathrm{i}z}{1-z}.$$

L'exercice étudie quelques propriétés de f.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, dans lequel seront représentés les ensembles trouvés aux questions **1** et **2**.

A est le point d'affixe 1 et B celui d'affixe $-2\mathrm{i}$.

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.

Écrire $f(z)$ sous forme algébrique. En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un réel et représenter cet ensemble.

2. On pose $z' = f(z)$.

a. Vérifier que i n'a pas d'antécédent par f et exprimer, pour z' différent de i, z en fonction de z'.

b. M est le point d'affixe z (z différent de 1) et M' celui d'affixe z' (z' différent de i).

Montrer que $\mathrm{O}M = \dfrac{M'\mathrm{C}}{M'\mathrm{D}}$ où C et D sont les points d'affixes respectives 2 et i.

c. Montrer que, lorsque le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A, son image M' appartient à une droite fixe que l'on définira géométriquement.

d. Montrer que, si M est un point de l'axe des réels, différent de O et de A, alors M' appartient à la droite (CD).

EXERCICE 2 (SPÉCIALITÉ) **4 points**

1. On considère l'équation (1) d'inconnue $(n,\ m)$ élément de $\mathbb{Z}^2$:

$$11n - 24m = 1.$$

a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).

c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2. recherche du P.G.C.D. de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

a. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

b. $(n,\ m)$ désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire

$$\left(10^{11n} - 1\right) - 10\left(10^{24m} - 1\right) = 9.$$

c. Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$.
(on rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a-1)\left(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^0\right)$, valable pour tout entier naturel n non nul).
Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

$$\left(10^{11} - 1\right)N - \left(10^{24} - 1\right)M = 9.$$

d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.

e. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

PROBLÈME **12 points**

Dans tout le problème, $(\mathscr{C})$ désigne la courbe d'équation $y = \ln x$ représentant la fonction logarithme népérien dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O et d'unité graphique 4 cm.
Question préliminaire : Tracer avec soin mais sans étude de la fonction, la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D) d'équation $y = x$.

Partie A

1. **a.** Déterminer une équation de la tangente (Δ) à $(\mathscr{C})$ au point I d'abscisse 1.

b. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x - 1 - \ln x.$$

c. En déduire la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à Δ.

2. **a.** Déduire de la question précédente la valeur minimale prise par $x - \ln x$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   b. M et N sont les points de même abscisse x des courbes $(\mathscr{C})$ et (D) respectivement.

   Déterminer la plus petite valeur (exprimée en cm) prise par la distance MN lorsque x décrit l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

1. Soit M le point d'abscisse x de la courbe $(\mathscr{C})$. Exprimer la distance OM de l'origine à M en fonction de x.
2. *Étude de la fonction auxiliaire u définie sur* $]0\ ;\ +\infty[$ *par* $u(x) = x^2 + \ln x$.

   a. Justifier les limites de $u(x)$ en 0 et en $+\infty$ ainsi que le sens de variations de u.

   b. Montrer qu'il existe un réel α et un seul tel que $u(\alpha) = 0$.

   Montrer que α est compris entre 0,5 et 1 puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

   c. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant la valeur de x.

3. *Étude de la fonction g définie sur* $]0\ ;\ +\infty[$ *par* $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$.

   Calculer $g'(x)$ et vérifier que $g'(x) = \dfrac{2}{x}u(x)$.

   En déduire le tableau de variations de g.
4. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de la plus courtedistance de l'origine aux points de la courbe $(\mathscr{C})$ et en donner une valeur approchée (exprimée en cm) en utilisant pour α la valeur centrale de l'encadrement trouvé à la question **2 b**.
5. A étant le point d'abscisse α de $(\mathscr{C})$, démontrer que la tangente en A est perpendiculaire à la droite (OA).

Partie C Étude d'une suite

1. Montrer que le réel α défini dans **la partie B** est solution de l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$h(x) = x - \frac{1}{4}\left(x^2 + \ln x\right).$$

2. **a.** Calculer $h'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.

   b. Prouver que $h\left(\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.

   c. Calculer $h''(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.

   d. En déduire que, pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$, on a

$$0 \leqslant h'(x) \leqslant 0,3.$$

3. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = h(u_n).$$

   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$, et que la suite (u_n) est décroissante.

   b. *Attention, cette question n'est plus au nouveau programme du baccalauréat S.*

   En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que l'on a pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,3|u_n - \alpha|$ puis que $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}(0,3)^n$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

d. Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-5} près et indiquer la valeur de u_{n_0} donnée par la calculatrice (avec 5 décimales).

Baccalauréat S Amérique du Nord juin 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace E est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les trois points A $(2 ; 0 ; 0)$, B $(1 ; 1 ; 0)$ et C $(3 ; 2 ; 6)$. (D) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\,(0 ; 1 ; 1)$ et (Δ) la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{v}\,(1 ; -2 ; 2)$.

1. Écrire une représentation paramétrique de chacune des droites (D) et (Δ) puis montrer que (D) et (Δ) sont sécantes en un point dont on précisera les coordonnées.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (question hors programme en 2002), puis écrire une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Soit H le projeté orthogonal du point F$(2 ; 4 ; 4)$ sur le plan (ABC).
   - **a.** Expliquer pourquoi il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{\mathrm{FH}} = k\vec{w}$.
   - **b.** Déterminer la valeur de k et en déduire les coordonnées de H.
   - **c.** Calculer le volume du tétraèdre FABC.

Exercice 2 **4 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

1. Calculer $P\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$ et $P\left(-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$ puis montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait $P(z) = \left(z^2 + 3\right)Q(z)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{B}} = -\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{C}} = 3 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_{\mathrm{D}} = \overline{z_{\mathrm{C}}}$, puis montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.
4. On note E le symétrique de D par rapport à O. Montrer que $\dfrac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{B}}} = \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}}$ puis déterminer la nature du triangle BEC.

