

# ❧ Baccalauréat S 2005 ❧

## L'intégrale de septembre 2004 à juin 2005

Pour un accès direct cliquez sur les liens [bleus](#)

<a href="#">Antilles-Guyane septembre 2004</a> .....	3
<a href="#">France septembre 2004</a> .....	7
<a href="#">Polynésie spécialité septembre 2004</a> .....	12
<a href="#">Nouvelle-Calédonie novembre 2004</a> .....	15
<a href="#">Amérique du Sud novembre 2004</a> .....	19
<a href="#">Nouvelle-Calédonie mars 2005</a> .....	23
<a href="#">Pondichéry avril 2005</a> .....	26
<a href="#">Amérique du Nord juin 2005</a> .....	29
<a href="#">Antilles-Guyane juin 2005</a> .....	34
<a href="#">Asie juin 2005</a> .....	37
<a href="#">Centres étrangers juin 2005</a> .....	41
<a href="#">France juin 2005</a> .....	45
<a href="#">La Réunion juin 2005</a> .....	51
<a href="#">Liban juin 2005</a> .....	56
<a href="#">Polynésie juin 2005</a> .....	61



∞ Baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 2004 ∞

EXERCICE 1

5 points

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = xe^{-x+2}.$$

Les deux parties peuvent être abordées indépendamment.

**Partie A**

1. Dresser le tableau des variations de  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$  et déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe représentative.
2. **a.** Tracer sur la calculatrice graphique les courbes de la fonction  $f$  et de la fonction logarithme népérien; on notera  $\mathcal{L}$  cette dernière. Conjecturer avec ce graphique le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = \ln(x) \quad \text{sur } [1 ; +\infty[.$$

- b.** Montrer que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$g(x) = \ln(x) - f(x)$$

est strictement croissante sur  $[1 ; +\infty[$ .

En déduire que l'équation  $f(x) = \ln(x)$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[1 ; +\infty[$ .

- c.** Déterminer à  $10^{-3}$  près une valeur approchée de  $\alpha$ .

**Partie B**

1. À l'aide d'une double intégration par parties, déterminer :

$$I = \int_0^3 x^2 e^{-2x} dx.$$

2. On définit le solide  $\mathcal{S}$  obtenu par révolution autour l'axe  $(Ox)$  de la courbe d'équation  $y = f(x)$  pour  $0 \leq x \leq 3$  dans le plan  $(xOy)$  (repère orthonormal d'unité 4 cm). On rappelle que le volume  $\mathcal{V}$  du solide est donné par :

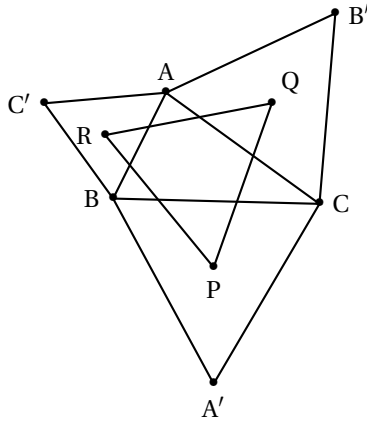
$$\mathcal{V} = \pi \int_0^3 [f(x)]^2 dx.$$

- a.** Exprimer  $\mathcal{V}$  en fonction de  $I$ .
- b.** Déterminer alors une valeur approchée à  $1 \text{ cm}^3$  près du volume du solide.

EXERCICE 2

5 points

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct, on considère  $ABC$  un triangle direct sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux  $BCA'$ ,  $ACB'$  et  $ABC'$ . On considère respectivement les points  $P$ ,  $Q$  et  $R$  centres de gravités respectifs des triangles  $BCA'$ ,  $ACB'$  et  $ABC'$ .



On note  $a, b, c, a', b', c', p, q$  et  $r$  les affixes respectives des points  $A, B, C, A', B', C', P, Q$  et  $R$ .

1. **a.** Traduire, avec les affixes des points concernés, que  $C'$  est l'image de  $A$  dans une rotation d'angle de mesure dont on précisera le centre.  
**b.** Montrer que  $a' + b' + c' = a + b + c$ .
2. En déduire que  $p + q + r = a + b + c$ .
3. En déduire que les triangles  $ABC, A'B'C'$  et  $PQR$  ont même centre de gravité.
4. Montrer que :

$$3(q - p) = (b' - c) + (c - a') + (a - b).$$

On admettra que, de même :  $3(r - p) = (a - c) + (b - a') + (c' - b)$ .

5. Justifier les égalités suivantes :

$$a - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(b' - c); \quad b - a' = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a'); \quad c' - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - b).$$

6. Déduire des **questions 4.** et **5.** que le triangle  $PQR$  est équilatéral.

### EXERCICE 3 (OBLIGATOIRE)

5 points

$(O, \vec{u}, \vec{v})$  est un repère orthonormal du plan  $\mathcal{P}$ .

Soit  $A$  le point d'affixe 1 ; soit  $B$  le point d'affixe  $-1$ .

Soit  $F$  l'application de  $\mathcal{P}$  privé de  $O$  dans  $\mathcal{P}$  qui, à tout point  $M$  distinct de  $O$ , d'affixe  $z$ , associe le point  $M' = F(M)$  d'affixe  $z' = \frac{-1}{\bar{z}}$ .

1. **a.** Soit  $E$  le point d'affixe  $e^{i\frac{\pi}{3}}$ , on appelle  $E'$  son image par  $F$ . Déterminer l'affixe de  $E'$  sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.  
**b.** On note  $\mathcal{C}_1$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 1. Déterminer l'image de  $\mathcal{C}_1$  par l'application  $F$ .
2. **a.** Soit  $K$  le point d'affixe  $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$  et  $K'$  l'image de  $K$  par  $F$ . Calculer l'affixe de  $K'$ .  
**b.** Soit  $\mathcal{C}_2$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 2. Déterminer l'image de  $\mathcal{C}_2$  par l'application  $F$ .
3. On désigne par  $R$  un point d'affixe  $1 + e^{i\theta}$  où  $\theta \in ]-\pi; \pi[$ ;  $R$  appartient au cercle  $\mathcal{C}_3$  de centre  $A$  et de rayon 1.

- a.** Montrer que  $z' + 1 = \frac{\bar{z} - 1}{z}$ .

En déduire que  $|z' + 1| = |z'|$ .

- b.** Si on considère maintenant les points d'affixe  $1 + e^{i\theta}$  où  $\theta$  décrit l'intervalle  $]-\pi; \pi[$ , montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat de **a.**

**EXERCICE 3 (SPÉCIALITÉ)****5 points**

Pour chacune des six affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Le PGCD de 2 004 et 4 002 est 6.
2. Si  $p$  et  $q$  sont deux entiers naturels non nuls,  $2^{pq} - 1$  est divisible par  $2^p - 1$  et par  $2^q - 1$ .
3. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $2^n - 1$  n'est jamais divisible par 9.
4. L'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation :

$$24x + 35y = 9$$

est l'ensemble des couples :

$$(-144 + 70k ; 99 - 24k) \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

5. Soient A et B deux points distincts du plan ; si on note  $f$  l'homothétie de centre A et de rapport 3 et  $g$  l'homothétie de centre B et de rapport  $\frac{1}{3}$  alors  $g \circ f$  est la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .
6. Soit  $s$  la similitude d'écriture complexe  $z' = i\bar{z} + (1 - i)$ , l'ensemble des points invariants de  $s$  est une droite.

**EXERCICE 4****5 points**

Pour chacune des trois questions, la totalité des points sera donnée si la réponse est correctement justifiée.

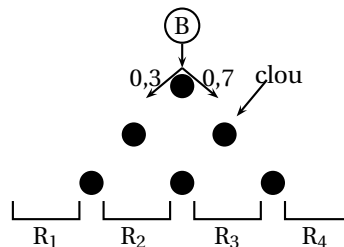
Les trois questions sont indépendantes.

1. La probabilité pour un individu d'une population d'être atteint d'une maladie M est égale à 0,003. Un test de dépistage, pour cette maladie, a été réalisé ; avec ce test, on peut dire que
  - si une personne est atteinte de la maladie M, le test est positif dans 50 % des cas ;
  - le test est positif pour 3 % des personnes saines.

Quelle est à 0,01 près la probabilité d'avoir la maladie M lorsque le test est positif ?

0,95    0,9    0,15    0,05

2. On considère une planche à clous de ce type :



On lance une boule B du haut de la planche, elle tombe alors dans l'un des quatre récipients notés  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  et  $R_4$ . À chaque étape, la bille a une probabilité de 0,3 d'aller vers la gauche et 0,7 d'aller vers la droite (gauche et droite relatives à l'observateur).

On note  $p_1$  la probabilité que la bille tombe dans le bac  $R_1$  ou dans le bac  $R_3$  et  $p_2$  la probabilité que la bille tombe dans le bac  $R_2$  ou dans le bac  $R_4$ .

Que valent  $p_1$  et  $p_2$  ?

- $p_1 = p_2 = 0,5$                         $p_1 = 0,216$  et  $p_2 = 0,784$   
  $p_1 = 0,468$  et  $p_2 = 0,532$       $p_1 = 0,468$  et  $p_2 = 0,432$ .

3. Les 1 000 premières décimales de  $\pi$  sont données ici par un ordinateur :

1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510
5820974944	5923078164	0628620899	8628034825	3421170679
8214808651	3233066470	9384460959	0582235725	3594085234
8111745028	4102701930	5211055596	4462294895	4930301964
4288109756	6593344612	8475648233	7867831652	7120190914
5648566923	4603486534	5432664825	3393607260	2491412737
2450700660	6315580574	8815209209	6282925409	1715364367
8925903600	1133053054	8820466525	3841469519	4151160943
3057270365	7595919530	9218611738	1932611793	1051185480
7446297996	2749567355	8857527240	9122793318	3011949129
8336733624	4065664308	6025394946	3952247371	9070217986
0943702770	5392171762	9317675238	4674818467	6691051320
0056812714	5263560827	7857753427	9778900917	3637178721
4684409012	2495343054	6549585371	0507922796	8925892354
2019956112	1290219608	6403441815	9813629774	7713099605
1870721134	9999998372	9780499510	5973173281	6096318599
0244594553	4690830264	2522300253	3446850352	6193110017
1010003137	8387528865	8753320830	1420617177	6691473035
9825349042	8755460731	1595620633	8235378759	3751957781
8577805321	7122600661	3001927876	6111959092	1642019894

En groupant par valeurs entre 0 et 9 ces décimales, on obtient le tableau suivant :

Valeurs	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Occurrences	93	116	102	102	94	97	94	95	101	106

Avec un tableur, on a simulé 1 000 expériences de 1 000 tirages aléatoires d'un chiffre compris entre 0 et 9.

Pour chaque expérience, on a calculé  $d^2 = \sum_{k=0}^{k=9} (f_k - 0,1)^2$  où  $f_k$  représente, pour l'expérience, la fréquence observée du chiffre  $k$ .

On a alors obtenu une série statistique pour laquelle on a calculé le premier et neuvième décile ( $d_1$  et  $d_9$ ), le premier et troisième quartile ( $Q_1$  et  $Q_3$ ) et la médiane (Me) :

$d_1 = 0,000422$  ;  $Q_1 = 0,000582$  ; Me = 0,000822 ;  $Q_3 = 0,001136$  ;  $d_9 = 0,00145$ .

En effectuant le calcul de  $d_2$  sur la série des 1 000 premières décimales de  $\pi$ , on obtient :

- 0,000456     0,00456     0,000314

Un statisticien découvrant le tableau et ignorant qu'il s'agit des décimales de  $\pi$ , fait l'hypothèse que la série est issue de tirages aléatoires indépendants suivant une loi équirépartie. Il prend un risque de 10 % de rejeter cette hypothèse quand elle est vraie. Accepte-t-il cette hypothèse ?

- Oui     Non     Il ne peut pas conclure.

Durée : 4 heures

## Baccalauréat S Métropole septembre 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

### EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

1. Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par :

$$g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}.$$

- a. Déterminer les nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que l'on ait, pour tout  $x > 1$  :

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$

- b. Trouver une primitive  $G$  de  $g$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

2. Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}.$$

Trouver une primitive  $F$  de  $f$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer :

$$I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \ln x \, dx.$$

On donnera le résultat exact sous la forme  $p \ln 2 + q \ln 3$ , avec  $p$  et  $q$  rationnels.

### EXERCICE 2

6 points

Commun à tous les candidats

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.

Le but de ce problème est d'étudier, pour  $x$  et  $y$  éléments distincts de l'intervalle  $]0; +\infty[$ , les couples solutions de l'équation  $x^y = y^x$  (E) et, en particulier, les couples constitués d'entiers.

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à  $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$ .

2. Soit  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$h(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

La courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $h$  est donnée en annexe ;  $x_0$  est l'abscisse du maximum de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

- a. Rappeler la limite de la fonction  $h$  en  $+\infty$  et déterminer la limite de la fonction  $h$  en 0.

- b.** Calculer  $h'(x)$ , où  $h'$  désigne la fonction dérivée de la fonction  $h$  ; retrouver les variations de la fonction  $h$ .  
Déterminer les valeurs exactes de  $x_0$  et de  $h(x_0)$ .
- c.** Déterminer l'intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  avec l'axe des abscisses.
- 3.** Soit  $\lambda$  un élément de l'intervalle  $\left]0; \frac{1}{e}\right[$ .  
Prouver l'existence d'un unique nombre réel  $a$  de l'intervalle  $]1; e[$  et d'un unique nombre réel  $b$  de l'intervalle  $]e; +\infty[$  tels que  $h(a) = h(b) = \lambda$ .  
Ainsi le couple  $(a, b)$  est solution de (E).
- 4.** On considère la fonction  $s$  qui, à tout nombre réel  $a$  de l'intervalle  $]1; e[$ , associe l'unique nombre réel  $b$  de l'intervalle  $]e; +\infty[$  tel que  $h(a) = h(b)$  (on ne cherchera pas à exprimer  $s(a)$  en fonction de  $a$ ).  
Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes
- a.** Quelle est la limite de  $s$  quand  $a$  tend vers 1 par valeurs supérieures ?
- b.** Quelle est la limite de  $s$  quand  $a$  tend vers  $e$  par valeurs inférieures ?
- c.** Déterminer les variations de la fonction  $s$ . Dresser le tableau de variations de  $s$ .
- 5.** Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats**

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75% de particules A et 25% de particules B.

Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K1 et K2. L'expérience est modélisée de la façon suivante :

- une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K1 avec la probabilité  $\frac{1}{3}$  et dans K2 avec la probabilité  $\frac{2}{3}$  ;
- une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ .

**Partie A**

- 1.** Soit une particule au hasard.  
Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
- A1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 »,  
A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 »,  
B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 »,  
B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 »,  
C1 : « la particule entre dans K1 »,  
C2 : « la particule entre dans K2 ».
- 2.** On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction.  
Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75% et 25% restent constantes.  
Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K2 ».



**Partie B**

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B ; chaque particule A donne en se transformant une particule B.

On note  $p(t)$  la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant  $t = 0$ , on a  $p(0) = 0,75$ .

Plus généralement, si  $t$  est exprimé en années, on a  $p(t) = 0,75e^{-\lambda t}$ , où  $\lambda$  est une constante réelle.

La demi-vie<sup>1</sup> des particules de type A est égale à 5 730 ans.

