Baccalauréat S 2008

L'intégrale de septembre 2007 à juin 2008

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Antilles–Guyane septembre 2007 3
France et Réunion septembre 2007 8
Polynésie obligatoire septembre 2007 13
Amérique du Sud novembre 2007 18
Nouvelle-Calédonie novembre 2007 21
Nouvelle-Calédonie mars 2008 26
Pondichéry avril 2008 30
Liban mai 2008 35
Amérique du Nord mai 2008 40
Antilles-Guyane juin 2008 44
Asie juin 2008 49
Centres étrangers juin 2008 55
France juin 2008 59
La Réunion juin 2008 63
Polynésie juin 2008 67

Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2007

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une urne contient 15 boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche, ou rouge.
On sait de plus qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne.
On tire au hasard simultanément 2 boules dans l'urne et on note leur couleur.
Soit l'évènement G : « obtenir deux boules de même couleur ».

Partie A

On suppose que l'urne contient 3 boules noires et 7 boules banches.
Calculer la probabilité de l'évènement G.

Partie B

On note n, b et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.

1. On note $g(n,\ b,\ r)$ la probabilité en fonction de n, b et r de l'évènement G.

   Démontrer que $g(n,\ b,\ r) = \dfrac{1}{210}[n(n-1)+b(b-1)+r(r-1)]$.

2. Le but de cette question est de déterminer n, b et r afin que la probabilité $g(n,\ b,\ r)$ soit minimale.

   L'espace est muni d'un repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ orthonormal.

   Soient les points N, B et R de coordonnées respectives $(15\,;\,0\,;\,0)$, $(0\,;\,15\,;\,0)$ et $(0\,;\,0\,;\,15)$ et soit M le point de coordonnées $(n,\ b,\ r)$. On pourra se rapporter à la figure ci-dessous.

   a. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (NBR) est $x+y+z-15=0$.

   b. En déduire que le point M est un point du plan (NBR).

   c. Démontrer que $g(n,\ b,\ r) = \dfrac{1}{210}\left(\text{O}M^2-15\right)$.

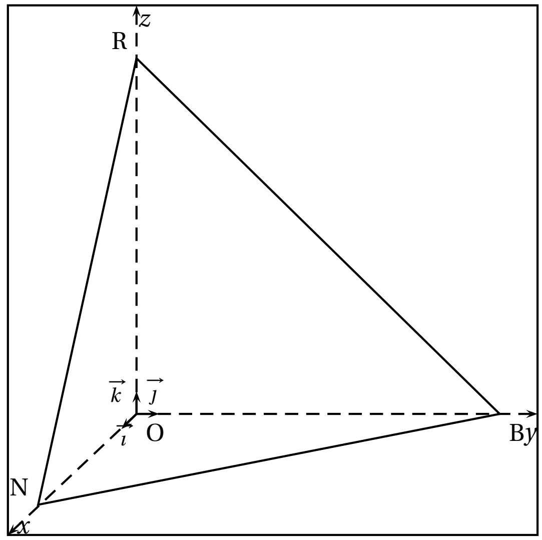
   d. Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR). Déterminer les coordonnées du point H.

   e. En déduire tes valeurs de n, b et r afin que la probabilité $g(n,\ b,\ r)$ soit minimale. Justifier que cette probabilité minimale est égale à $\dfrac{2}{7}$.

Partie C

On suppose que les nombres de boules de chaque couleur ont été choisis par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'évènement G soit $\dfrac{2}{7}$.
Un joueur mise x euros, avec x entier naturel non nul, puis tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. Dans tous les cas, il perd sa mise de départ.
S'il obtient deux boules de la même couleur, il reçoit k fois le montant de sa mise, avec k nombre décimal strictement supérieur à 1. Sinon, il ne reçoit rien.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Calculer l'espérance $\text{E}(X)$ de la variable X en fonction de x et de k.
2. Déterminer la valeur de k pour laquelle le jeu est équitable.



EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Déterminer le nombre complexe α tel que $\begin{cases} \alpha(1+\mathrm{i}) & = & 1+3\mathrm{i} \\ \mathrm{i}\alpha^2 & = & -4+3\mathrm{i} \end{cases}$

2. Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = z^2 - (1+3\mathrm{i})z + (-4+3\mathrm{i})$.
Montrer que $f(z)$ s'écrit sous la forme $(z-\alpha)(z-\mathrm{i}\alpha)$.
En déduire les solutions sous forme algébrique de l'équation $f(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, unité graphique : 5 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2+\mathrm{i}$ et $b = -1+2\mathrm{i}$.
Placer A et B dans le repère et compléter la figure au fur et à mesure.
Montrer que $b = \mathrm{i}\alpha$, en déduire que le triangle OAB est un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

2. On considère le point C d'affixe $c = -1 + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point D tel que le triangle OCD soit un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
On pourra conjecturer l'affixe de D à l'aide de la figure pour traiter la question suivante.

3. Soit M le milieu de [CB]. On appelle $z_{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}$ et $z_{\overrightarrow{\mathrm{DA}}}$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$. Prouver que : $\dfrac{z_{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{DA}}}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

4. Donner une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{DA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.