EXERCICE 2 **4 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.
2. On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.
   - **a.** Vérifier, en utilisant par exemple la question **1)**, que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution $(x_0 ; y_0)$ de (E).
   - **b.** Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.
   - **c.** *Application* : Déterminer les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.

     Indication : On remarquera que le point M de coordonnées $(x ; y)$ appartient à la droite (D) si, et seulement si, le couple $(x ; -y)$ vérifie l'équation (E).

PROBLÈME **12 points**

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie **A** la fonction numérique f définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x^2},$$

de déterminer ensuite dans la partie **B.** la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie **C.**, cette dernière partie étant, dans une large mesure, indépendante des deux autres.

Partie A

1. Soit g la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^3-x-2\ln x+1.$$

a. Montrer que la fonction g est dérivable et que, pour tout $x\in]0\,;\,+\infty[$,

$$g'(x)=\frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}.$$

b. Étudier les variations de la fonction g puis déterminer le signe de $g(x)$.

2. **a.** Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Montrer que, pour tout $x\in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$ puis donner le tableau de variation de f.

Partie B

(Γ) désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, unité graphique 2 cm.

1. Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x)=x+\ln x$.

a. Étudier le sens de variation de h, puis montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0{,}4\,;\,0{,}7]$.

b. Montrer que l'on a : $\mathrm{e}^{-\alpha}=\alpha$.

2. **a.** Vérifier que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote oblique à (Γ) en $+\infty$.

b. Utiliser les résultats de la question **1 a** pour déterminer les positions relatives de (Γ) et (Δ).

3. Construire (Γ) et (Δ) dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

4. **a.** Calculer, au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale I

$$\mathrm{I}=\int_1^2\frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b. En déduire l'aire, en cm^2, de la portion de plan limitée par la courbe (Γ), la droite (Δ) et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équations $x=1$ et $x=2$.

Partie C

Étude d'une suite (hors-programme en 2002)
Dans cette partie :

* I désigne l'intervalle $[0{,}4\,;\,0{,}7]$;
* α est le réel mis en évidence au **B 1** ;

* φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \text{e}^{-\,x}$;
* u est la suite récurrente définie par $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0,4 \\ u_{n+1} & = & \varphi(u_n) \end{array}\right.$

1. Montrer qu'on a, pour tout $x \in I$.

 a. $\varphi(x) \in \text{I}$.

 b. $|\varphi'(x)| \leqslant 0,7$.

 c. $|\varphi(x) - \alpha| \leqslant 0,7|x - \alpha|$.

2. **a.** Montrer qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,7|u_n - \alpha|$, puis en déduire par récurrence qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leqslant 0,3 \times (0,7)^n.$$

 b. Conclure alors quant à la convergence de la suite u.

3. Déterminer un entier p tel que, pour $n \geqslant p$, on ait $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$, puis donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de u_p à 10^{-3} près.

Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Un joueur achète 10 euros un billet permettant de participer à un jeu constitué d'un grattage suivi d'une loterie.
Il gratte une case sur le billet. Il peut alors gagner 100 euros avec une probabilité de $\frac{1}{50}$ ou bien ne rien gagner.
G désigne l'évènement : « Le joueur gagne au grattage ».
Il participe ensuite à une loterie avec le même billet. À cette loterie, il peut gagner 100 euros, ou 200 euros, ou bien ne rien gagner.
L_i désigne l'évènement « Le joueur gagne 100 euros à la loterie ».
L_2 désigne l'évènement « Le joueur gagne 200 euros à la loterie ».
P désigne l'évènement : « Le joueur ne gagne rien à la loterie ».
Si le joueur n'a rien gagné au grattage, la probabilité qu'il gagne 100 euros à la loterie est $\frac{1}{70}$, et la probabilité qu'il gagne 200 euros à la loterie est $\frac{1}{490}$.

1. **a.** Faire un arbre sur lequel on indiquera les renseignements qui précèdent.
   b. Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il n'a rien gagné au grattage. Compléter l'arbre obtenu avec cette valeur.
   c. Au bout de chaque branche, indiquer le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.
2. On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.
   La probabilité de l'évènement « $X = 90$ » est $\frac{2}{125}$.
   La probabilité de l'évènement « $X = 190$ » est $\frac{1}{250}$.
   a. Montrer que la probabilité que le joueur gagne 100 euros à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 euros au grattage, est égale à $\frac{1}{10}$.
   b. Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 euros au grattage.
   c. Déterminer la loi de probabilité de X.
   Calculer l'espérance de X.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on désigne par $M(z)$ le point M ayant pour affixe z.

1. Placer sur une figure les points A$(2 + i)$, B$(2i)$, C$(-4+3i)$ et D(-8), en prenant 1 cm pour unité graphique.
2. Soit f la transformation du plan qui, à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que :
$$z' = (1+2i)z - 4 - 2i.$$
   a. Préciser les images des points A et B par f.
   b. Montrer que f admet un unique point fixe Ω, dont on précisera l'affixe ω (M est un point fixe pour f si, et seulement si, $f(M) = M$).