1. Calculer  $\lambda$  ; on prendra une valeur approchée décimale à  $10^{-5}$  près par défaut.
2. Au bout de combien d'années 10% des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?
3. Déterminer la valeur de  $t$  pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

**EXERCICE 4****5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique 1 cm).

1. Résoudre, dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, l'équation suivante :

$$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes

$$a = 4\sqrt{3} - 4i \quad \text{et} \quad b = 4\sqrt{3} + 4i.$$

- a. Écrire  $a$  et  $b$  sous forme exponentielle.
  - b. Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.
3. On désigne par C le point d'affixe  $c = -\sqrt{3} + i$  et par D son image par la rotation de centre O et d'angle  $-\frac{\pi}{3}$ .  
Déterminer l'affixe  $d$  du point D.
  4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés (O ; -1), (D ; +1), (B ; +1).
    - a. Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe  $g = 4\sqrt{3} + 6i$ .
    - b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.
    - c. Montrer que les points C, D et G sont alignés.
    - d. Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.
  5. Quelle est la nature du triangle AGC ?

**EXERCICE 4****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.

1. temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial.

A et C sont deux points distincts du plan ; on note  $\Gamma$  le cercle de diamètre  $[AC]$  et O le centre de  $\Gamma$  ; B est un point du cercle  $\Gamma$  distinct des points A et C.

Le point D est construit tel que le triangle  $BCD$  soit équilatéral direct ; on a donc  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = +\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ .

Le point G est le centre de gravité du triangle  $BCD$ .

Les droites  $(AB)$  et  $(CG)$  se coupent en un point M.

### Partie A

1. Placer les points D, G et M sur la figure de la feuille annexe.
2. Montrer que les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment  $[BC]$  et que le point G est le milieu du segment  $[CM]$ .
3. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre C transformant B en M.

### Partie B

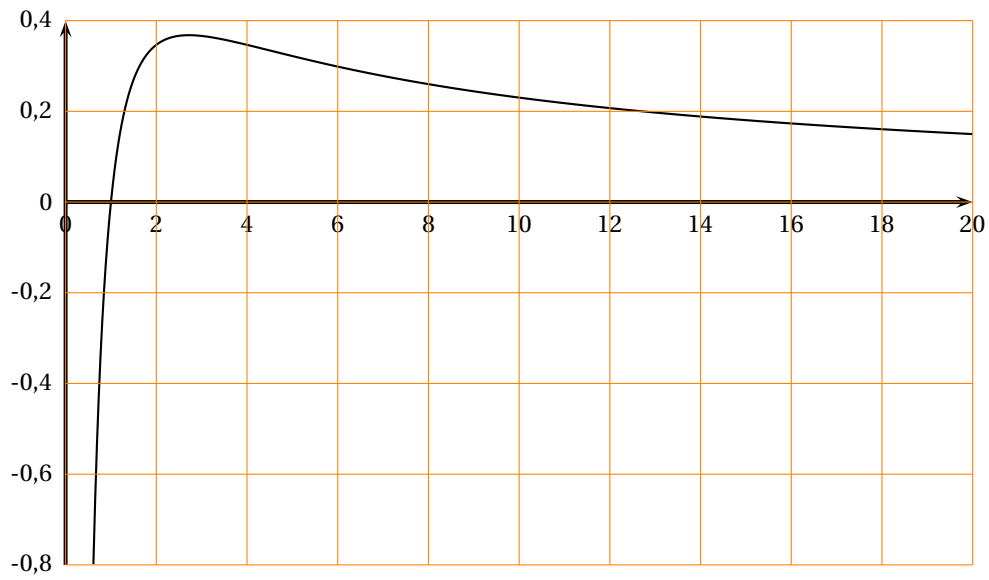
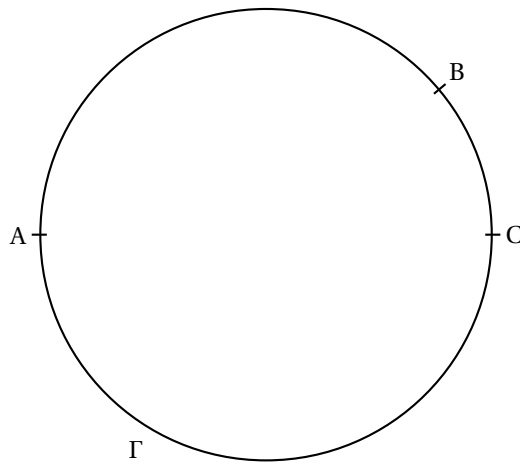
Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives  $-1$  et  $1$ .

Soit E le point construit pour que le triangle ACE soit équilatéral direct ; on a donc  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = +\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ .

1. Calculer l'affixe du point E et construire le point E sur la feuille annexe.
2. Soit  $\sigma$  la similitude directe d'expression complexe  $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{4}$ .  
Déterminer les éléments caractéristiques de  $\sigma$  et en déduire que  $\sigma$  est la similitude réciproque de s.
3. Montrer que l'image  $E'$  du point E par  $\sigma$  a pour affixe  $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et montrer que le point  $E'$  appartient au cercle  $\Gamma$ .
4. On note  $\mathcal{C}$  le lieu des points M lorsque le point B décrit le cercle  $\Gamma$  privé des points A et C.  
Montrer que le point E appartient à  $\mathcal{C}$ .  
Soit  $O'$  l'image du point O par la similitude s. Démontrer que le point  $O'$  est le centre de gravité du triangle ACE.  
En déduire une construction de  $\mathcal{C}$ .

**ANNEXE DE L'EXERCICE 2**

À rendre avec la copie

Courbe  $\mathcal{C}$ , obtenue à l'aide d'un traceur de courbes**Annexe spécialité**

Durée : 4 heures

## Baccalauréat S Polynésie septembre 2004

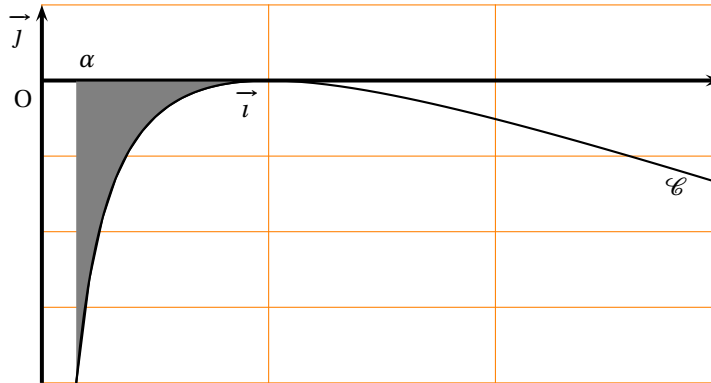
### EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

La courbe  $\mathcal{C}$  donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x.$$



1. a. Montrer que  $f$  est dérivable et que, pour tout  $x$  strictement positif,  $f'(x)$  est du signe de

$$N(x) = -[2(x\sqrt{x} - 1) + \ln x.]$$

- b. Calculer  $N(1)$  et déterminer le signe de  $N(x)$  en distinguant les cas  $0 < x < 1$  et  $x > 1$ .
- c. En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  et les coordonnées du point de  $\mathcal{C}$  d'ordonnée maximale.
2. On note  $\mathcal{A}(\alpha)$  l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où  $\alpha$  désigne un réel de  $]0; 1[$ .
- a. Exprimer  $\mathcal{A}(\alpha)$  en fonction de  $\alpha$  (on pourra utiliser une intégration par parties).
- b. Calculer la limite de  $\mathcal{A}(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers 0. Donner une interprétation graphique de cette limite.
3. On définit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par son premier terme  $u_0$  élément de  $[1; 2]$  et :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1.$$

- a. Démontrer, pour tout réel  $x$  élément de  $[1; 2]$ , la double inégalité  $0 \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1$ .
- b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  appartient à  $[1; 2]$ .
4. En remarquant que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$ , déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
5. a. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. On note  $\ell$  sa limite.

- b. Déterminer la valeur exacte de  $\ell$ .

**EXERCICE 2****5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra 2 cm pour unité graphique.

Pour tout point  $M$  du plan d'affixe  $z$  on considère les points  $M'$  et  $M''$  d'affixes respectives

$$z' = z - 2 \quad \text{et} \quad z'' = z^2.$$

1.
  - a. Déterminer les points  $M$  pour lesquels  $M'' = M$ .
  - b. Déterminer les points  $M$  pour lesquels  $M'' = M'$ .
2. Montrer qu'il existe exactement deux points  $M_1$  et  $M_2$  dont les images  $M'_1, M''_1, M'_2$  et  $M''_2$  appartiennent à l'axe des ordonnées. Montrer que leurs affixes sont conjuguées.
3. On pose  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont des nombres réels.
  - a. Exprimer sous forme algébrique le nombre complexe  $\frac{z'' - z}{z' - z}$ .
  - b. En déduire l'ensemble  $E$  des points  $M$  du plan pour lesquels les points  $M, M'$  et  $M''$  sont alignés. Représenter  $E$  graphiquement et en couleur.
4. On pose  $z = \sqrt{3}e^{i\theta}$  où  $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .
  - a. Déterminer l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  d'affixe  $z$  ainsi définis et chacun des ensembles  $\Gamma'$  et  $\Gamma''$  des points  $M'$  et  $M''$  associés à  $M$ .
  - b. Représenter  $\Gamma, \Gamma'$  et  $\Gamma''$  sur la figure précédente.
  - c. Dans cette question  $\theta = \frac{\pi}{6}$ . Placer le point  $M_3$  obtenu pour cette valeur de  $\theta$ , et les points  $M'_3$  et  $M''_3$  qui lui sont associés. Montrer que le triangle  $M_3M'_3M''_3$  est rectangle. Est-il isocèle ?

**EXERCICE 2****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra, sur la figure 1 cm pour unité graphique.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives  $-1 + i, 3 + 2i$  et  $i\sqrt{2}$ .

1. On considère la transformation  $f$  du plan dans lui-même qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M' = f(M)$  d'affixe  $z'$  définie par :

$$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{z} - 1 + i(1 + \sqrt{2}).$$

- a. Calculer les affixes des points  $A' = f(A)$  et  $C' = f(C)$ .
- b. En déduire la nature de  $f$  et caractériser cette transformation.
- c. Placer les points A, B et C puis construire le point  $B' = f(B)$ .
2.
  - a. Donner l'écriture complexe de l'homothétie  $h$  de centre A et de rapport  $\sqrt{2}$ .
  - b. Montrer que la composée  $g = f \circ h$  a pour écriture complexe  $z'' = (1+i)\bar{z} - 1 + 3i$ .

3. a. Soit  $M_0$  le point d'affixe  $2 - 4i$ .  
Déterminer l'affixe du point  $M_0'' = g(M_0)$  puis vérifier que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AM_0''}$  sont orthogonaux.
- b. On considère un point  $M$  d'affixe  $z$ . On suppose que la partie réelle  $x$  et la partie imaginaire  $y$  de  $z$  sont des entiers.  
Démontrer que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AM''}$  sont orthogonaux si, et seulement si  $5x + 3y = -2$ .
- c. Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $5x + 3y = -2$ .
- d. En déduire les points  $M$  dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle  $[-6; 6]$  tels que  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AM''}$  sont orthogonaux. Placer les points obtenus sur la figure.

**EXERCICE 3****6 points****Commun à tous les candidats**

On donne dans le plan trois points A, B et C distincts non alignés.

Une urne U contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres  $-2, -1, 0, 1, 2$  et  $3$ .

Une urne V contient cinq cartons indiscernables au toucher ; quatre cartons portent le nombre  $1$  et un carton le nombre  $-1$ .

On tire au hasard un carton dans chacune des urnes. Les tirages sont équiprobables. On note  $a$  le nombre lu sur le canon de U et  $b$  celui lu sur le carton de V.

1. Justifier que les points pondérés (A,  $a$ ), (B,  $b$ ) et (C, 4) admettent un barycentre. On le note G.
2. a. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :  
 $E_1$  « G appartient à la droite (BC) » ;  
 $E_2$  « G appartient au segment [BC] ».
- b. Montrer que la probabilité de l'évènement  $E_3$  : « G est situé à l'intérieur du triangle ABC et n'appartient à aucun des côtés » est égale à  $\frac{2}{5}$ . On pourra faire appel des considérations de signe.
3. Soit  $n$  un entier naturel non nul. On répète  $n$  fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un carton dans chacune des urnes U et V puis à considérer le barycentre G de la question 1.  
On désigne par  $X$  la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'évènement  $E_3$ .
  - a. Déterminer l'entier  $n$  pour que l'espérance de la variable aléatoire  $X$  soit égale à 4.
  - b. Déterminer le plus petit entier  $n$  pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situé à l'intérieur du triangle ABC soit supérieure ou égale à 0,999.


**Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie**
  
 novembre 2004

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

**EXERCICE 1**

**5 points**

**Commun à tous les candidats**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère l'application  $f$  du plan dans lui-même qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :

$$z' = z^2 - 4z.$$

1. Soient A et B les points d'affixes  $z_A = 1 - i$  et  $z_B = 3 + i$ .
  - a. Calculer les affixes des points  $A'$  et  $B'$  images des points A et B par  $f$ .
  - b. On suppose que deux points ont la même image par  $f$ . Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.
2. Soit I le point d'affixe  $-3$ .
  - a. Démontrer que  $OMIM'$  est un parallélogramme si et seulement si  $z^2 - 3z + 3 = 0$ .
  - b. Résoudre l'équation  $z^2 - 3z + 3 = 0$ .
3.
  - a. Exprimer  $(z' + 4)$  en fonction de  $(z - 2)$ . En déduire une relation entre  $|z' + 4|$  et  $|z - 2|$  puis entre  $\arg(z' + 4)$  et  $\arg(z - 2)$ .
  - b. On considère les points J et K d'affixes respectives  $z_J = 2$  et  $z_K = -4$ . Démontrer que tous les points  $M$  du cercle  $(\mathcal{C})$  de centre J et de rayon 2 ont leur image  $M'$  sur un même cercle que l'on déterminera.
  - c. Soit E le point d'affixe  $z_E = -4 - 3i$ . Donner la forme trigonométrique de  $(z_E + 4)$  et à l'aide du 3. a. démontrer qu'il existe deux points dont l'image par  $f$  est le point E. Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

**EXERCICE 2**

**5 points**

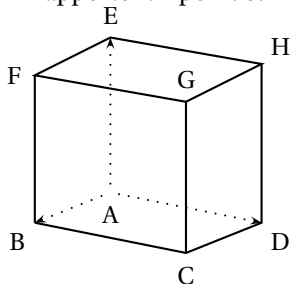
**Commun à tous les candidats**

**Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.)**

*Les réponses à cet exercice sont à inscrire sur la feuille jointe en annexe. Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.*

**Pour chacune des cinq questions une ou plusieurs réponses sont exactes. Le candidat doit inscrire V (vrai) ou F (faux) dans la case correspondante.**

Aucune justification n'est demandée. Pour chaque question, 3 réponses correctes rapportent 1 point et 2 réponses correctes rapportent  $\frac{1}{2}$  point.



Soit ABCDEFGH un cube de côté 1.  
On choisit le repère orthonormal  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

On appelle I et J les milieux respectifs des segments [EF] et [FG].

L est le barycentre de  $\{(A, 1); (B, 3)\}$ .

Soit  $(\pi)$  le plan d'équation  $4x - 4y + 3z - 3 = 0$ .

1. Les coordonnées de L sont :

a.  $\left(\frac{1}{4}; 0; 0\right)$       b.  $\left(\frac{3}{4}; 0; 0\right)$       c.  $\left(\frac{2}{3}; 0; 0\right)$

2. Le plan  $(\pi)$  est le plan

a. (GLE)      b. (LEJ)      c. (GFA)

3. Le plan parallèle au plan  $(\pi)$  passant par I coupe la droite (FB) en M de coordonnées

a.  $\left(1; 0; \frac{1}{4}\right)$       b.  $\left(1; 0; \frac{1}{5}\right)$       c.  $\left(1; 0; \frac{1}{3}\right)$

4. a. Les droites (EL) et (FB) sont sécantes en un point N qui est le symétrique de M par rapport à B.

b. Les droites (EL) et (IM) sont parallèles.

c. Les droites (EL) et (IM) sont sécantes.