3. On admet que $\omega = 1 - 2\text{i}$. Soit M un point quelconque et M' son image par f.

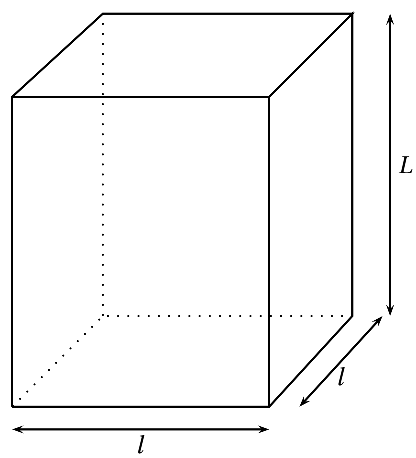
a. Montrer que, pour tout complexe z on a : $z' - z = 2\text{i}(w - z)$.
Dans toute la suite, M est différent de Ω.

b. Déduire de la question précédente le rapport des distances $\dfrac{MM'}{\Omega M}$, et l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}\right)$.

c. Déduire des questions précédentes une construction géométrique du point M', connaissant le point M.
Réaliser cette construction sur la figure de la question **1)**

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



1. Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L, à base carrée de côté l, où l et L sont des entiers naturels non nuls tels que $l < L$. On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).

a. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus grande valeur possible pour a ?
Quelles sont les valeurs possibles pour a ?

b. Dans cette question, le volume de la boîte B est $v = 77\,760$. On sait que, pour remplir la boîte B, la plus grande valeur possible de a est 12. Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions.

2. On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête c est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question **1** (Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide).

a. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus petite arête c pour la caisse C ?
Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête c ?

b. Dans cette question, le volume de la boîte B est 15 435. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105.
Quelles sont les dimensions l et L de la boîte B ?

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

⋆ **Résolution de l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$**

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = (ax + b)\mathrm{e}^x.$$

   a. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).

   b. Montrer que v est une solution de l'équation (2) si, et seulement si, $u + v$ est solution de (1).

   c. En déduire l'ensemble des solutions de (1).

3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B

⋆ **Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\mathrm{e}^x - x - 2$.

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variations.
3. On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

   a. Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.

   b. L'autre solution est appelée α. Montrer que $-1,6 \leqslant \alpha \leqslant -1,5$.

4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie C

⋆ **Étude de la fonction principale**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^x$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
   (On pourra mettre e^{2x} en facteur.)
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
   Étudier le sens de variation de f
3. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ où α est défini dans la partie **B**.
   En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
   (On rappelle que $-1,6 \leqslant \alpha \leqslant -1,5$.)
4. Établir le tableau de variations de f
5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

Partie D

⋆ **Calcul d'aire**

1. Soit m un réel négatif. Interpréter graphiquement l'intégrale $\displaystyle\int_m^0 f(x)\,\mathrm{d}x$. (On justifiera la réponse.)

2. a. Calculer $\displaystyle\int_m^0 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, à l'aide d'une intégration par parties.

   b. En déduire $\displaystyle\int_m^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Calculer la limite de $\displaystyle\int_m^0 f(x)\,\mathrm{d}x$, lorsque m tend vers $-\infty$.

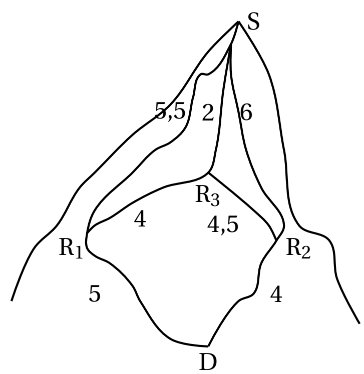
Baccalauréat S Asie juin 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour rejoindre le sommet S d'une montagne des Alpes à partir d'un point de départ D, les randonneurs ont la possibilité d'emprunter plusieurs parcours. La course n'étant pas faisable en une journée, ils doivent passer une nuit dans l'un des deux refuges se trouvant à la même altitude de 1 400 mètres sur les parcours existants ; les deux refuges ne sont pas situés au même endroit. On les appelle R_1 et R_2.
Le lendemain matin, pour atteindre le sommet qui se trouve à 2 500 mètres d'altitude, ils ont deux possibilités : ils peuvent atteindre le sommet en faisant une halte au refuge R_3, ou atteindre le sommet directement.

La probabilité que les randonneurs choisissent de passer par R_1 est égale à $\frac{1}{3}$.
La probabilité de monter directement au sommet en partant de R_1 est égale à $\frac{3}{4}$.
La probabilité de monter directement au sommet en partant de R_2 est égale à $\frac{2}{3}$.



1. Tracer un arbre pondéré représentant tous les trajets possibles du départ D jusqu'au sommet S.
2. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

   E_1 : « Les randonneurs ont fait une halte au refuge R_3 sachant qu'ils ont passé la nuit au refuge R_1 » ;

   E_2 « Les randonneurs ont fait une halte au refuge R_3 » ;

   E_3 « Les randonneurs ont passé la nuit au refuge R_1 sachant qu'ils ont fait une halte au refuge R_3 » ;

   E_4 « Les randonneurs ont passé la nuit au refuge R_2 sachant que, le deuxième jour, ils sont montés directement au sommet S ».
3. On note $d(M,\ N)$ la distance, en km, à parcourir pour se rendre du point M au point N.

   On donne $d(\text{D}, \text{R}_1) = 5$; $d(\text{D}, \text{R}_2) = 4$; $d(\text{R}_1,\ \text{R}_3) = 4$; $d(\text{R}_2, \text{R}_3) = 4{,}5$;
   $d(\text{R}_3, \text{S}) = 2$; $d(\text{R}_1, \text{S}) = 5{,}5$; $d(\text{R}_2, \text{S}) = 6$.

   Soit X la variable aléatoire qui représente la distance parcourue par les randonneurs pour aller du départ D au sommet S.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z $(z \neq -1)$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-\text{i}z - 2}{z+1}.$$

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = -1$, $b = 2\text{i}$ et $c = -\text{i}$.

1. Soit C′ l'image du point C par f. Donner l'affixe c' du point C′ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
2. Calculer l'affixe d du point D ayant pour image par f le point D′ d'affixe $d' = \frac{1}{2}$.
3. Pour tout nombre complexe z différent de - 1, on note p le module de $z+1$ (c'est-à-dire $|z+1| = p$) et p' le module de $z' + \text{i}$ (c'est-à-dire $|z' + \text{i}| = p'$).
   a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de - 1, on a : $pp' = \sqrt{5}$.
   b. Si le point M appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon 2, montrer qu'alors $M' = f(M)$ appartient à un cercle (Γ'), dont on précisera le centre et le rayon.
4. Pour tout nombre complexe z différent de - 1, on considère le nombre complexe $\omega = \frac{z - 2\text{i}}{z+1}$.
   a. Interpréter géométriquement l'argument du nombre complexe ω.
   b. Montrer que $z' = -\text{i}\omega$.
   c. Déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe z telle que z' soit un réel non nul.
   d. Vérifier que le point D appartient aux ensembles (Γ) et (F).
5. Représenter les ensembles (Γ), (F) et (Γ') en prenant 4 cm pour unité graphique.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On se place dans le plan, rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :
$$z' = \left(\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}.$$
   a. Exprimer $(f \circ f)(z)$ en fonction de z.
   b. Montrer que $f = \text{R} \circ \text{S}$, où R est une rotation et S une symétrie axiale (on déterminera les éléments caractéristiques de ces deux applications R et S).
   c. Décomposer R à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que f est une réflexion, dont on donnera l'axe (D_1).
   Réaliser une figure, en y représentant l'axe (D_1) (unité graphique 2 cm).
2. On considère l'application g qui, à tout point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' telle que :
$$z'' = \left(\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} - \frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

a. Déterminer une équation de l'ensemble des points invariants de g.

b. Montrer que $g = \mathrm{T} \circ f$ où T est une translation (on précisera l'affixe du vecteur de la translation T).

c. Décomposer la translation T à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que g est une réflexion, d'axe noté (D_2).

d. Quelle est l'image par g du point A d'affixe $\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
En déduire une construction de la droite (D_2), qui n'utilise pas son équation, et l'illustrer en complétant la figure précédente.

PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

⋆ I. Étude de la fonction f et tracé de $(\mathscr{C})$

1. **a.** Calculer la limite de cette fonction lorsque x tend vers $+\infty$.

   b. Calculer la limite de cette fonction lorsque x tend vers -1.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$?

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que son signe est celui de $\dfrac{x-1}{x+1}$.

3. Dresser le tableau de variation de f.

4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, les droites d'équations respectives $x = -1$ et $y = 1$, ainsi que la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0 (unité graphique : 4 cm).

5. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[1\,;10]$.
   Utiliser le graphique précédent pour donner deux nombres entiers consécutifs a et b tels que α appartient à l'intervalle $[a\,;\,b]$.

⋆ II. Calcul d'une aire

1. Soit g la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$.

   a. Étudier le sens de variation de g dans l'intervalle $[1\,;\,2]$.

   b. Montrer que, pour tout x appartenant à $[1\,;2]$, on a : $1 \leqslant g(x) \leqslant 2,5$.

   c. En déduire un encadrement de $\mathrm{A}_1 = \displaystyle\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Soit A_2 l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$, la courbe $(\mathscr{C})$ et l'axe des abscisses.
   À l'aide d'une intégration par parties, exprimer A_2 en fonction de A_1, et en déduire un encadrement de A_2.

⋆ III. Approximation d'un nombre à l'aide d'une suite

Pour cette partie, on utilisera sans justification le fait que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution β et que celle-ci est élément de l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$.

Soit h la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+x)^3}$.

1. **a.** Vérifier que, pour tout x appartenant à $]-1\ ;\ +\infty[$ on a :

$$f'(x) = f(x) - 2h(x).$$

b. Calculer $h'(x)$.

c. En utilisant la question **a**, calculer $f''(x)$.

En déduire le sens de variation de f dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$

En déduire que, pour tout x appartenant à $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ on a :

$$\left|f'(x)\right| \leqslant \frac{1}{4}.$$

2. On définit la suite (U_n), pour tout nombre entier naturel n, par $\mathrm{U}_0 = 1$ et $\mathrm{U}_{n+1} = f(\mathrm{U}_n)$ pour $n \geqslant 0$.

On admet que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $\frac{1}{2} \leqslant \mathrm{U}_n \leqslant 1$.

(Question hors-programme en 2002).

a. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a :

$$\left|\mathrm{U}_{n+1} - \beta\right| \leqslant \frac{1}{4}\left|\mathrm{U}_n - \beta\right|.$$

b. Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a :

$$\left|\mathrm{U}_n - \beta\right| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

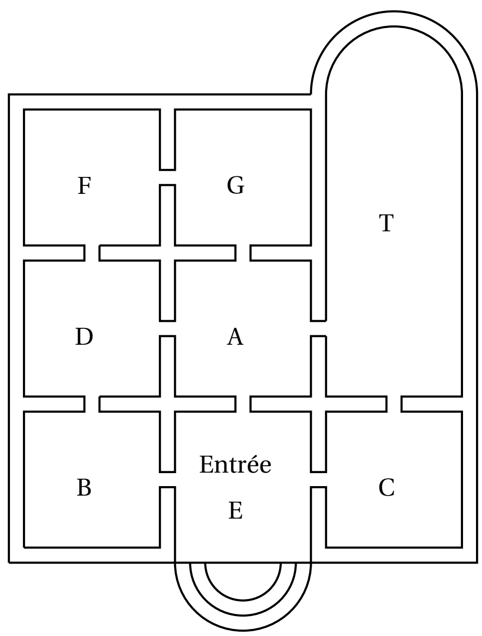
c. En déduire une valeur approchée numérique de β à 10^{-3} près.