5. Le volume du tétraèdre FIJM est :

a.  $\frac{1}{36}$       b.  $\frac{1}{48}$       c.  $\frac{1}{24}$

### EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}.$$

On note  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

#### Partie A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x - x - 1$ .

1. Étudier les variations de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ . En déduire le signe de  $g$ .
2. Justifier que pour tout  $x$ ,  $(e^x - x)$  est strictement positif.

#### Partie B

1. a. Calculer les limites de la fonction  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .  
b. Interpréter graphiquement tes résultats précédents.
2. a. Calculer  $f'(x)$ ,  $f'$  désignant la fonction dérivée de  $f$ .  
b. Étudier le sens de variations de  $f$  puis dresser son tableau de variations.
3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse 0.  
b. À l'aide de la **partie A**, étudier la position de la courbe  $(\mathcal{C})$  par rapport à la droite (T).
4. Tracer la droite (T) les asymptotes et la courbe  $(\mathcal{C})$ .

### EXERCICE 3

5 points

Exercice de spécialité

Dans cet exercice,  $a$  et  $b$  désignent des entiers strictement positifs.



1.
  - a. Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $au + bv = 1$  alors les nombres  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.
  - b. En déduire que si  $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$ , alors  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.
2. On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs  $(a; b)$  tels que  $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$ . Un tel couple sera appelé solution.
  - a. Déterminer  $a$  lorsque  $a = b$ .
  - b. Vérifier que  $(1; 1)$ ,  $(2; 3)$  et  $(5; 8)$  sont trois solutions particulières.
  - c. Montrer que si  $(a; b)$  est solution et si  $a < b$ , alors  $a^2 - b^2 < 0$ .
3.
  - a. Montrer que si  $(x; y)$  est une solution différente de  $(1; 1)$  alors  $(y - x; x)$  et  $(y; y + x)$  sont aussi des solutions.
  - b. Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.
4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs  $(a_n)_n$  définie par  $a_0 = a_1 = 1$  et pour tout entier  $n, n \geq 0$ ,  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ .  
Démontrer que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $(a_n; a_{n+1})$  est solution.  
En déduire que les nombres  $a_n$  et  $a_{n+1}$  sont premiers entre eux.

**EXERCICE 4****5 points****Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**On considère les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies, pour tout entier naturel  $n$ , par :

$$\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 &= 4 \\ v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $u_2$  et  $v_2$ .
2. Soit la suite  $(w_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $w_n = v_n - u_n$ .
  - a. Montrer que la suite  $(w_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{4}$ .
  - b. Exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$  et préciser la limite de la suite  $(w_n)$ .
3. Après avoir étudié le sens de variation de suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ , démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4. On considère à présent la suite  $(t_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ .
  - a. Démontrer que la suite  $(t_n)$  est constante.
  - b. En déduire la limite des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

**EXERCICE 4****5 points****Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**Dans cet exercice,  $a$  et  $b$  désignent des entiers strictement positifs.

1.
  - a. Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que

$$au + bv = 1$$

alors les nombres  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.

- b. En déduire que si  $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$ , alors  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.
2. On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs  $(a; b)$  tels que  $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$ . Un tel couple sera appelé solution.
  - a. Déterminer  $a$  lorsque  $a = b$ .

- b.** Vérifier que  $(1; 1)$ ,  $(2; 3)$  et  $(5; 8)$  sont trois solutions particulières.
- c.** Montrer que si  $(a; b)$  est solution et si  $a \neq b$ , alors  $a^2 - b^2 < 0$ .
- 3. a.** Montrer que si  $(x; y)$  est une solution différente de  $(1; 1)$  alors  $(y - x; x)$  et  $(y; y + x)$  sont aussi des solutions.
- b.** Dédire de **2. b.** trois nouvelles solutions
- 4.** On considère la suite de nombres entiers strictement positifs  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $a_0 = a_1 = 1$  et pour tout entier  $n, n \geq 0, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ .  
Démontrer que pour tout entier  $n \geq 0, (a_n; a_{n+1})$  est solution.  
En déduire que les nombres  $a_n$  et  $a_{n+1}$  sont premiers entre eux.

∞ Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2004 ∞

EXERCICE 1

7 points

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par

$$f(x) = xe^{-x}.$$

On note  $\Gamma$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique : 10 cm).

Partie A

1.
  - a. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - b. Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variations.
  - c. Construire  $\Gamma$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
2.
  - a. Montrer que, pour tout réel  $m$  de  $]0; \frac{1}{e}[$ , l'équation  $f(x) = m$  admet deux solutions.
  - b. Dans le cas où  $m = \frac{1}{4}$ , on nomme  $\alpha$  et  $\beta$  les solutions (avec  $\alpha < \beta$ ).  
Déterminer un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $\alpha$ .
  - c. Résoudre l'équation  $f(x) = m$  dans le cas où  $m = 0$  et  $m = \frac{1}{e}$ .

Partie B

1. On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par

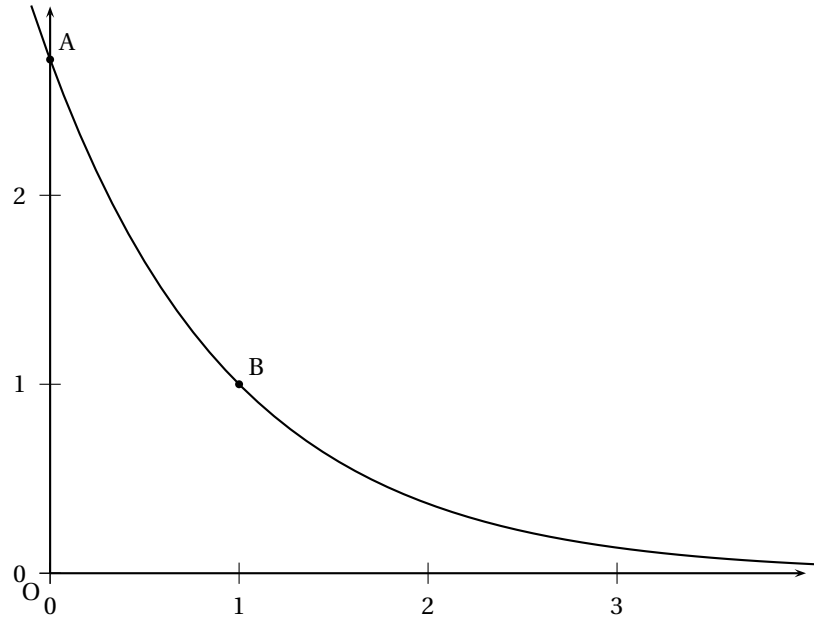
$$\begin{cases} u_0 & = & \alpha \\ u_{n+1} & = & u_n e^{-u_n}, \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

où  $\alpha$  est le réel défini à la question A. 2. b.

- a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ .
  - b. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
  - c. La suite  $(u_n)$  est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.
2. On considère la suite  $(w_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $w_n = \ln u_n$ .
  - a. Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel, on a  $u_n = w_n - w_{n+1}$ .
  - b. On pose  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .  
Montrer que  $S_n = w_0 - w_{n+1}$ .
  - c. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .
3. On considère la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par son premier terme  $v_0$  ( $v_0 > 0$ ) et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = v_n e^{-v_n}$ .  
Existe-t-il une valeur de  $v_0$  différente de  $\alpha$  telle que, pour tout  $n \geq 1$ , on ait  $u_n = v_n$  ?  
Si oui, préciser laquelle.

EXERCICE 2

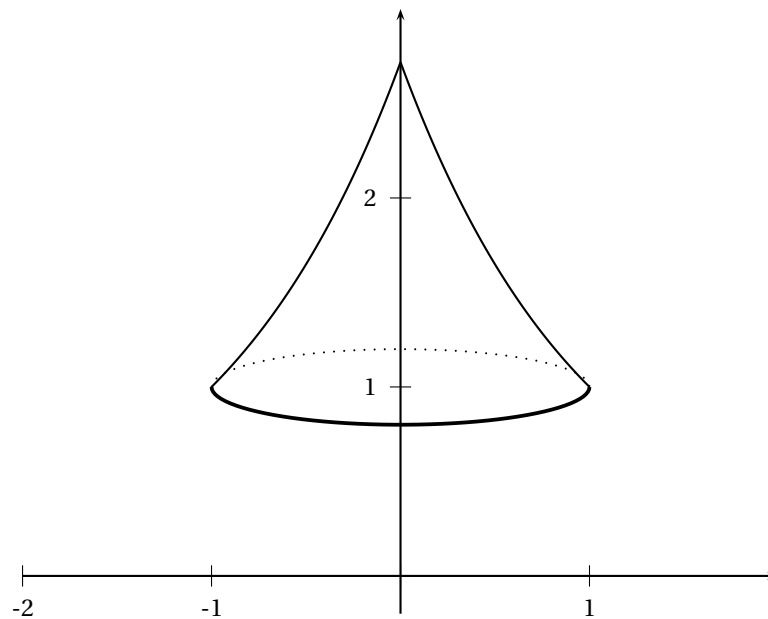
3 points



On a représenté ci-dessus, dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe représentative de la fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ , solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' + y = 0 \quad \text{et telle que} \quad f(0) = e.$$

1. Déterminer  $f(x)$  pour tout  $x$  réel.
2. Soit  $t$  un réel donné de l'intervalle  $[1; e]$ .  
Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $e^{1-x} = t$  d'inconnue  $x$ .
3. Soit  $A$  le point d'abscisse 0 et  $B$  le point d'abscisse 1 de la courbe.  
On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe  $\widehat{AB}$  comme représenté ci-dessous. On note  $V$  son volume.  
On admet que  $V = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 dt$ .  
Calculer  $V$  à l'aide de deux intégrations par parties successives.



**EXERCICE 3****5 points**

On note  $p_A(B)$  la probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé.

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.  
On note  $A_0$  l'évènement ; « on n'a obtenu aucune boule noire » ;  
On note  $A_1$  l'évènement : « on a obtenu une seule boule noire » ;  
On note  $A_2$  l'évènement : « on a obtenu deux boules noires ».  
Calculer les probabilités de  $A_0$ ,  $A_1$  et  $A_2$ .
2. Après ce premier tirage, il reste donc 4 boules dans l'urne.  
On effectue à nouveau au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.  
On note  $B_0$  l'évènement : « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n° 2 »  
On note  $B_1$  l'évènement : « on a obtenu une seule boule noire au tirage n° 2 »  
On note  $B_2$  l'évènement : « on a obtenu deux boules noires au tirage n° 2 »
  - a. Calculer  $p_{A_0}(B_0)$ ,  $p_{A_1}(B_0)$  et  $p_{A_2}(B_0)$ .
  - b. En déduire  $p(B_0)$ .
  - c. Calculer  $p(B_1)$  et  $p(B_2)$ .
  - d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier ?
3. On considère l'évènement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient extraites de l'urne ».  
Montrer que  $p(R) = \frac{1}{3}$ .

**EXERCICE 4****5 points****Partie A**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Pour réaliser la figure, on prendra pour unité graphique 1 cm.

Soit P le point d'affixe  $p$  où  $p = 10$  et  $\Gamma$  le cercle de diamètre [OP].

On désigne par  $\Omega$  le centre de  $\Gamma$ .

Soit A, B, C les points d'affixes respectives  $a$ ,  $b$  et  $c$ , où  $a = 5 + 5i$ ,  $b = 1 + 3i$  et  $c = 8 - 4i$ .

1. Montrer que A, B et C sont des points du cercle  $\Gamma$ .
2. Soit D le point d'affixe  $2 + 2i$ .  
Montrer que D est le projeté orthogonal de O sur la droite (BC).

**Partie B**

À tout point M du plan différent de O, d'affixe  $z$ , on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que

$$z' = \frac{20}{\bar{z}} \quad \text{où } z \text{ désigne le nombre conjugué de } z.$$

1. Montrer que les points O, M et  $M'$  sont alignés.
2. Soit  $\Delta$  la droite d'équation  $x = 2$  et M un point de  $\Delta$  d'affixe  $z$ .  
On se propose de définir géométriquement le point  $M'$  associé au point M.
  - a. Vérifier que  $z + \bar{z} = 4$ .
  - b. Exprimer  $z' + \bar{z}'$  en fonction de  $z$  et  $\bar{z}$  et en déduire que  $5(z' + \bar{z}') = z'\bar{z}'$ .

- c. En déduire que  $M'$  appartient à l'intersection de la droite (OM) et du cercle  $\Gamma$ .  
Placer  $M'$  sur la figure.

**EXERCICE 4****5 points****Exercice de spécialité**

Soit  $A_0$  et  $B_0$  deux points du plan orienté tels que  $A_0B_0 = 8$ . On prendra le centimètre pour unité.

Soit  $S$  la similitude de centre  $A_0$ , de rapport  $\frac{1}{2}$  et d'angle  $\frac{3\pi}{4}$ .

On définit une suite de points  $(B_n)$  de la façon suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n, B_{n+1} = S(B_n).$$

1. Construire  $B_1, B_2, B_3$  et  $B_4$ .
2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , les triangles  $A_0B_nB_{n+1}$  et  $A_0B_{n+1}B_{n+2}$  sont semblables.
3. On définit la suite  $(l_n)$  par : pour tout entier naturel  $n$ ,  $l_n = B_nB_{n+1}$ .
  - a. Montrer que la suite  $(l_n)$  est une suite géométrique et préciser sa raison.
  - b. Exprimer  $l_n$  en fonction de  $n$  et de  $l_0$ .
  - c. On pose  $\Sigma_n = l_0 + l_1 + \dots + l_n$ .  
Déterminer la limite de  $\Sigma_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
4.
  - a. Résoudre l'équation  $3x - 4y = 2$  où  $x$  et  $y$  sont deux entiers relatifs.
  - b. Soit  $\Delta$  la droite perpendiculaire en  $A_0$  à la droite  $(A_0B_0)$ .  
Pour quelles valeurs de l'entier naturel  $n$ ,  $B_n$  appartient-il à  $\Delta$ ?

**Baccalauréat S (obligatoire) Nouvelle Calédonie**   
**mars 2005**

**EXERCICE 1**

**4 points**

**Commun tous les candidats**

L'exercice comporte 4 questions. Pour chaque question, on propose trois affirmations. Pour chacune d'elles, le candidat doit indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.

*Les réponses à cet exercice sont à inscrire sur la feuille jointe en annexe. Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.*

Chaque réponse exacte rapporte 0,25 point. Une bonification de 0,25 point est ajoutée chaque fois qu'une question est traitée correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 3 affirmations sont exactes). 2 réponses inexactes dans une même question entraînent le retrait de 0,25 point.

L'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point.

Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans l'exercice, le plan complexe est rapporté au repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Q1	Pour tout $n$ entier naturel non nul, pour tout réel $\theta$ , $(e^{i\theta})^n$ est égal à :	$e^{in\theta}$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
		$\cos(\theta^n) + i \sin(\theta^n)$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
		$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
Q2	La partie imaginaire du nombre $z$ est égale à :	$\frac{z + \bar{z}}{2}$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
		$\frac{z - \bar{z}}{2i}$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
		$\frac{z - \bar{z}}{2}$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
Q3	Soit $z$ un complexe tel que $z = x + iy$ ( $x$ et $y$ réels). Si $z$ est un imaginaire pur, alors $ z ^2$ est égal à :	$y^2$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
		$-y^2$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
		$-z^2$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
Q4	A, B et C sont des points d'affixes respectives $a$ , $b$ et $c$ telles que $\frac{b-a}{c-a} = i\sqrt{3}$ , alors :	$BC = 2 AC$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
		$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
		$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = CA^2$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai

**EXERCICE 2**

**5 points**

**Commun tous les candidats**

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.

Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à  $p$ .

Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros. Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude.

Soit  $X_i$  la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au  $i$ -ème trajet et la valeur 0 sinon. Soit  $X$  la variable aléatoire définie par  $X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{40}$ .

1. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
2. Dans cette partie on suppose que  $p = \frac{1}{20}$ .
  - a. Calculer l'espérance mathématique de  $X$ .
  - b. Calculer les probabilités  $P(X = 0)$ ,  $P(X = 1)$  et  $P(X = 2)$ .
  - c. Calculer à  $10^{-4}$  près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.
3. Soit  $Z_i$  la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur.  
Justifier l'égalité  $Z = 400 - 100X$  puis calculer l'espérance mathématique de  $Z$  pour  $p = \frac{1}{5}$ .
4. On désire maintenant déterminer  $p$  afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99%.
  - a. Démontrer que  $P(X \leq 2) = (1 - p)^{38} (741p^2 + 38p + 1)$ .
  - b. Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par :  $f(x) = (1 - x)^{38} (741x^2 + 38x + 1)$ .  
Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $[0; 1]$  et qu'il existe un unique réel  $x_0$  appartenant à l'intervalle  $[0; 1]$  tel que  $f(x_0) = 0,01$ . Déterminer l'entier naturel  $n$  tel que  $\frac{n}{100} < x_0 < \frac{n+1}{100}$ .
  - c. En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à  $p$  afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99%.  
(On exprimera  $p$  en fonction de  $x_0$ ).

**EXERCICE 3****6 points****Commun à tous les candidats**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1 ; +\infty[$  par :  $f(x) = x^2 - 2,2x + 2,2 \ln(x+1)$

1. Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre  $-2 \leq x \leq 4, -5 \leq y \leq 5$ .  
Reproduire sur la copie l'allure de la courbe obtenue grâce à la calculatrice.
2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :
  - a. Sur les variations de la fonction  $f$  ?
  - b. Sur le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0$  ?
3. On se propose maintenant d'étudier la fonction  $f$ 
  - a. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$
  - b. Étudier les limites de la fonction  $f$  en  $-1$  et en  $+\infty$ , puis dresser le tableau de variations de  $f$ .
  - c. Déduire de cette étude, en précisant le raisonnement, le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0$ .
  - d. Les résultats aux questions 3. a. et 3. c. confirment-ils les conjectures émises à la question 2. ?
4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-0,1 ; 0,2]$ , de façon à visualiser les résultats de la question 3..



- a. Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée  $y$  proposez-vous pour mettre en évidence les résultats de la question 3. c. dans la fenêtre de votre calculatrice ?
- b. À l'aide de la calculatrice déterminer une valeur approchée par défaut à  $10^{-2}$  près de la plus grande solution  $\alpha$  de l'équation  $f(x) = 0$ .
5. Soit  $F$  la fonction définie sur  $] -1 ; +\infty[$  par

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1,1x^2 - 2,2x + 2,2(x+1)\ln(x+1).$$

- a. Démontrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $] -1 ; +\infty[$ .
- b. Interpréter graphiquement l'intégrale  $\int_0^\alpha f(x) dx$ .
- c. Calculer  $\int_0^\alpha f(x) dx$  et exprimer le résultat sous la forme  $ba^3 + ca^2$  ( $b$  et  $c$  réels).

**EXERCICE 4****5 points****Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité****Partie A**

Étant donnés deux points distincts  $A_0$  et  $B_0$  d'une droite, on définit les points :

$A_1$  milieu du segment  $[A_0 B_0]$  et  $B_1$  barycentre de  $\{(A_0, 1) ; B_0, 2\}$ .

Puis, pour tout entier naturel  $n$ ,  $A_{n+1}$  milieu du segment  $[A_n B_n]$  et  $B_{n+1}$  barycentre de  $\{(A_n, 1) ; B_n, 2\}$ .

- Placer les points  $A_1, B_1, A_2$  et  $B_2$  pour  $A_0 B_0 = 12$  cm.  
Quelle conjecture peut-on faire sur les points  $A_n$  et  $B_n$  quand  $n$  devient très grand ?
- On munit la droite  $(A_0 B_0)$  du repère  $(A_0 ; \vec{i})$  avec  $\vec{i} = \frac{1}{12} \overrightarrow{A_0 B_0}$ . Soit  $u_n$  et  $v_n$  les abscisses respectives des points  $A_n$  et  $B_n$ . Justifier que pour tout entier naturel  $n$  strictement positif, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

**Partie B**

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par  $u_0 = 0 ; v_0 = 12 ;$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

- Démontrer que la suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = v_n - u_n$  est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.
- Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante puis que la suite  $(v_n)$  est décroissante.
- Déduire des deux questions précédentes que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes et ont la même limite.
- On considère la suite  $(t_n)$  définie par  $t_n = 2u_n + 3v_n$ .  
Montrer qu'elle est constante.

**Partie C**

À partir des résultats obtenus dans les **parties A et B**, préciser la position limite des points  $A_n$  et  $B_n$  quand  $n$  tend vers plus l'infini.

∞ Baccalauréat S Pondichéry 31 mars 2005 ∞

**EXERCICE 1**

**4 points**

**Commun à tous les candidats**

On considère la fonction  $f$ , définie sur  $[1 ; +\infty[$  par

$$f(t) = \frac{e^t}{t}.$$

1. a. Justifier la continuité de  $f$  sur  $[1 ; +\infty[$ .
- b. Montrer que  $f$  est croissante sur  $[1 ; +\infty[$ .

**2. Restitution organisée de connaissances**

On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.

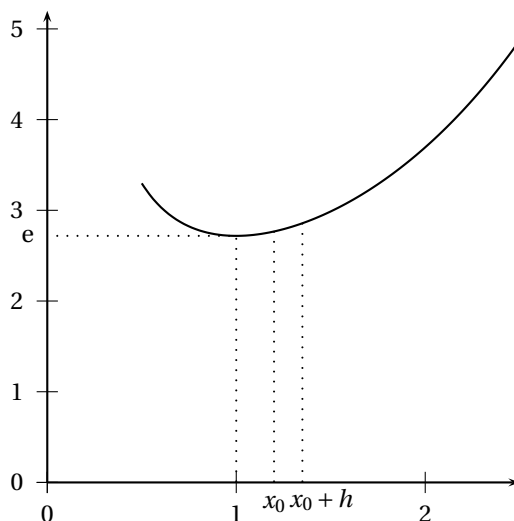
Pour tout réel  $x_0$  de  $[1 ; +\infty[$ , on note  $\mathcal{A}(x_0)$  l'aire du domaine délimité par la courbe représentant  $f$  dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = x_0$ .

On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur  $[1 ; +\infty[$  est une primitive de  $f$ .

- a. Que vaut  $\mathcal{A}(1)$  ?
- b. Soit  $x_0$  un réel quelconque de  $[1 ; +\infty[$  et  $h$  un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h).$$

- c. Lorsque  $x_0 > 1$ , quel encadrement peut-on obtenir pour  $h < 0$  et tel que  $x_0 + h \geq 1$  ?
- d. En déduire la dérivabilité en  $x_0$  de la fonction  $\mathcal{A}$  ainsi que le nombre dérivé en  $x_0$  de la fonction  $\mathcal{A}$ .
- e. Conclure.



**EXERCICE 2**

**5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe  $P$  est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On désigne par  $I$  le point d'affixe  $z_I = 1$ , par  $A$  le point d'affixe  $z_A = 1 - 2i$ , par  $B$  le point d'affixe  $-2 + 2i$  et par  $(\mathcal{C})$  le cercle de diamètre  $[AB]$ .

On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Déterminer le centre  $\Omega$  du cercle ( $\mathcal{C}$ ) et calculer son rayon.
2. Soit D le point d'affixe  $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$ .  
Écrire  $z_D$  sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle ( $\mathcal{C}$ ).
3. Sur le cercle ( $\mathcal{C}$ ), on considère le point E, d'affixe  $z_E$ , tel qu'une mesure en radians de  $(\vec{\Omega I}, \vec{\Omega E})$  est  $\frac{\pi}{4}$ .
  - a. Préciser le module et un argument de  $z_E + \frac{1}{2}$ .
  - b. En déduire que  $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$ .
4. Soit  $r$  l'application du plan P dans lui-même qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} \left( z + \frac{1}{2} \right).$$

- a. Déterminer la nature de  $r$  et ses éléments caractéristiques.
- b. Soit K le point d'affixe  $z_K = 2$ .  
Déterminer par le calcul l'image de K par  $r$ . Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

**EXERCICE 2****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On considère l'application  $f$  qui au point  $M$  d'affixe  $z$  fait correspondre le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que :

$$z' = \frac{3+4i}{5}z + \frac{1-2i}{5}.$$

1. On note  $x$  et  $x'$ ,  $y$  et  $y'$  les parties réelles et les parties imaginaires de  $z$  et  $z'$ .  
Démontrer que : 
$$\begin{cases} x' = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$$
2.
  - a. Déterminer l'ensemble des points invariants par  $f$ .
  - b. Quelle est la nature de l'application  $f$  ?
3. Déterminer l'ensemble D des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $z'$  soit réel.
4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.
  - a. Donner une solution particulière  $(x_0, y_0)$  appartenant à  $\mathbb{Z}^2$  de l'équation  $4x - 3y = 2$ .
  - b. Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à  $\mathbb{Z}^2$  de l'équation  $4x - 3y = 2$ .
5. On considère les points  $M$  d'affixe  $z = x + iy$  tels que  $x = 1$  et  $y \in \mathbb{Z}$ . Le point  $M' = f(M)$  a pour affixe  $z'$ .  
Déterminer les entiers  $y$  tels que  $\operatorname{Re}(z')$  et  $\operatorname{Im}(z')$  soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats**

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points A, B et C de coordonnées respectives  $(1; 0; 2)$ ,  $(1; 1; 4)$  et  $(-1; 1; 1)$ .

1.
  - a. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
  - b. Soit  $\vec{n}$  le vecteur de coordonnées (3 ; 4 ; -2).  
Vérifier que le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonal aux vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .  
En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soient  $P_1$  et  $P_2$  les plans d'équations respectives  $2x + y + 2z + 1 = 0$  et  $x - 2y + 6z = 0$ .
  - a. Montrer que les plans  $P_1$  et  $P_2$  sont sécants selon une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.
  - b. La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?
3. Soit  $t$  un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et  $t$ .
  - a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif  $t$ .  
Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.  
Exprimer le vecteur  $\vec{IG}$  en fonction du vecteur  $\vec{IC}$ .
  - b. Montrer que l'ensemble des points G lorsque  $t$  décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment [IC] privé du point C.  
Pour quelle valeur de  $t$ , le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec G ?

**EXERCICE 4****6 points****Commun à tous les candidats**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$ . On définit ainsi une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

1. Prouver, pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leq 0,95u_n \quad \text{si et seulement si} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $[1 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}.$$

- a. Étudier le sens de variation et la limite en  $+\infty$  de la fonction  $f$ .
- b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle  $[1 ; +\infty[$  un unique nombre réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 1,9$ .
- c. Déterminer l'entier naturel  $n_0$  tel que  $n_0 - 1 \leq \alpha \leq n_0$ .
- d. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 16, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

3.
  - a. Déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$  à partir du rang 16.
  - b. Que peut-on en déduire pour la suite ?
4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 16, l'encadrement :

$$0 \leq u_n \leq 0,95^{n-16} u_{16}.$$

En déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

❧ Baccalauréat S Amérique du Nord ❧  
1<sup>er</sup> juin 2005

**EXERCICE 1**

**4 points**

**Commun à tous les candidats**

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.

**Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.**

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives  $-2 + 3i$ ,  $-3 - i$  et  $2,08 + 1,98i$ .  
Le triangle ABC est :  
(a) : isocèle et non rectangle    (b) : rectangle et non isocèle  
(c) : rectangle et isocèle    (d) : ni rectangle ni isocèle
2. À tout nombre complexe  $z \neq -2$ , on associe le nombre complexe  $z'$  défini par :  
$$z' = \frac{z - 4i}{z + 2}.$$
  
L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|z'| = 1$  est :  
(a) : un cercle de rayon 1    (b) : une droite  
(c) : une droite privée d'un point    (d) : un cercle privé d'un point
3. Les notations sont les mêmes qu'à la question 2.  
L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $z'$  est un réel est :  
(a) : un cercle    (b) : une droite  
(c) : une droite privée d'un point    (d) : un cercle privé d'un point
4. Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe  $i$ . L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle  $-\frac{\pi}{3}$  est :  
(a) :  $z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$     (b) :  $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$   
(c) :  $z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$     (d) :  $z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

**EXERCICE 2**

**6 points**

Le graphique de l'annexe sera complété et remis avec la copie.

Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; 2]$  par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}.$$

1. Étudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 2]$ . Montrer que si  $x \in [1; 2]$  alors  $f(x) \in [1; 2]$ .
2.  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites définies sur  $\mathbb{N}$  par :  
 $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .  
 $v_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = f(v_n)$ .
  - a. Le graphique donné en annexe représente la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 2]$ .  
Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  en laissant apparents tous les traits de construction.

À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ?

**b.** Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $1 \leq v_n \leq 2$ .

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} \leq v_n$ .

On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $1 \leq u_n \leq 2$ .

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$ .

**c.** Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$ .

En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n - u_n \geq 0$  et

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n).$$

**d.** Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ .

**e.** Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers un même réel  $\alpha$ .

Déterminer la valeur exacte de  $\alpha$ .

### EXERCICE 3

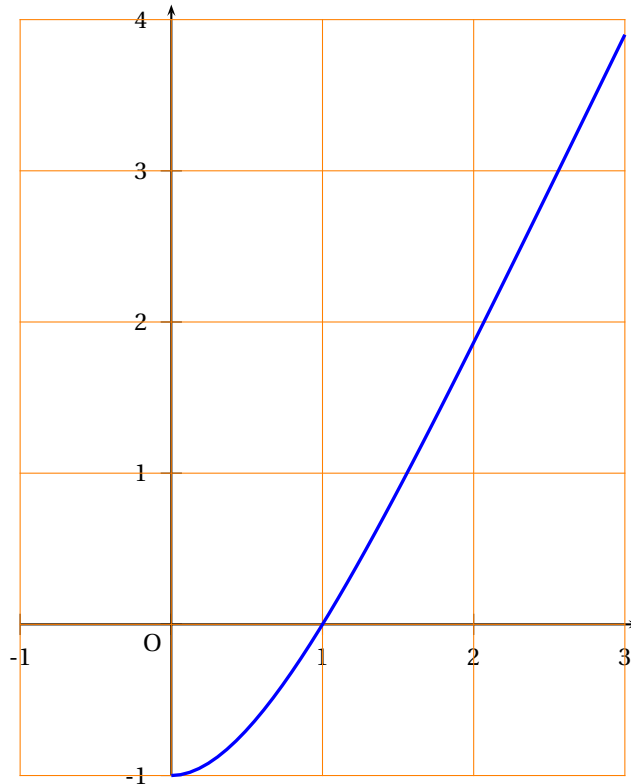
**5 points**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par

$$f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x}).$$

Sa courbe représentative  $\mathcal{C}$  est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm).

1. **a.** Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- b.** Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x - 2$  est asymptote à  $\mathcal{C}$ .
- c.** Étudier la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $\Delta$ .
2. **a.** Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$ .
- b.** En déduire que, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $f'(x) > 0$ .
- c.** Préciser la valeur de  $f'(0)$ , puis établir le tableau de variations de  $f$ .
3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en  $\text{cm}^2$ , du domaine plan limité par la courbe  $\mathcal{C}$ , la droite  $\Delta$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 3$ .
4. **a.** Déterminer le point A de  $\mathcal{C}$  où la tangente à  $\mathcal{C}$  est parallèle à  $\Delta$ .
- b.** Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite  $\Delta$ .

**EXERCICE 4****5 points**

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.

On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes :

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

- si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).

On définit les événements suivants :

$D_1$  : « le dé indique 1 »       $D_2$  : « le dé indique 2 »

$D_3$  : « le dé indique 3 »       $G$  : « la partie est gagnée ».