∽ Baccalauréat S Centres étrangers juin 2001 ∾

EXERCICE 1 **5 points**
Enseignement obligatoire et de spécialité

Le directeur d'un musée, dont le plan est fourni ci-dessous, organise une exposition. Afin de prévoir la fréquentation des salles, il décide d'imaginer le parcours d'un visiteur, pris au hasard, en faisant les hypothèses suivantes :

- Le visiteur passe *au hasard* d'une salle à une salle voisine.
- Pour sortir d'une salle, il franchit de manière équiprobable n'importe quelle autre porte que celle qu'il a utilisée pour entrer.
  Dans le parcours du visiteur, le directeur ne s'intéresse qu'aux quatre premières salles traversées, l'entrée E étant comprise dans celles-ci. Un trajet par ces quatre premières salles est codé par un mot de quatre lettres, commençant par la lettre E. Par exemple :
- Si le visiteur passe successivement par les salles E, B, D, F, on codera son trajet par le mot EBDF.
- Le trajet codé EBDB est impossible avec les hypothèses choisies.



1. On considère un visiteur, pris au hasard, devant effectuer un trajet selon les hypothèses précédentes.
   a. Construire l'arbre pondéré des différents trajets possibles pour ce visiteur.
   b. Montrer que la probabilité du parcours codé EBDF est $\dfrac{1}{6}$.
   c. Déterminer la probabilité p_1 de l'évènement : « La quatrième salle du trajet est F ».
   d. Pour des raisons techniques, le directeur installe les ?uvres les plus intéressantes dans la salle T. Déterminer la probabilité p_2 de l'évènement « Le trajet passe par la salle T ».
2. Le directeur imagine dix visiteurs pris au hasard, effectuant chacun un trajet, de manière indépendante et selon les hypothèses précédentes. On appelle X la variable aléatoire qui, aux dix visiteurs, associe le nombre de leurs trajets passant par la salle T.

a. Calculer la probabilité de l'évènement $(X = 1)$.

b. Calculer la probabilité que deux visiteurs au moins passent par la salle T. (Donner le résultat arrondi au millième.)

c. Le directeur décide d'obliger les visiteurs à se diriger, après l'entrée, vers la salle A, les hypothèses précédentes demeurant pour la suite des trajets. Il pense ainsi augmenter la probabilité que deux visiteurs au moins, sur les dix, passent par la salle T.
Prouver qu'il a tort.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 4 cm), dans lequel on considère les points A (2 ; 0), B(0 ; 2) et C(−2 ; −2).

1. Soient a, b et c les nombres définis pour t réel par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & -\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{2}{3}\cos t + \frac{2}{3} \\ b & = & \sin 2t - \frac{1}{3}\cos t + \frac{2}{3} \\ c & = & -\frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos t + \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

a. Démontrer que, pour tout réel t, il existe un barycentre, noté $G(t)$, du système de points pondérés {(A, a) ; (B, b) ; (C, c)}.

b. Montrer que, pour tout réel t, les coordonnées du point $G(t)$ sont :

$$x(t) = \cos t \text{ et } y(t) = \frac{3}{2}\sin 2t.$$

Lorsque le paramètre t varie, ce barycentre décrit une courbe (Γ), que l'on se propose d'étudier.

2. Étude des symétries de la courbe (Γ)

a. Étudier les positions relatives des points $G(t)$ et $G(t + 2\pi)$.

b. Étudier les positions relatives des points $G(t)$ et $G(-t)$.

c. Étudier les positions relatives des points $G(t)$ et $G(\pi - t)$.

d. Déduire de ce qui précède, en justifiant la démarche, un intervalle d'étude approprié pour les fonctions x et y.

3. **a.** Étudier le sens de variation de chacune des fonctions x et y sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et les faire apparaître dans un même tableau.

b. Placer les points de (Γ) correspondant aux valeurs du paramètre 0, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$ et tracer les tangentes à la courbe (Γ) en ces points.

c. Tracer la partie de (Γ) obtenue lorsque t appartient à l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ puis tracer (Γ) complètement. (Hors-programme en 2002)

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard (J_0 + 6), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.
Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1. Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple $(u~;~v)$ est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$.

2. **a.** Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0~;~y_0)$ solution particulière de l'équation (E_2) :

$$35x - 27y = 1.$$

   b. En déduire une solution particulière $(u_0~;~v_0)$ de (E_1).

   c. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1).

   d. Déterminer la solution $(u~;~v)$ permettant de déterminer J_1.

3. **a.** Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

   b. Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (L'année 2000 était bissextile.)

   c. Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devrat-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

PROBLÈME **10 points**
Commun à tous les candidats

Les objectifs du problème sont de déterminer une solution particulière d'une équation différentielle (partie A), d'étudier cette solution (partie B) et de la retrouver dans un contexte différent (partie C).

Partie A

On appelle (E) l'équation différentielle : $y'' - y = 0$, où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Déterminer les réels r tels que la fonction h, définie par $h(x) = \mathrm{e}^{rx}$, soit solution de (E).
2. Vérifier que les fonctions φ définies par $\varphi(x) = \alpha\mathrm{e}^{x} + \beta\mathrm{e}^{-x}$, où α et β sont deux nombres réels, sont des solutions de (E). On admet qu'on obtient ainsi toutes les solutions de (E).
3. Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $\left(\ln 2~;~\dfrac{3}{4}\right)$ et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur est $\dfrac{5}{4}$.

Partie B

On appelle f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Soit μ un réel. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \mu$ équivaut à $\mathrm{e}^{2x} - 2\mu\mathrm{e}^{x} - 1 = 0$.
   En déduire que l'équation $f(x) = \mu$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$ et déterminer sa valeur en fonction de μ.
2. **a.** Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

   b. En étudiant le sens de variation de la fonction d définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = f(x) - x$, préciser la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (T).

   c. Tracer $(\mathscr{C})$ et (T) (unité graphique : 2 cm).