A et B étant deux événements tels que  $p(A) \neq 0$ , on note  $p_A(B)$  la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1.    **a.** Déterminer les probabilités  $p_{D_1}(G)$ ,  $p_{D_2}(G)$ , et  $p_{D_3}(G)$ 
  - b.** Montrer alors que  $p(G) = \frac{23}{180}$ .
2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

3. Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à  $10^{-2}$  près.  
Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9?

**EXERCICE 4****5 points****Enseignement de spécialité**

La figure jointe en annexe sera complétée au cours de l'exercice et remise avec la copie. On y laissera apparents les traits de construction.

Dans le plan orienté, on donne le triangle ABC tel que  $AB = 2$ ,  $AC = 1 + \sqrt{5}$  et

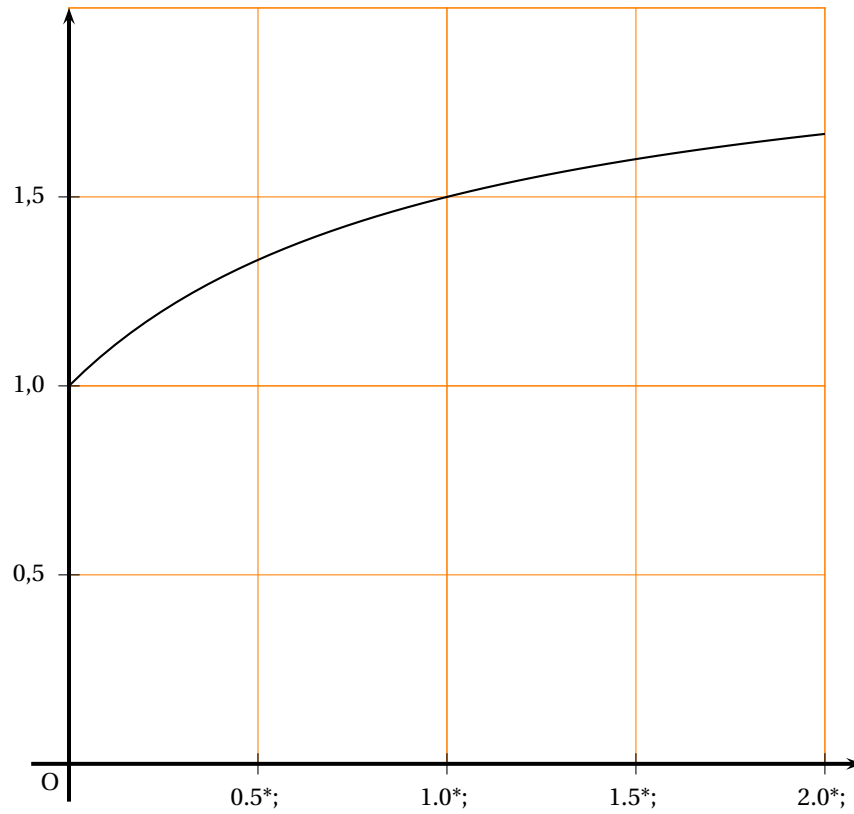
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}.$$

1.
  - a. *Démonstration de cours* : démontrer qu'il existe une seule similitude directe  $S$  transformant  $B$  en  $A$  et  $A$  en  $C$ .
  - b. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de  $S$ .
2. On appelle  $\Omega$  le centre de  $S$ . Montrer que  $\Omega$  appartient au cercle de diamètre  $[AB]$  et à la droite  $(BC)$ . Construire le point  $\Omega$ .
3. On note  $D$  l'image du point  $C$  par la similitude  $S$ .
  - a. Démontrer l'alignement des points  $A$ ,  $\Omega$  et  $D$  ainsi que le parallélisme des droites  $(CD)$  et  $(AB)$ . Construire le point  $D$ .
  - b. Montrer que  $CD = 3 + \sqrt{5}$ .
4. Soit  $E$  le projeté orthogonal du point  $B$  sur la droite  $(CD)$ .
  - a. Expliquer la construction de l'image  $F$  du point  $E$  par  $S$  et placer  $F$  sur la figure.
  - b. Quelle est la nature du quadrilatère  $BFDE$ ?

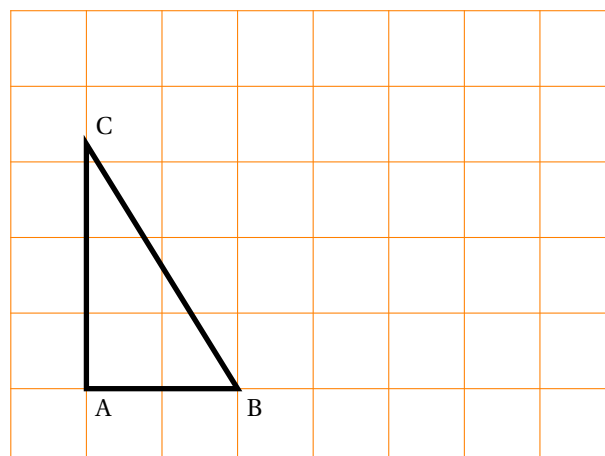


*Cette page sera remise avec la copie à la fin de l'épreuve*

**Annexe : exercice 2**



**Annexe : exercice de spécialité**



∞ Baccalauréat S Antilles – Guyane juin 2005 ∞

EXERCICE 1

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$(O, \vec{u}, \vec{v})$  est un repère orthonormal du plan  $\mathcal{P}$ .

Soit A le point d'affixe 1 ; soit B le point d'affixe  $-1$ .

Soit  $F$  l'application de  $\mathcal{P}$  privé de O dans  $\mathcal{P}$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  distinct de

O associe le point  $M' = F(M)$  d'affixe  $z' = \frac{-1}{\bar{z}}$ .

- Soit E le point d'affixe  $e^{i\frac{\pi}{3}}$  ; on appelle  $E'$  son image par  $F$ . Déterminer l'affixe de  $E'$  sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.
  - On note  $\mathcal{C}_1$  le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de  $\mathcal{C}_1$  par l'application  $F$ .
- Soit K le point d'affixe  $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$  et  $K'$  l'image de K par  $F$ . Calculer l'affixe de  $K'$ .
  - Soit  $\mathcal{C}_2$  le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de  $\mathcal{C}_2$  par l'application  $F$ .
- On désigne par  $R$  un point d'affixe  $1 + e^{i\theta}$  où  $\theta \in ]-\pi ; \pi[$ .  $R$  appartient au cercle  $\mathcal{C}_3$  de centre A et de rayon 1.
  - Montrer que  $z' + 1 = \frac{\bar{z} - 1}{z}$ .  
En déduire que :  $|z' + 1| = |z'|$ .
  - Si on considère maintenant les points d'affixe  $1 + e^{i\theta}$  où  $\theta \in ]-\pi ; \pi[$ , montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du a..

EXERCICE 1

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

- Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul  $n$  le reste dans la division euclidienne par 9 de  $7^n$ .
  - Démontrer alors que  $(2005)^{2005} \equiv 7 \pmod{9}$ .
- Démontrer que pour tout entier naturel non nul  $n$  :  
 $(10)^n \equiv 1 \pmod{9}$ .
  - On désigne par  $N$  un entier naturel écrit en base dix, on appelle  $S$  la somme de ses chiffres.  
Démontrer la relation suivante :  $N \equiv S \pmod{9}$ .
  - En déduire que  $N$  est divisible par 9 si et seulement si  $S$  est divisible par 9.
- On suppose que  $A = (2005)^{2005}$  ; on désigne par :
  - $B$  la somme des chiffres de  $A$  ;
  - $C$  la somme des chiffres de  $B$  ;
  - $D$  la somme des chiffres de  $C$ .
  - Démontrer la relation suivante :  $A \equiv D \pmod{9}$ .
  - Sachant que  $2005 < 10\,000$ , démontrer que  $A$  s'écrit en numération décimale avec au plus 8 020 chiffres. En déduire que  $B \leq 72\,180$ .
  - Démontrer que  $C \leq 45$ .

- d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de  $D$  plus petit que 15.
- e. Démontrer que  $D = 7$ .

**EXERCICE 2****6 points****Commun à tous les candidats**

1. Démontrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et tout  $x$  de  $[0; 1]$  :

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}.$$

2. a. Calculer  $\int_0^1 \frac{1}{x+n} dx$ .
- b. Dédurre en utilisant 1., que :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \quad (1)$$

$$\text{puis que } \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

3. On appelle  $U$  la suite définie pour  $n \in \mathbb{N}^*$  par :

$$U(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

Démontrer que  $U$  est décroissante (on pourra utiliser 2. b.)

4. On désigne par  $V$  la suite de terme général :

$$V(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1).$$

Démontrer que  $V$  est croissante.

5. Démontrer que  $U$  et  $V$  convergent vers une limite commune notée  $\gamma$ .  
Déterminer une valeur approchée de  $\gamma$  à  $10^{-2}$  près par la méthode de votre choix.

**EXERCICE 3****3 points****Commun à tous les candidats**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant à la réponse choisie.*

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.

40% des écrivains de romans policiers sont français et 70% des écrivains de biographies sont français.

Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :

- a. 0,4                      b. 0,75                      c.  $\frac{1}{150}$

2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :
- a. 0,3                                      b. 0,8                                      c. 0,4
3. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est
- a. 1,15                                      b. 0,4                                      c. 0,3
4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :
- a. 0,9                                      b. 0,7                                      c. 0,475
5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :
- a.  $\frac{4}{150}$                                       b.  $\frac{12}{19}$                                       c. 0,3
6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque; la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :
- a.  $1 - (0,25)^{20}$                                       b.  $20 \times 0,75$                                       c.  $0,75 \times (0,25)^{20}$

**EXERCICE 4****6 points****Commun à tous les candidats**

**A.** Soit  $[KL]$  un segment de l'espace; on note  $I$  son milieu. On appelle plan médiateur de  $[KL]$  le plan perpendiculaire en  $I$  à la droite  $(KL)$ .

Démontrer que le plan médiateur de  $[KL]$  est l'ensemble des points de l'espace équidistants de  $K$  et  $L$ .

**B.** Ici l'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ; on considère les points

$$A(4; 0; -3), \quad B(2; 2; 2), \quad C(3; -3; -1), \quad D(0; 0; -3).$$

- Démontrer que le plan médiateur de  $[AB]$  a pour équation  $4x - 4y - 10z - 13 = 0$ .  
On admet pour la suite que les plans médiateurs de  $[BC]$  et  $[CD]$  ont respectivement pour équations  $2x - 10y - 6z - 7 = 0$  et  $3x - 3y + 2z - 5 = 0$ .
- Démontrer, en résolvant un système d'équations linéaires, que ces trois plans ont un unique point commun  $E$  dont on donnera les coordonnées.
- En utilisant la **partie A** montrer que les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont sur une sphère de centre  $E$ . Quel est le rayon de cette sphère?

♧ Baccalauréat S Asie juin 2005 ♧

**EXERCICE 1**

**3 points**

**Commun à tous les candidats**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On appelle  $\mathcal{D}$  la

droite d'équations paramétriques : 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 - t \end{cases}$$
 et  $\mathcal{P}$  le plan d'équation car-

tésienne  $x + 2y - 3z - 1 = 0$ .

Dans chacune des lignes du tableau ci-dessous, une seule affirmation est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la ligne et la lettre correspondant à l'affirmation choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Numéro de la ligne	Affirmation A	Affirmation B	Affirmation C
1.	Le point M de coordonnées $(-1; 3; 2)$ appartient à $\mathcal{D}$	Le point N de coordonnées $(2; -1; -1)$ appartient à $\mathcal{D}$	Le point R de coordonnées $(3; 1; -4)$ appartient à $\mathcal{D}$
2.	Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1; 2; -3)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$	Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(-2; 1; 1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$	Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(3; 1; -4)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$
3.	$\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$	$\mathcal{D}$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}$	$\mathcal{D}$ est sécante à $\mathcal{P}$
4.	Le point G de coordonnées $(1; 3; -2)$ appartient à $\mathcal{P}$	Le point G de coordonnées $(1; 3; 2)$ appartient à $\mathcal{P}$	Le point G de coordonnées $(1; 3; -1)$ appartient à $\mathcal{P}$
5.	Le plan $Q_1$ d'équation cartésienne $x + 2y - 3z + 1 = 0$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$	Le plan $Q_2$ d'équation cartésienne $4x - 5y - 2z + 3 = 0$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$	Le plan $Q_3$ d'équation cartésienne $-3x + 2y - z - 1 = 0$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$
6.	La distance du point T de coordonnées $(-1; -3; 2)$ au plan $\mathcal{P}$ est : $\sqrt{14}$	La distance du point T de coordonnées $(-1; -3; 2)$ au plan $\mathcal{P}$ est : 14	La distance du point T de coordonnées $(-1; -3; 2)$ au plan $\mathcal{P}$ est : $2\sqrt{3}$

**EXERCICE 2**

**5 points**

**Commun à tous les candidats**

Une association organise une loterie pour laquelle une participation  $m$  exprimée en euros est demandée.

Un joueur doit tirer simultanément au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.

Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.

Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation  $m$ .

Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

- sur  $\frac{1}{8}$  de la roue le gain est de 100 €,
- sur  $\frac{1}{4}$  de la roue le gain est de 20 €,
- sur le reste le joueur est remboursé de sa participation  $m$ .

On appelle  $V$  l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules vertes ».

On appelle  $J$  l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes ».

On appelle  $R$  l'évènement « le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien ».

1. Quelques calculs.

- Calculer les probabilités  $P(V)$  et  $P(J)$  des évènements respectifs  $V$  et  $J$ .
- On note  $P_V(R)$  la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes. Déterminer  $P_V(R)$  puis  $P(R \cap V)$ .
- Calculer  $P(R)$ .
- Calculer la probabilité de gagner les 100 €, puis la probabilité de gagner les 20 € de la roue.

2. On appelle  $X$  la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est-à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale  $m$ .

- Donner les valeurs prises par la variable aléatoire  $X$ .
- Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$  et vérifier que  $p(X = -m)$  est 0,6.
- Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$  est  $E(X) = \frac{140 - 51m}{80}$ .
- L'organisateur veut fixer la participation  $m$  à une valeur entière en euro. Quelle valeur minimale faut-il donner à  $m$  pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

3. Un joueur se présente et décide de jouer 4 fois, quels que soient les résultats obtenus.

Calculer la probabilité qu'il perde au moins une fois sa mise.

4. On voudrait qu'un joueur ait plus d'une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner quand il joue une seule fois. On note  $G$  cet évènement. Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes. On appelle  $n$  le nombre de boules jaunes, on suppose  $n \geq 1$ . Calculer la valeur minimale de  $n$  pour que la condition précédente soit vérifiée.

### EXERCICE 3

5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique 1 cm).

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue  $z$  suivante :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0.$$

I. Résolution de l'équation (E).

- Montrer que  $-i$  est solution de (E).
- Déterminer les nombres réels  $a, b, c$  tels que :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(az^2 + bz + c).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II. On appelle  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $4 + i, 4 - i, -i$ .

1. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
2. Le point  $\Omega$  est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{2}$ . Calculer l'affixe de S.
3. Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle  $\mathcal{C}$  dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer  $\mathcal{C}$ .
4. À tout point  $M$  d'affixe  $z \neq 2$ , on associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = \frac{iz + 10 - 2i}{z - 2}$ .
  - a. Déterminer les affixes des points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  associés respectivement aux points A, B et C.
  - b. Vérifier que  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  appartiennent à un cercle  $\mathcal{C}'$  de centre P, d'affixe i. Déterminer son rayon et tracer  $\mathcal{C}'$ .
  - c. Pour tout nombre complexe  $z \neq 2$ , exprimer  $|z' - i|$  en fonction de  $z$ .
  - d. Soit  $M$  un point d'affixe  $z$  appartenant au cercle  $\mathcal{C}$ . Démontrer que  $|z' - i| = 2\sqrt{5}$ .
  - e. En déduire à quel ensemble appartiennent les points  $M'$  associés aux points  $M$  du cercle  $\mathcal{C}$ .