4. Soit D la partie représentant sur le graphique l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & x & \leqslant & 1 \\ x & \leqslant & y & \leqslant & f(x) \end{array}\right.$$

   Calculer, en cm^2 l'aire de D.

Partie C

On cherche à caractériser les fonctions φ, dérivables sur l'ensemble des nombres réels, telles que, pour tout réel x :

$$\varphi(x) - \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = x \quad \text{(H)}.$$

1. On suppose qu'il existe une telle fonction φ.

   a. Montrer que, pour tout nombre réel x,

$$\varphi(x) = x + x\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Calculer $\varphi(0)$.

   b. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $\varphi'(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

   Calculer $\varphi'(0)$.

   c. Vérifier que φ est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie **A**. Déterminer laquelle, parmi toutes les solutions explicitées dans la question **A 2**.

2. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^x t\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t$.

   b. Démontrer que la fonction trouvée à la question **1 c** vérifie bien la relation (H).

Baccalauréat S Métropole juin 2001

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soient trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit k un réel de l'intervalle $[-1 ; 1]$.

On note G_k le barycentre du système $\left\{(\mathrm{A},\ k^2+1),\ (\mathrm{B},\ k),\ (\mathrm{C},\ -k)\right\}$.

1. Représenter les points A, B, C, le milieu I de [BC] et construire les points G_1 et G_{-1}.
2. **a.** Montrer que, pour tout réel k de l'intervalle $[-1 ; 1]$, on a l'égalité :

$$\overrightarrow{\mathrm{A}G_k} = -\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{\mathrm{BC}}.$$

   b. Établir le tableau de variation de la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par

$$f(x) = -\frac{x}{x^2+1}.$$

   c. En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle $[-1 ; 1]$.

   Pour la suite de l'exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.
3. Déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} - \overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\| = \left\|2\overrightarrow{M\mathrm{A}} - \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\|.$$

4. Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} - \overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\| = \left\|2\overrightarrow{M\mathrm{A}} - \overrightarrow{M\mathrm{B}} - \overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\|.$$

5. L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(0 ; 0 ; 2)$, $(-1 ; 2 ; 1)$ et $(-1 ; 2 ; 5)$. Le point G_k et les ensembles (E) et (F) sont définis comme ci-dessus.

   a. Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}.

   Montrer que les ensembles (E) et (F) sont sécants.

   b. Calculer le rayon du cercle $\mathscr{C}$ intersection de (E) et (F).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ [unité graphique : 6 cm].

On considère la suite (α_n) de nombres réels définie par $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \dfrac{5\pi}{6}$. Pour tout entier naturel n, on appelle M_n le point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 tel que l'angle $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{O}M_n}\right)$ ait pour mesure α_n.

1. Placer les douze points $\mathrm{M}_0,\ \mathrm{M}_1,\ \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_{11}$.
2. On appelle z_n l'affixe de M_n. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{12}\right)}$.
3. **a.** Montrer, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :
   - les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés ;
   - les points M_n et M_{n+12} sont confondus.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_{n+4} = \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} z_n$.
En déduire que la distance M_nM_{n+4} vaut $\sqrt{3}$ puis que le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$, est équilatéral.
On admettra que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points M_n sont de la forme $M_nM_{n+4}M_{n+8}$.

4. Douze cartons indiscernables au toucher, marqués M_0, M_1, M_2, $\cdots$, M_{11} sont disposés dans une urne. On tire au hasard et simultanément trois cartons de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir les trois sommets d'un triangle équilatéral.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ [unité graphique : 6 cm].
On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = z\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}$ et on définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :
M_0 a pour affixe $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ et, pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$.
On appelle z_n l'affixe de M_n.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
Placer les points M_0, M_1, M_2.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité

$$z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$$

(on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

3. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p. Montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si, et seulement si, $(n - p)$ est multiple de 12.

4. **a.** On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(4\,;\,9)$ est solution, résoudre l'équation (E).

b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite $[\mathrm{O}x)$.

PROBLÈME **9 points**
Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Toutes les courbes demandées seront représentées sur un même graphique (unité graphique : 2 cm).

Partie A

$\star$ Étude d'une fonction f

On définit la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x} - 1\right).$$

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 3.

Calculer l'ordonnée de A. Soit B le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $\dfrac{5}{4}$, P le projeté orthogonal de B sur l'axe $\left(\text{O} ; \overrightarrow{u}\right)$ et H le projeté orthogonal de B sur l'axe $\left(\text{O} ; \overrightarrow{v}\right)$.

Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points B, P et H. Placer les points A, B, P et H dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ et représenter la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie B

⋆ Utilisation d'une rotation

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. À tout point M du plan d'affixe z la rotation r associe le point M' d'affixe z'.

1. a. Donner z' en fonction de z.

On note $z = x + \text{i}y$ et $z' = x' + \text{i}y'$ $(x,\ y,\ x',\ y'$ réels). Exprimer x' et y' en fonction de x et y, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.

b. Déterminer les coordonnées des points A′, B′ et P′ images respectives des points A, B et P par la rotation r.

2. On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \text{e}^{-2x} + 2\text{e}^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

a. Montrer que lorsqu'un point M appartient à $(\mathscr{C})$, son image M' par r appartient à (Γ).

On admet que lorsque le point M décrit $(\mathscr{C})$, le point M' décrit (Γ).

b. Tracer sur le graphique précédent les points A′, B′, P′ et la courbe (Γ) (l'étude des variations de g n'est pas demandée).

Partie C

⋆ Calcul d'intégrales

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de même aire.

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\ln 2} g(x)\,\text{d}x$.

Interpréter graphiquement cette intégrale.

2. a. Déterminer, en unités d'aire, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan $\mathscr{D}$ limité par les segments [AO], [OH] et [HB] et l'arc de courbe $(\mathscr{C})$ d'extrémités B et A.

b. On pose $\text{I} = \displaystyle\int_{\frac{5}{4}}^{3} \ln\left(\sqrt{1+x} - 1\right)\,\text{d}x$.

Trouver une relation entre $\mathscr{A}$ et I puis en déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

Baccalauréat S Liban juin 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans un village de montagne deux familles A et B disposent de cinq circuits balisés de promenades c_1, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5.

Partie A

Chaque matin, chacune des familles tire au hasard, indépendamment l'une de l'autre, un des cinq circuits.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles pour l'ensemble des deux familles ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'elles fassent le même jour, le même circuit ?
3. Quelle est la probabilité pour que pendant n jours consécutifs, elles ne se trouvent janais sur le même circuit ?
4. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité de se trouver au moins une fois sur le même circuit est supérieure ou égale à 0,9.

Partie B

On considère dans cette partie deux jours consécutifs. Le deuxième jour chaque famille élimine de son tirage le circuit qu'elle a fait la veille. Il reste donc quatre circuits pour ciacune des deux familles.
On note :
E l'évènement « les deux familles font le même circuit le premier jour ».
F l'évènement « les deux familles font le même circuit le deuxième jour ».
Calculer les probabilités suivantes :

$$P(E)\ ,\ P(F/E)\ ,\ P(F/\overline{E})\ \text{puis}\ P(F\cap E)\ \text{et}\ P(F\cap\overline{E}).$$

En déduire P(F).

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 3 + i$ et $z_B = 1 + 2i$.

1. Exprimer le complexe $\dfrac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
2. En déduire une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}\right)$.

Partie B

Désormais on considère l'espace muni du repère orthonormal direct $(O,\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$ où $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.
On considère les points A(3, 1, 0), B(1, 2, 0), C(3, 2, 1) et $D(0,\ 0,\ d)$ où d désigne un réel positif ou nul. On a ainsi un tétraèdre ABCD.

1. On pose $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   a. Calculer les coordonnées de N .
   b. En déduire l'aire du triangle ABC.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3. On note H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
   a. On pose $\overrightarrow{DH} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{N}}$.
      Calculer λ en fonction de d.
   b. En déduire l'expression de la distance DH.
      Montrer que le volume du tétraèdre ABCD est $\mathrm{V}_d = \dfrac{2d+5}{6}$.
4. Déterminer pour quelle valeur de d la droite (DB) est perpendiculaire au plan (ABC).
5. On suppose que $d = 0$. Calculer la distance de A au plan (OBC).

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

On suppose le plan rapporté au repère orthonormal direct $\left(\Omega\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, unité graphique 3 cm.

Partie A

Soit trois droites D_1, D_2 et D_3, sécantes en Ω et de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{d_1} = \overrightarrow{u}$, et $\overrightarrow{d_2}$ et $\overrightarrow{d_3}$ supposés unitaires et tels que $\left(\overrightarrow{d_1},\ \overrightarrow{d_2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\left(\overrightarrow{d_1},\ \overrightarrow{d_3}\right) = -\dfrac{2\pi}{3}$.
On note S_1, S_2 et S_3 les réflexions d'axes respectifs D_1, D_2 et D_3, et f la composée $\mathrm{S}_3 \circ \mathrm{S}_2 \circ S_1$, de ces trois réflexions.

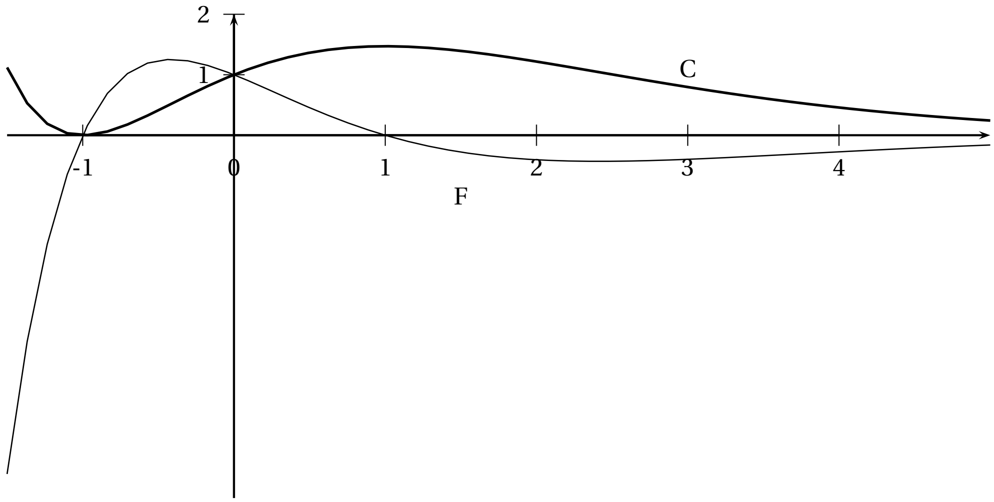
1. Tracer ces trois droites.
2. a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r = \mathrm{S}_2 \circ \mathrm{S}_1$.
   b. Caractériser la réflexion S telle que $r = \mathrm{S}_3 \circ \mathrm{S}$. On notera D l'axe de S et on en déterminera un point et un vecteur directeur $\overrightarrow{d}$. Tracer la droite D.
   c. En déduire la nature de f et ses éléments caractéristiques.
3. Justifier que le point E d'affixe $z_{\mathrm{E}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{12}}$ est un point de la droite D.
   Déterminer les nombres complexes a et b tels que la forme complexe de f soit l'application f_1 définie sur $\mathbb{C}$ par $f_1(z) = a\overline{z} + b$.