**EXERCICE 3****5 points****Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

Le but de cet exercice est d'étudier les similitudes directes qui transforment l'ensemble  $S_1$  des sommets d'un carré  $\mathcal{C}_1$  donné en l'ensemble  $S_2$  des sommets d'un carré  $\mathcal{C}_2$  donné.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ , unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B, C, D, E, F, G, H d'affixes respectives

$$-\frac{i}{2}, 1 - \frac{i}{2}, 1 + \frac{i}{2}, \frac{i}{2}, 1 - i, 3 - i, 3 + i, 1 + i.$$

$\mathcal{C}_1$  est le carré de sommets A, B, C, D et de centre  $O_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  est le carré de sommet E, F, G, H de centre  $O_2$ .  $S_1$  est donc l'ensemble  $\{A, B, C, D\}$  et  $S_2$  l'ensemble  $\{E, F, G, H\}$ .

1. Placer tous les points dans le repère  $\mathcal{R}$ , construire les carrés  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ .
2. Soit  $h$  l'homothétie de centre  $\Omega$  d'affixe  $-1$  et de rapport 2. Donner l'écriture complexe de  $h$  et prouver que  $h$  transforme  $S_1$  en  $S_2$ .
3. Soit  $s$  une similitude directe qui transforme  $S_1$  en  $S_2$  et soit  $g$  la transformation  $g = h^{-1} \circ s$ .
  - a. Quel est le rapport de la similitude  $s$ ?
  - b. Prouver que  $g$  est une isométrie qui laisse  $S_1$  globalement invariant.
  - c. Démontrer que  $g(O_1) = O_1$ .
  - d. En déduire que  $g$  est l'une des transformations suivantes : l'identité, la rotation  $r_1$  de centre  $O_1$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , la rotation  $r_2$  de centre  $O_1$  et d'angle  $\pi$ , la rotation  $r_3$  de centre  $O_1$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .
  - e. En déduire les quatre similitudes directes qui transforment  $S_1$  en  $S_2$ .
4. Étude des centres de ces similitudes.
  - a. Déterminer les écritures complexes de  $h \circ r_1$ ,  $h \circ r_2$ ,  $h \circ r_3$ .
  - b. En déduire les centres  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  de ces similitudes et les placer sur le dessin.

**EXERCICE 4****7 points****Commun à tous les candidats**

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers  $e^2$ .

On définit, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , l'intégrale

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx.$$

1. Calculer  $I_1$ .
2. Établir que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$ .
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ .
4. Démontrer par récurrence que  $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$ .
5. On pose, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $u_n = \frac{2^n}{n!}$ .
  - a. Calculer  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et prouver que pour tout entier naturel  $n \geq 3$ ,  $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$ .
  - b. En déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 3$ ,  $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ .
6. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$  puis celle de la suite  $(I_n)$ .
7. Justifier enfin que :

$$e^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} \right).$$



## Baccalauréat S Centres étrangers juin 2005

### EXERCICE 1

3 points

#### Commun à tous les candidats

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits.

On admet que lors du premier appel téléphonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est 0,4 et que s'il décroche, la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire est 0,3.

On pourra construire un arbre pondéré.

1. On note :

- $D_1$  l'évènement : « la personne décroche au premier appel » ;
- $R_1$  l'évènement « la personne répond au questionnaire lors du premier appel ».

Calculer la probabilité de l'évènement  $R_1$ .

2. Lorsqu'une personne ne décroche pas au premier appel, on la contacte une seconde fois. La probabilité pour que le correspondant ne décroche pas la seconde fois est 0,3 et la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire sachant qu'il décroche est 0,2. Si une personne ne décroche pas lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

On note :

- $D_2$  l'évènement : « la personne décroche au second appel ».
- $R_2$  l'évènement : « la personne répond au questionnaire lors du second appel ».
- $R$  l'évènement : « la personne répond au questionnaire ».

Montrer que la probabilité de l'évènement  $R$  est 0,236.

3. Sachant qu'une personne a répondu au questionnaire, calculer la probabilité pour que la réponse ait été donnée lors du premier appel. (on donnera la réponse arrondie au millième)

4. Un enquêteur a une liste de 25 personnes à contacter. Les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Quelle est la probabilité pour que 20 % des personnes répondent au questionnaire ? (on donnera la réponse arrondie au millième)

### EXERCICE 2

5 points

#### Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  unité graphique 8 cm.

On appelle  $A$  le point d'affixe  $-1$  et  $B$  le point d'affixe  $1$ .

On appelle  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points du plan distincts de  $A$ ,  $O$  et  $B$ .

À tout point  $M$  d'affixe  $z$  appartenant à l'ensemble  $\mathcal{E}$ , on associe le point  $N$  d'affixe  $z^2$  et le point  $P$  d'affixe  $z^3$ .

1. Prouver que les points  $M$ ,  $N$  et  $P$  sont deux à deux distincts.

2. On se propose dans cette question de déterminer l'ensemble  $\mathcal{C}$  des points  $M$  appartenant à  $\mathcal{E}$  tels que le triangle  $MNP$  soit rectangle en  $P$ .

a. En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que  $MNP$  est rectangle en  $P$  si et seulement si  $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$ .

b. Démontrer que  $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$  équivaut à  $\left(z + \frac{1}{2}\right) \left(\overline{z + \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}$ .

- c. En déduire l'ensemble  $\mathcal{C}$  cherché.
3. Soit  $M$  un point de  $\mathcal{E}$  et  $z$  son affixe, On désigne par  $r$  le module de  $z$  et  $\alpha$  l'argument de  $z$ ,  $\alpha \in ]-\pi ; \pi]$ .
- Démontrer que l'ensemble  $\mathcal{F}$  des points  $M$  de  $\mathcal{E}$  tels que l'affixe de  $P$  soit un réel strictement positif est la réunion de trois demi-droites (éventuellement privées de points).
  - Représenter les ensembles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{F}$  dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .
  - Déterminer les affixes des points  $M$  de  $\mathcal{E}$  tels que le triangle  $MNP$  soit rectangle en  $P$ , l'affixe de  $P$  étant un réel strictement positif.

**EXERCICE 2****5 points****Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité****Partie A**

Soit  $N$  un entier naturel, impair non premier.

On suppose que  $N = a^2 - b^2$  où  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels.

- Montrer que  $a$  et  $b$  n'ont pas la même parité.
- Montrer que  $N$  peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels  $p$  et  $q$ .
- Quelle est la parité de  $p$  et de  $q$ ?

**Partie B**

On admet que 250507 n'est pas premier.

On se propose de chercher des couples d'entiers naturels  $(a ; b)$  vérifiant la relation

$$(E) : a^2 - 250507 = b^2.$$

- Soit  $X$  un entier naturel.
  - Donner dans un tableau, les restes possibles de  $X$  modulo 9; puis ceux de  $X^2$  modulo 9.
  - Sachant que  $a^2 - 250507 = b^2$ , déterminer les restes possibles modulo 9 de  $a^2 - 250507$ ; en déduire les restes possibles modulo 9 de  $a^2$ .
  - Montrer que les restes possibles modulo 9 de  $a$  sont 1 et 8.
- Justifier que si le couple  $(a ; b)$  vérifie la relation (E), alors  $a \geq 501$ . Montrer qu'il n'existe pas de solution du type  $(501 ; b)$ .
- On suppose que le couple  $(a ; b)$  vérifie la relation (E).
  - Démontrer que  $a$  est congru à 503 ou à 505 modulo 9.
  - Déterminer le plus petit entier naturel  $k$  tel que le couple  $(505 + 9k ; b)$  soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

**Partie C**

- Déduire des parties précédentes une écriture de 250507 en un produit deux facteurs.
- Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux?
- Cette écriture est-elle unique?

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats**

Soit ABCD un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A avec  $AB = AC = AD = a$ . On appelle  $A_1$  le centre de gravité du triangle BCD.

1. Montrer que la droite  $(AA_1)$  est orthogonale au plan  $(BCD)$ .  
(On pourra par exemple calculer  $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CD}$  et  $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC}$ .)
2. En exprimant de deux façons différentes le volume du tétraèdre  $ABCD$ , calculer la longueur du segment  $[AA_1]$ .
3. On appelle  $G$  l'isobarycentre du tétraèdre  $ABCD$  et  $I$  le milieu de  $[BC]$ .
  - a. Montrer que  $G$  appartient au segment  $[AA_1]$  et déterminer la longueur  $AG$ .
  - b. Déterminer l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que
 
$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 2\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$
4. Soit  $H$  le symétrique de  $A$  par rapport à  $G$ .
  - a. Démontrer que  $4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$ .
  - b. Démontrer l'égalité  $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA}$ .
  - c. En déduire que  $HC = HD$ .

On rappelle que le volume d'une pyramide de hauteur  $h$  et d'aire de base associée  $b$  est

$$V = \frac{1}{3}bh.$$

#### EXERCICE 4

7 points

Commun à tous les candidats

##### I. Première partie

On appelle  $f$  et  $g$  les deux fonctions définies sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

1. Étudier les variations de  $f$  et de  $g$  sur  $[0; +\infty[$ .
2. En déduire que pour tout  $x \geq 0$ ,  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ .

##### II. Deuxième partie

On se propose d'étudier la suite  $(u_n)$  de nombres réels définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

1. Montrer par récurrence que  $u_n > 0$  pour tout entier naturel  $n \geq 1$ .
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

3. On pose  $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$  et  $T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n}$ .  
À l'aide de la première partie, montrer que :

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n.$$

4. Calculer  $S_n$  et  $T_n$  en fonction de  $n$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$ .
5. Étude de la convergence de la suite  $(u_n)$ .

- a.** Montrer que la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.
- b.** En déduire que  $(u_n)$  est convergente. Soit  $\ell$  sa limite.
- c.** On admet le résultat suivant : si deux suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  sont convergentes et telles que  $v_n \leq w_n$  pour tout  $n$  entier naturel, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n.$$

Montrer alors que  $\frac{5}{6} \leq \ln \ell \leq 1$  et en déduire, un encadrement de  $\ell$ .

## ⌘ Baccalauréat S Métropole juin 2005 ⌘

### EXERCICE 1

4 points

#### Commun à tous les candidats

*Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.*

#### Partie A : question de cours

On suppose connus les résultats suivants :

- (1) deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et  $u_n - v_n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ;
- (2) si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites adjacentes telles que  $(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  est décroissante, alors pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$ , on a  $u_n \leq v_n$  ;
- (3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

#### Partie B

On considère une suite  $(u_n)$ , définie sur  $\mathbb{N}$  dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite  $(v_n)$  sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = \frac{-2}{u_n}$ .

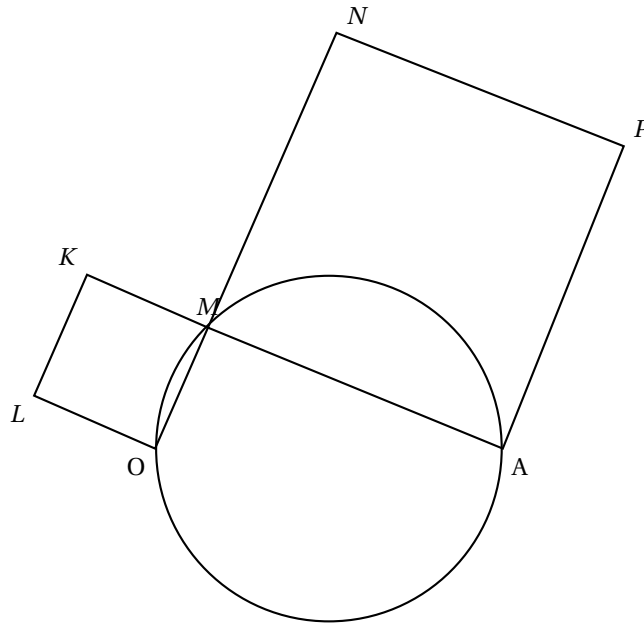
Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si  $(u_n)$  est convergente, alors  $(v_n)$  est convergente.
2. Si  $(u_n)$  est minorée par 2, alors  $(v_n)$  est minorée par  $-1$ .
3. Si  $(u_n)$  est décroissante, alors  $(v_n)$  est croissante.
4. Si  $(u_n)$  est divergente, alors  $(v_n)$  converge vers zéro.

## EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Dans le plan orienté, on considère les points  $O$  et  $A$  fixés et distincts, le cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[OA]$ , un point  $M$  variable appartenant au cercle  $\mathcal{C}$ , et distinct des points  $O$  et  $A$ , ainsi que les carrés de sens direct  $MAPN$  et  $MKLO$ . La figure est représentée ci-dessus.

Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de montrer que le point  $N$  appartient à un cercle à déterminer.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points  $O$  et  $A$  soient respectivement  $0$  et  $1$ .

On désigne par  $i$  le nombre complexe de module  $1$  et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ . On note  $k, l, m, n$  et  $p$  les affixes respectives des points  $K, L, M, N$  et  $P$ .

1. Démontrer que, quel que soit le point  $M$  choisi sur le cercle  $\mathcal{C}$ , on a

$$\left| m - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

2. Établir les relations suivantes :  $l = im$  et  $p = -im + 1 + i$ . On admettra que l'on a également  $n = (1 - i)m + i$  et  $k = (1 + i)m$ .
3. **a.** Démontrer que le milieu  $\Omega$  du segment  $[PL]$  est un point indépendant de la position du point  $M$  sur le cercle  $\mathcal{C}$ .
- b.** Démontrer que le point  $\Omega$  appartient au cercle  $\mathcal{C}$  et préciser sa position sur ce cercle.
4. **a.** Calculer la distance  $KN$  et démontrer que cette distance est constante.
- b.** Quelle est la nature du triangle  $\Omega NK$  ?
5. Démontrer que le point  $N$  appartient à un cercle fixe, indépendant du point  $M$ , dont on déterminera le centre et le rayon.

**EXERCICE 2****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de la figure donnée en annexe. Cette annexe sera à rendre avec la copie.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Le quadrilatère MNPQ est un quadrilatère non croisé et de sens direct. Les triangles MRN, NSP, PTQ et QUM sont des triangles rectangles isocèles, extérieurs au quadrilatère MNPQ et de sens direct (les sommets des angles droits étant respectivement les points R, S, T et U).

**Partie A**

On désigne par  $m$ ,  $n$ ,  $p$  et  $q$ , les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1. Soit  $f$  la similitude directe de centre M qui transforme N en R.
  - a. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude  $f$ .
  - b. On désigne par  $r$  l'affixe du point R. Démontrer que
 
$$r = \frac{1+i}{2}m + \frac{1-i}{2}n$$
, où  $i$  désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$  (on pourra éventuellement utiliser l'écriture complexe de la similitude  $f$ ).  
 On admettra que l'on a également les résultats
 
$$s = \frac{1+i}{2}n + \frac{1-i}{2}p, \quad t = \frac{1+i}{2}p + \frac{1-i}{2}q \text{ et } u = \frac{1+i}{2}q + \frac{1-i}{2}m$$
, où  $s$ ,  $t$  et  $u$  désignent les affixes respectives des points S, T et U.
2. Démontrer que les quadruplets (M, N, P, Q) et (R, S, T, U) ont le même isobarycentre.
3.
  - a. Démontrer l'égalité  $u - s = i(t - r)$ .
  - b. Que peut-on en déduire pour les longueurs des segments [RT] et [SU], d'une part, et pour les droites (RT) et (SU), d'autre part?

**Partie B**

Cette partie sera traitée sans utilisation des nombres complexes.

1. Démontrer, en utilisant les résultats établis dans la **partie A**, qu'il existe une unique rotation  $g$  qui transforme R en S et T en U.
2. Décrire comment construire géométriquement le point  $\Omega$ , centre de la rotation  $g$ . Réaliser cette construction sur la figure de l'annexe.

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats**

Pour les questions 1 et 2, on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à  $10^{-3}$  près.

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1. Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.
  - a. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
  - b. Calculer l'espérance mathématique de  $X$ .

2. Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie. On considère les événements suivants :
- C1 : « L'enfant choisit la boîte cubique »,  
 C2 : « L'enfant choisit la boîte cylindrique »,  
 R : « L'enfant prend une bille rouge »,  
 V : « L'enfant prend une bille verte ».
- Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.
  - Calculer la probabilité de l'évènement R.
  - Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?
3. L'enfant reproduit  $n$  fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.
- Exprimer, en fonction de  $n$ , la probabilité  $p_n$  que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses  $n$  choix.
  - Calculer la plus petite valeur de  $n$  pour laquelle  $p_n \geq 0,99$ .

**EXERCICE 4****6 points****Commun à tous les candidats****Partie A**Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}.$$

- Démontrer que  $f(x) = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}}$ .
- Étudier les limites de la fonction  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- Étudier les variations de la fonction  $f$ .

**Partie B**

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps  $t$ , est notée  $g(t)$ . On définit ainsi une fonction  $g$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ . La variable réelle  $t$  désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour  $g(t)$  est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour  $g$  une solution, sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , de l'équation différentielle

$$(E_1) y' = \frac{y}{4}.$$

- Résoudre l'équation différentielle  $(E_1)$ .
- Déterminer l'expression de  $g(t)$  lorsque, à la date  $t = 0$ , la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire  $g(0) = 1$ .
- Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?



2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note  $u(t)$  le nombre des rongeurs vivants au temps  $t$  (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction  $u$ , ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) \begin{cases} u'(t) &= \frac{u(t)}{4} - \frac{[u(t)]^2}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) &= 1. \end{cases}$$

où  $u'$  désigne la fonction dérivée de la fonction  $u$ .

- a. On suppose que, pour tout réel positif  $t$ , on a  $u(t) > 0$ . On considère, sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , la fonction  $h$  définie par  $h = \frac{1}{u}$ . Démontrer que la fonction  $u$  satisfait aux conditions  $(E_2)$  si et seulement si la fonction  $h$  satisfait aux conditions

$$(E_3) \begin{cases} h'(t) &= -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) &= 1. \end{cases}$$

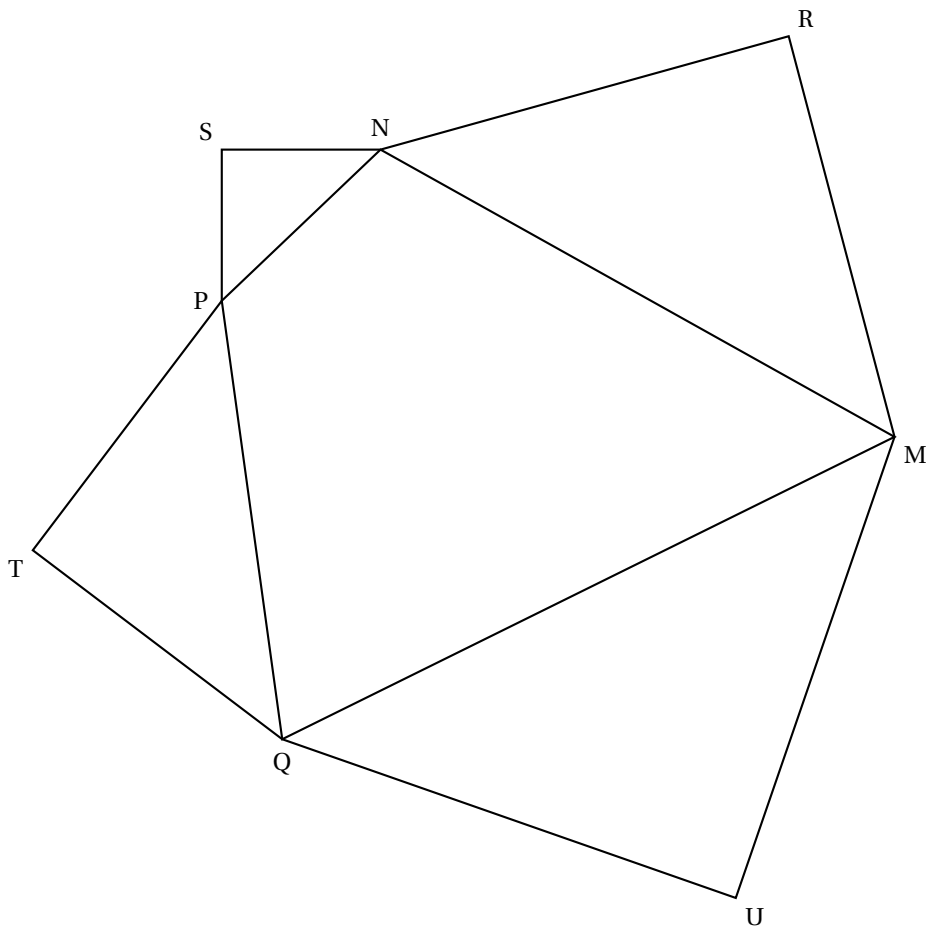
où  $h'$  désigne la fonction dérivée de la fonction  $h$ .

- b. Donner les solutions de l'équation différentielle  $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$  et en déduire l'expression de la fonction  $h$ , puis celle de la fonction  $u$ .
- c. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ ?

ANNEXE

À rendre avec la copie

Figure de l'exercice 2 de spécialité



❧ Baccalauréat S La Réunion juin 2005 ❧

**EXERCICE 1**

**4 points**

**Commun à tous les candidats**

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes et sont notées sur un point chacune.

Pour chaque question, il y a exactement deux propositions correctes. Le candidat doit indiquer sur sa copie les deux propositions vraies. Aucune justification n'est demandée.

Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point, chaque réponse fausse enlève 0,25 point. Donner trois propositions ou plus d'une question, ou bien n'en donner aucune, ne rapporte aucun point.

Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

1. Les suites suivantes sont convergentes :

a.  $\left(\frac{2^n}{n^{2005}}\right)_{n>0}$     b.  $\left(\frac{2n + (-1)^n \sqrt{n}}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$     c.  $\left(n \sin \frac{1}{n}\right)_{n>0}$     d.  $\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)_{n>1}$

2. On considère trois suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  ayant, pour tout entier naturel  $n$ , les propriétés suivantes :  $u_n \leq v_n \leq w_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n) = 1$ .

Alors :

- a.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = 0$ .
- b. La suite  $(u_n)$  est minorée.
- c. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $-1 \leq v_n \leq 1$ .
- d. On ne sait pas dire si la suite  $(v_n)$  a une limite ou non.

3. Une suite  $(u_n)$  est définie sur  $\mathbb{N}$  par  $\begin{cases} u_0 &= 1,5 \\ u_{n+1} &= 2u_n - 1 \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$

- a. La suite  $(u_n)$  converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations  $y = x$  et  $y = 2x - 1$ .
- b. La suite  $(v_n)$ , définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = u_n - 1$ , est géométrique.
- c. La suite  $(v_n)$  est majorée.
- d. La suite  $(w_n)$ , définie sur  $\mathbb{N}$  par  $w_n = \ln(u_n - 1)$ , est arithmétique.

4. Deux suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  sont définies pour  $n > 0$  par les relations :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \text{ et } y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

- a. Les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  sont toutes les deux croissantes.
- b.  $x_3 = \frac{19}{20}$  et  $y_3 = \frac{37}{60}$ .
- c. Les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  ne sont pas majorées.
- d. Les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  sont adjacentes.

**EXERCICE 2**

**5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

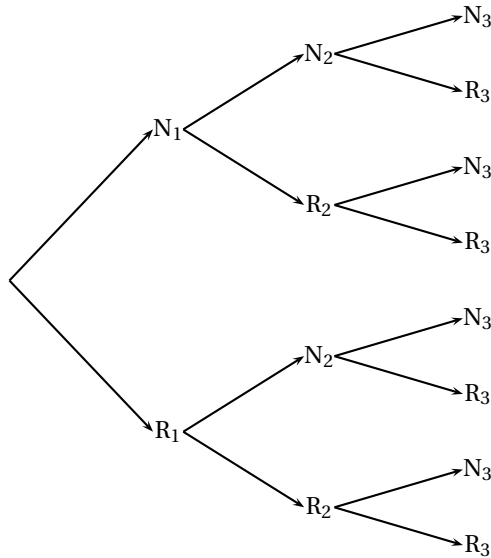
On considère trois urnes  $U_1$ ,  $U_2$ , et  $U_3$ .

L'urne  $U_1$  contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne  $U_2$  contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne  $U_3$  contient trois boules noires et quatre boules rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de  $U_1$  et une boule de  $U_2$ , à les mettre dans  $U_3$ , puis à tirer au hasard une boule de  $U_3$ .

Pour  $i$  prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par  $N_i$ , (respectivement  $R_i$ ) l'évènement « on tire une boule noire de l'urne  $U_i$  » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne  $U_i$  »).

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2.
  - a. Calculer la probabilité des évènements  $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ , et  $N_1 \cap R_2 \cap N_3$ .
  - b. En déduire la probabilité de l'évènement  $N_1 \cap N_3$ .
  - c. Calculer de façon analogue la probabilité de l'évènement  $R_1 \cap N_3$ .
3. Déduire de la question précédente la probabilité de l'évènement  $N_3$ .
4. Les évènements  $N_1$  et  $N_3$  sont-ils indépendants ?
5. Sachant que la boule tirée dans  $U_3$  est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de  $U_1$  soit rouge ?

## EXERCICE 2

5 points

### Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :

« Étant donnés deux entiers naturels  $a$  et  $b$  non nuls, si  $\text{PGCD}(a; b) = 1$  alors  $\text{PGCD}(a^2; b^2) = 1$  ».

Une suite  $(S_n)$  est définie pour  $n > 0$  par  $S_n = \sum_{p=1}^n p^3$ . On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul  $n$ , le plus grand commun diviseur de  $S_n$  et  $S_{n+1}$ .

1. Démontrer que, pour tout  $n > 0$ , on a :  $S_n = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$ .
2. Étude du cas où  $n$  est pair. Soit  $k$  l'entier naturel non nul tel que  $n = 2k$ .
  - a. Démontrer que  $\text{PGCD}(S_{2k}; S_{2k+1}) = (2k+1)^2 \text{PGCD}(k^2; (k+1)^2)$ .
  - b. Calculer  $\text{PGCD}(k; k+1)$ .
  - c. Calculer  $\text{PGCD}(S_{2k}; S_{2k+1})$ .
3. Étude du cas où  $n$  est impair. Soit  $k$  l'entier naturel non nul tel que  $n = 2k+1$ .
  - a. Démontrer que les entiers  $2k+1$  et  $2k+3$  sont premiers entre eux.

- b. Calculer  $\text{PGCD}(S_{2k+1}; S_{2k+2})$ .
4. Dédire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de  $n$ , que l'on déterminera, pour laquelle  $S_n$  et  $S_{n+1}$  sont premiers entre eux.

**EXERCICE 3****4 points****Commun à tous les candidats**

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  vérifiant la condition :

$$(C) \quad \begin{cases} f(-x)f'(x) & = & 1 \text{ pour tout nombre réel } x, \\ f(0) & = & -4 \end{cases}$$

(où  $f'$  désigne la fonction dérivée de la fonction  $f$ ) et de trouver cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction  $f$  satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = f(-x)f(x)$ .
  - a. Démontrer que la fonction  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .
  - b. Calculer la fonction dérivée de la fonction  $g$ .
  - c. En déduire que la fonction  $g$  est constante et déterminer sa valeur.
  - d. On considère l'équation différentielle (E)  $y' = \frac{1}{16}y$ . Montrer que la fonction  $f$  est solution de cette équation et qu'elle vérifie  $f(0) = -4$ .
2. **Question de cours**
  - a. On sait que la fonction  $x \mapsto e^{\frac{x}{16}}$  est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur  $\mathbb{R}$ , de la forme  $x \mapsto Ke^{\frac{x}{16}}$ , où  $K$  est un nombre réel quelconque
  - b. Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur  $-4$  en 0.
3. Dédire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.

**EXERCICE 4****4 points****Commun à tous les candidats**

On appelle hauteur d'un tétraèdre toute droite contenant l'un des sommets de ce tétraèdre et perpendiculaire au plan de la face opposée à ce sommet.

Un tétraèdre est orthocentrique si ses quatre hauteurs sont concourantes.

**Partie A**

On considère un tétraèdre ABCD et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre ABCD issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD.

**Partie B**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on donne les points A(3 ; 2 ; -1), B(-6 ; 1 ; 1), C(4 ; -3 ; 3) et D(-1 ; -5 ; -1).

1.
  - a. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est :  $-2x - 3y + 4z - 13 = 0$ .
  - b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

- c. Calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD}$ .
  - d. Le tétraèdre ABCD est-il orthocentrique ?
2. On définit les points I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0), K(0 ; 0 ; 1). Le tétraèdre OIJK est-il orthocentrique ?

**EXERCICE 5****3 points****Commun à tous les candidats**

*L'exercice comporte une annexe à rendre avec la copie.*

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies, sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ , par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = e^x - 1.$$

On désigne par  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Ces courbes sont tracées sur la feuille annexe, dont le candidat disposera comme il le jugera utile ; cette annexe sera à joindre à la copie, avec les éventuels ajouts effectués par le candidat,

1. Vérifier que les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  ont une tangente commune au point  $O(0 ; 0)$ . Préciser la position de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à cette tangente.
2. Démontrer que les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .
3. Soit  $a$  un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer de deux façons différentes le nombre  $I(a) = \int_0^a \ln(x+1) dx$ .
  - a. En utilisant des considérations d'aires, démontrer que

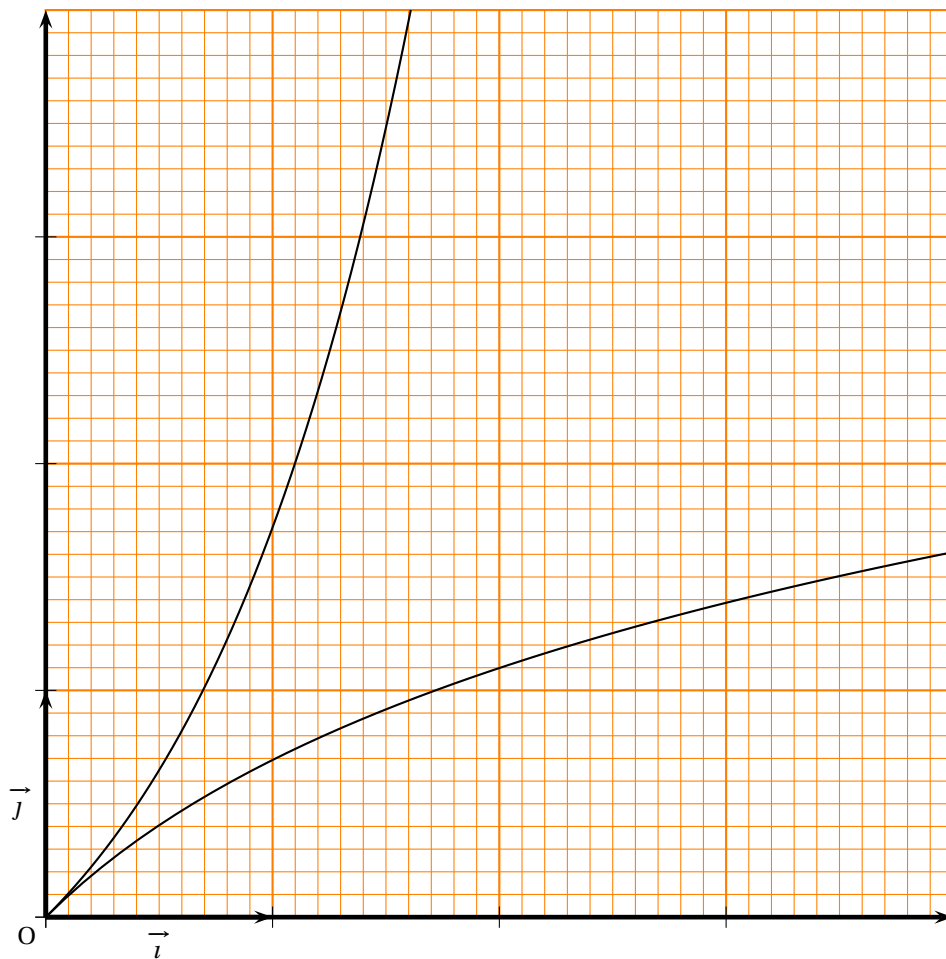
$$I(a) = a \ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1) dx.$$

- b. En déduire la valeur de  $I(a)$ .
- c. Retrouver la valeur de  $I(a)$  en effectuant une intégration par parties.