Partie B

1. Choisir un point A sur D. On note B l'image de A par S_1 et C l'image de B par S_2 . Placer les points B et C .
2. Démontrer que A est l'image de C par S_3.
3. Que peut-on dire du point Ω pour le triangle ABC ?

PROBLÈME **5 points**

Partie A - Lectures graphiques



On donne dans un repère orthogonal les courbes C et F représentatives de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On sait que l'une de ces fonctions est la fonction dérivée de l'autre, on peut donc les noter g et g'.

1. Associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique. On justifiera le résultat en donnant un tableau où figurera sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}\,;\,5\right]$ le signe de $g'(x)$ et les variations de g.
2. Quel est le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 0 ?

Partie B

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = 2(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = (x^2+2x)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'équation (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.
3. Soit u une solution de (E') . Montrer que la fonction $f_0 + u$ est une solution de (E).
   On admettra que, réciproquement, toute solution f de (E) est de la forme $f = f_0 + u$ où u est une solution de (E').
   En déduire, pour $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $f(x)$ lorsque f est solution de (E).
4. Sachant que la fonction g de la partie A est solution de (E) , déterminer $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
5. Déterminer la solution h de l'équation (E) dont la représentation graphique admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 0.

Partie C

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$: déterminer sa fonction dérivée et étudier son signe. Donner le tableau de variation de f.

3. Dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique 2 cm, on note C$'$ la représentation graphique de f.

a. Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C' au point Ω d'abscisse -1.

b. Tracer avec soin la courbe C$'$ et la tangente T dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

4. **a.** Déterminer trois réels a, b et c tels que la fonction F définie par $F(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\text{e}^{-x}$ soit une primitive de la fonction f.

b. Soit α un réel positif. Calculer en cm^2 l'aire notée $\mathscr{A}(\alpha)$ de la zone du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C$'$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

∽ Baccalauréat S Polynésie juin 2001 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Enseignement obligatoire et de spécialité

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, unité graphique 2 cm, on considère les points A et B, d'affixes respectives $z_{\text{A}} = -1$ et $z_{\text{B}} = 3\text{i}$.

Soit la fonction f de P privée du point A dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \text{i}\left(\dfrac{z-3\text{i}}{z+1}\right)$ (1).

1. Soit C le point d'affixe $z_{\text{C}} = 2 - \text{i}$. Montrer qu'il existe un seul point D tel que $f(\text{D}) = \text{C}$.
2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. À l'aide de l'égalité (1), montrer que, pour tout M distinct de A et de B :
   $\text{O}M' = \text{B}M$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{O}M'}) = \dfrac{\pi}{2} + (\overrightarrow{M\text{A}}, \overrightarrow{M\text{B}})$ (modulo 2π).
4. En déduire et construire les ensembles de points suivants :
   a. L'ensemble E des points M tels que l'image M' soit située sur le cercle (F) de centre O, de rayon 1.
   b. L'ensemble F des points M tels que l'affixe de M' soit réelle.
5. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   On note C_1 l'image de C par R.
   a. Déterminer l'affixe de C_1.
   b. Montrer que C_1 appartient à l'ensemble F.

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

Une boîte contient 8 cubes : $\left\{\begin{array}{c}\text{1 gros rouge et 3 petits rouges}\\ \text{2 gros verts et 1 petit vert}\\ \text{1 petit jaune}\end{array}\right.$

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte (*on admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur*).

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On note A l'évènement : « obtenir des cubes de couleurs différentes » et B l'évènement : « obtenir au plus un petit cube ».
   a. Calculer la probabilité de A.
   b. Vérifier que la probabilité de B est égale à $\dfrac{2}{7}$.
2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X.
3. L'enfant répète n fois l'épreuve « tirer simultanément trois cubes de la boîte », en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants. On note P_n la probabilité que l'évènement B soit réalisé au moins une fois.
   a. Déterminer P_n en fonction de n.
   b. Déterminer le plus petit entier n tel que $P_n \geqslant 0,99$.

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

1. On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) $\quad 91x + 10y = 1$.
   a. Énoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).
   b. Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$.
   c. Résoudre (E').
2. Montrer que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8. (Une des méthodes possibles est un raisonnement par récurrence).
3. On considère l'équation (E″) $A_3 x + A_2 y = 3\,296$.
   a. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x,\ y)$ solutions de l'équation (E″).
   b. Montrer que (E″) admet pour solution un couple unique d'entiers naturels.
   Le déterminer.

PROBLÈME **11 points**
Enseignement obligatoire et de spécialité

Dans tout le texte e désigne le nombre réel qui vérifie ln e = 1.
On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x + x\mathrm{e}}{x^2}.$$

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = -2\ln x - x\mathrm{e} + 1.$$

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\ \infty$.
2. Étudier le sens de variation de g.
3. Montrer que dans [0,5 ; 1] l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule notée α. Déterminer un encadrement de α à 0,1 près.
4. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B : Étude de la fonction *f*

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Soit f' la fonction dérivée de f. Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ puis étudier le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1 + \alpha\mathrm{e}}{2\alpha^2}$.
4. Donner le tableau de variations de f.
5. Construire Γ.

Partie C : Intégrale et suite

Soit $I_n = \displaystyle\int_{\text{e}^n}^{\text{e}^{n+1}} \frac{\ln t}{t^2}\,\text{d}t$ et $A_n = \displaystyle\int_{\text{e}^n}^{\text{e}^{n+1}} f(t)\,\text{d}t$ pour tout entier naturel n.

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$I_n = \frac{n+1}{\text{e}^n} - \frac{n+2}{\text{e}^{n+1}}.$$

2. **a.** Montrer que $A_n = I_n + \text{e}$.

b. Calculer I_0 et A_0.

c. Donner une interprétation géométrique de A_0.

3. Montrer que la suite (A_n) converge vers e.