ANNEXE

À rendre avec la copie

Courbes de l'exercice 5



Durée : 4 heures

## Baccalauréat S Liban juin 2005

### EXERCICE 1

4 points

#### Commun tous les candidats

Pour chacune des huit affirmations (entre guillemets) ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.

**Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention « vrai » ou « faux ».**

*Une réponse correcte rapporte 0,5 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points.*

*Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.*

1. « Si  $a$  est un nombre réel quelconque et  $f$  une fonction définie et strictement décroissante sur  $[a; +\infty[$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ . »
2. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $[0; +\infty[$ ,  $g$  ne s'annulant pas :  
« Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$ . »
3. « Si  $f$  est une fonction définie sur  $[0; +\infty[$  telle que  $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$  sur  $[0; +\infty[$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ . »
4. On considère un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.  
« Si  $f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  alors la droite d'équation  $x = 0$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . »
5. « La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^x$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y' - y = (2x + 3)e^x$ . »
6. Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et  $-2$ .  
« Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3,  $-2$  et 1 alors G est le milieu du segment [CI]. »
7. Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3,  $-2$  et 1.  
« L'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\|\overrightarrow{3MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 1$  est le cercle de centre G et de rayon 1 ». »
8. Soient A et B deux points distincts du plan. On désigne par  $M$  un point quelconque du plan.  
« Le produit scalaire  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$  est nul si et seulement si  $M = A$  ou  $M = B$ . »

### EXERCICE 2

3 points

Un fabricant d'écrans plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication.

Si le test est positif (c'est-à-dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client. Sinon l'écran retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'écran est acheminé chez le client, sinon il est détruit.



Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70% des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les écrans réparés, seulement 65% d'entre eux passent le second test avec succès.

On note  $T_1$  l'évènement : « le premier test est positif ».

On note  $C$  l'évènement : « l'écran est acheminé chez le client ».

1. On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication.  
Déterminer les probabilités des évènements  $T_1$ , et  $C$ .
2. La fabrication d'un écran revient à 1 000 € au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois.  
Cela lui coûte 50 € de plus si l'écran doit être testé une seconde fois.  
Un écran est facturé  $a$  euros ( $a$  étant un réel positif) au client.  
On introduit la variable aléatoire  $X$  qui, à chaque écran fabriqué, associe le « gain » (éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.
  - a. Déterminer la loi de probabilité de  $X$  en fonction de  $a$ .
  - b. Exprimer l'espérance de  $X$  en fonction de  $a$ .
  - c. À partir de quelle valeur de  $a$ , l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices?

### EXERCICE 3

8 points

#### Partie A

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

1. Montrer que la fonction  $f : t \mapsto (2-t)e^t$  est une primitive de  $g : t \mapsto (1-t)e^t$  sur  $[0 ; 1]$ .  
En déduire la valeur de  $u_1$ .
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout  $n$  non nul,

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad (\text{R})$$

#### Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite  $(u_n)$  en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de $n$	Valeur de $u_n$ affichée par la première calculatrice	Valeur de $u_n$ affichée par la deuxième calculatrice
1	7,182 818 284 5E-01	7,182 818 284 6E-01
2	4,365 636 569 1E-01	4,365 636 569 2E-01
3	3,096 909 707 5E-01	3,096 909 707 6E-01
4	2,387 638 830 1E-01	2,387 638 830 4E-01
5	1,938 194 150 8E-01	1,938 194 152 0E-01
6	1,629 164 905 1E-01	1,629 164 912 0E-01
7	1,404 154 335 81E-01	1,404 154 384 0E-01
8	1,233 234 686 9E-01	1,233 235 072 0E-01
9	1,099 112 182 8E-01	1,099 115 648 0E-01
10	9,911 218 282 5E-02	9,911 564 800 0E-01
11	9,023 401 108 0E-02	9,027 212 800 0E-02
12	8,280 813 296 3E-02	8,326 553 600 0E-02
13	7,650 572 852 2E-02	8,245 196 800 0E-02
14	7,108 019 930 9E-02	1,543 275 520 0E-01
15	6,620 298 963 6E-02	1,314 913 280 06E+00
16	5,924 783 418 6E-02	2,003 861 248 0E+01
17	7,213 181 161 2E-03	3,396 564 121 6E+02
18	-8,701 627 390 9E-01	6,112 815 418 9E+03
19	-1,753 309 204 2E+01	1,161 424 929 6E+05
20	-3,516 618 408 5E+02	2,322 848 859 2E+06
21	-7,385 898 658 0E+03	4,877 982 504 3E+07
22	-1,624 907 704 7E+05	1,073 156 149 9E+09
23	-3,737 288 720 9E+06	2,468 259 144 8E+10
24	-8,969 493 030 2E+07	5,923 821 947E+11
25	-2,242 372 585E+09	1,480 955 486 9E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite  $(u_n)$  quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

### Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite  $(u_n)$  à partir de la définition :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n \geq 0$ .
2. a. Montrer que pour tout réel  $t$  de l'intervalle  $[0; 1]$  et pour tout entier naturel non nul  $n$

$$(1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n.$$

- b. En déduire que pour tout  $n$  non nul,  $u_n \leq \frac{e}{n+1}$ .

3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

### Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite  $(u_n)$ .

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

Étant donné un réel  $a$ , on considère la suite  $(v_n)$  définie par :

$$v_1 = a \text{ et pour tout entier naturel non nul } n, v_{n+1} = (n+1)v_n - 1.$$

1. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$  où  $n!$  désigne le produit des  $n$  premiers entiers naturels non nuls.
2. Étudier le comportement de la suite  $(v_n)$  à l'infini suivant les valeurs de  $a$ .  
(On rappelle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$ .)
3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

**EXERCICE 4****5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Unité graphique : 0,5 cm.

On note  $j$  le nombre complexe  $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a = 8$ ,  $b = 6j$  et  $c = 8j^2$ .

Soit  $A'$  l'image de  $B$  par la rotation de centre  $C$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

Soit  $B'$  l'image de  $C$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

Soit  $C'$  l'image de  $A$  par la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

1. Placer les points  $A, B, C, A', B'$  et  $C'$  dans le repère donné.
2. On appelle  $a', b'$  et  $c'$  les affixes respectives des points  $A', B'$  et  $C'$ .
  - a. Calculer  $a'$ . On vérifiera que  $a'$  est un nombre réel.
  - b. Montrer que  $b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .  
En déduire que  $O$  est un point de la droite  $BB'$ .
  - c. On admet que  $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$ .  
Montrer que les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes en  $O$ .
3. On se propose désormais de montrer que la distance  $MA + MB + MC$  est minimale lorsque  $M = O$ .
  - a. Calculer la distance  $OA + OB + OC$ .
  - b. Montrer que  $j^3 = 1$  et que  $1 + j + j^2 = 0$ .
  - c. On considère un point  $M$  quelconque d'affixe  $z$  du plan complexe.  
On rappelle que  $a = 8$ ,  $b = 6j$  et  $c = 8j^2$ .  
Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = |a + bj^2 + cj| = 22.$$

- d. On admet que, quels que soient les nombres complexes  $z, z'$  et  $z''$  :

$$|z + z' + z''| \leq |z| + |z'| + |z''|.$$

Montrer que  $MA + MB + MC$  est minimale lorsque  $M = O$ .

**EXERCICE 4**  
**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**5 points**

1. On considère l'équation (E) :

$$109x - 226y = 1$$

où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

**a.** Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

**b.** Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme  $(141 + 226k, 68 + 109k)$ , où  $k$  appartient à  $\mathbb{Z}$ .

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul  $d$  inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul  $e$  tels que  $109d = 1 + 226e$ . (On précisera les valeurs des entiers  $d$  et  $e$ .)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note  $A$  l'ensemble des 227 entiers naturels  $a$  tels que  $a \leq 226$ .

On considère les deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $A$  dans  $A$  définies de la manière suivante :

– à tout entier de  $A$ ,  $f$  associe le reste de la division euclidienne de  $a^{109}$  par 227.

– à tout entier de  $A$ ,  $g$  associe le reste de la division euclidienne de  $a^{141}$  par 227.

**a.** Vérifier que  $g[f(0)] = 0$ .

*On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :*

**Si  $p$  est un nombre premier et  $a$  un entier non divisible par  $p$  alors  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .**

**b.** Montrer que, quel que soit l'entier non nul  $a$  de  $A$ ,  $a^{226} \equiv 1 \pmod{227}$ .

**c.** En utilisant **1. b.**, en déduire que, quel que soit l'entier non nul  $a$  de  $A$ ,  $g[f(a)] = a$ .

Que peut-on dire de  $f[g(a)] = a$  ?

## Baccalauréat S Polynésie 9 juin 2005

### Exercice 1

3 points

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres.

Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par  $a$  et  $b$ .

2 % des montres fabriquées présentent le défaut  $a$  et 10 % le défaut  $b$ .

Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les événements suivants :

A : « la montre tirée présente le défaut  $a$  » ;

B : « la montre tirée présente le défaut  $b$  » ;

C : « la montre tirée ne présente aucun des deux défauts » ;

D : « la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».

On suppose que les événements A et B sont indépendants.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,882.
2. Calculer la probabilité de l'évènement D.
3. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres. On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants. Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts  $a$  et  $b$ . On définit l'évènement E : « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ». Calculer la probabilité de l'évènement E. On en donnera une valeur approchée à  $10^{-3}$  près.

### Exercice 2

5 points

#### Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des cinq questions, une seule des trois propositions est exacte.

**Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.**

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points A(3 ; 1 ; 3) et B(-6 ; 2 ; 1).

Le plan  $\mathcal{P}$  admet pour équation cartésienne  $x + 2y + 2z = 5$ .

1. L'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\|4\vec{MA} - \vec{MB}\| = 2$  est :
  - a. un plan de l'espace
  - b. une sphère
  - c. l'ensemble vide.
2. Les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan  $\mathcal{P}$  sont :
  - a.  $\left(\frac{11}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$
  - b.  $\left(\frac{8}{3}; \frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$
  - c.  $\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$ .
3. La sphère de centre B et de rayon 1 :
  - a. coupe le plan  $\mathcal{P}$  suivant un cercle ;
  - b. est tangente au plan  $\mathcal{P}$  ;
  - c. ne coupe pas le plan  $\mathcal{P}$ .
4. On considère la droite  $\mathcal{D}$  de l'espace passant par A et de vecteur directeur  $\vec{u}(1; 2; -1)$  et la droite  $\mathcal{D}'$  d'équations paramétriques 
$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont :

- a. coplanaires et parallèles
- b. coplanaires et sécantes
- c. non coplanaires.

5. L'ensemble des points  $M$  de l'espace équidistants des points A et B est :

$$\text{a. la droite d'équations paramétriques } \begin{cases} x = -\frac{3}{2} - t \\ y = \frac{3}{2} - 7t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

b. le plan d'équation cartésienne  $9x - y + 2z + 11 = 0$ .

c. le plan d'équation cartésienne  $x + 7y - z - 7 = 0$ .

### Exercice 2

5 points

#### Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite  $(u_n)$  d'entiers naturels définie par

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n$$

1. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ .

Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de  $u_n$  ?

2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$ .

En déduire que pour tout entier naturel  $k$ ,  $u_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$  et  $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$ .

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2u_n = 5^{n+2} + 3$ .

b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2u_n \equiv 28 \pmod{100}$ .

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de  $u_n$  suivant les valeurs de  $n$ .

5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite  $(u_n)$  est constant. Préciser sa valeur.

### Exercice 3

7 points

La page annexe sera à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve.

#### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = x + \ln x.$$

On nomme  $\Gamma$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

1. a. Déterminer les limites de la fonction  $f$  aux bornes de son intervalle de définition.

b. Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , l'équation  $f(x) = n$  admet une unique solution dans  $]0; +\infty[$ .

On note  $\alpha_n$  cette solution. On a donc : pour tout entier naturel  $n$ ,  $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$ .

b. Sur la page annexe, on a tracé  $\Gamma$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Placer les nombres  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$  et  $\alpha_5$  sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

- c. Préciser la valeur de  $\alpha_1$ .
- d. Démontrer que la suite  $(\alpha_n)$  est strictement croissante.
3. a. Déterminer une équation de la tangente  $\Delta$  à la courbe  $\Gamma$  au point A d'abscisse 1.
- b. Étudier les variations de la fonction  $h$  définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$h(x) = \ln x - x + 1.$$

En déduire la position de la courbe  $\Gamma$  par rapport à  $\Delta$ .

- c. Tracer  $\Delta$  sur le graphique de la page annexe. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $\frac{n+1}{2} \leq \alpha_n$ .
4. Déterminer la limite de la suite  $(\alpha_n)$ .

### Partie B

On considère une fonction  $g$  continue, strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  et telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

On admet que l'on peut, comme on l'a fait dans la **partie A**, définir sur  $\mathbb{N}$  une suite  $(\beta_n)$  de réels tels que  $g(\beta_n) = n$ , et que cette suite est strictement croissante.

1. Démonstration de cours :

*Prérequis : définition d'une suite tendant vers  $+\infty$ .*

« Une suite tend vers  $+\infty$  si, pour tout réel  $A$ , tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à  $A$  ».

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers  $+\infty$ .

2. Montrer que la suite  $(\beta_n)$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 4

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Unité graphique : 2 cm.

1. On rappelle que, pour tous nombres complexes  $a$  et  $b$ ,
- $$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation  $z^3 = 8$ .

2. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives  $a$ ,  $b$  et  $c$  définies par :

$$a = 2, \quad b = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad c = -1 - i\sqrt{3}.$$

On appelle  $r$  la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et  $r'$  la rotation de centre A et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

On pose  $B' = r'(B)$  et  $C' = r(C)$  et on note  $b'$  et  $c'$  les affixes respectives de  $B'$  et  $C'$ .

- a. Placer les points A, B et C dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .  
*Dans la suite de l'exercice, on complètera cette figure.*
- b. Montrer que  $b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$ .
- c. Montrer que  $b'$  et  $c'$  sont des nombres conjugués.
3. On appelle M, N, P et Q les milieux respectifs des segments  $[CB]$ ,  $[BB']$ ,  $[B'C']$  et  $[C'C]$ . On note  $m$ ,  $n$ ,  $p$  et  $q$  leurs affixes.

- a. Montrer que l'affixe  $n$  du point N est égale à  $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3})$ .

En déduire que les points O, N et C sont alignés,

- b. Montrer que  $n + 1 = i(q + 1)$ . Que peut-on en déduire pour le triangle MNQ?

- c. Montrer que le quadrilatère MNPQ est un carré.

**Page annexe**

*Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve*

**Exercice 3**