5. Prouver que $\mathrm{OM} = \dfrac{1}{2}\mathrm{DA}$.

6. On appelle J, K et L les milieux respectifs des segments [CD], [DA] et [AB].
On admet que le quadrilatère JKLM est un parallélogramme. Démontrer que c'est un carré.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

ABC est un triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Soit t un nombre réel fixe et soient les points M, N et P, deux à deux distincts, définis par

$$\overrightarrow{\text{A}M} = t\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{B}N} = t\overrightarrow{\text{BC}} \text{ et } \overrightarrow{\text{C}P} = t\overrightarrow{\text{CA}}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence d'une unique similitude directe σ qui transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P, et d'en préciser les éléments caractéristiques.

On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ direct.

On note a, b, c, m, n et p, les affixes respectives des points A, B, C, M, N et P.

1. On rappelle que toute similitude conserve le barycentre.

a. Exprimer m, n et p en fonction de a, b, c et t.

b. En déduire que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.

Ou notera G ce centre de gravité.

c. On suppose que σ existe. Déterminer l'image de G par σ.

2. On considère la rotation r de centre G et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

a. Vérifier que M est le barycentre du système de points $\{\text{A}(1-t)\ ;\ \text{B}(t)\}$, et en déduire que $r(M) = N$.

On admet de même que $r(N) = P$ et $r(P) = M$.

b. Soit σ_1, la similitude directe de centre G de rapport $\dfrac{\text{G}M}{\text{GA}}$ et d'angle $\left(\overrightarrow{\text{GA}}, \overrightarrow{\text{G}M}\right)$.

Montrer qu'elle transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P.

c. Conclure sur l' existence et l'unicité de σ.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Question de cours

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soient u et v deux fonctions continues, dérivables sur I telles que u' et v' soient continues sur I.

Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ de I.

Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

On note f' la fonction dérivée de f.

On suppose que f' est continue sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

1. Utiliser la question de cours pour montrer que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - \int_0^1 x f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 (f(x) - f(1))\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On désigne par ln la fonction logarithme nepérien.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-2\ ;\ 2[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right).$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f sur l'intervalle $]-2\ ;\ 2[$ dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2\ ;\ 2[$ on a $f'(x) = \dfrac{4}{4-x^2}$.

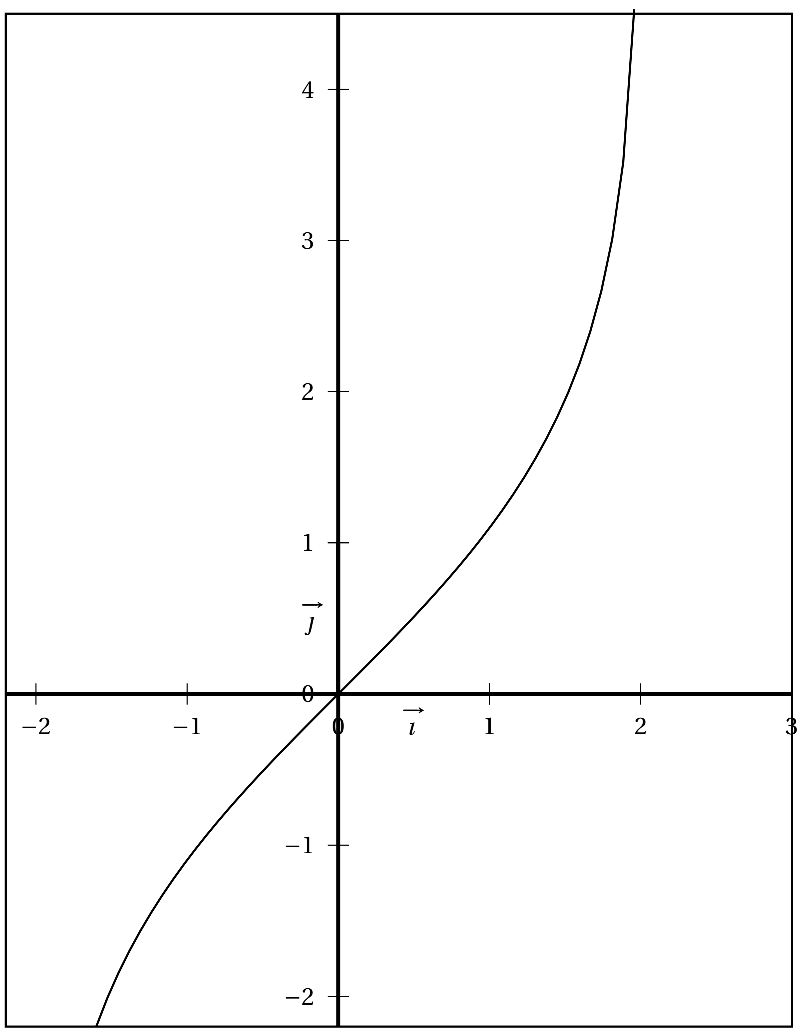
b. En déduire les variations de f sur l'intervalle $]-2\ ;\ 2[$.

Partie C

La courbe $\mathscr{C}$ est tracée sur la feuille annexe.
Hachurer sur cette feuille la partie $\mathscr{P}$ du plan constituée des points $M(x\ ;\ y)$ tels que

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant y \leqslant \ln 3.$$

En utilisant la partie A, calculer en cm^2 l'aire de $\mathscr{P}$.



EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit $v = (v_n)_{n \geqslant 0}$ une suite.
On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \mathrm{e}^{-v_n} + 1$.

Partie A

Pour chacune des questions, quatre propositions sont proposées dont une seule est exacte.
Pour chacune des questions donner, sans justification, la bonne réponse sur votre copie.
Une bonne réponse donne 0,75 *point, une mauvaise réponse enlève* 0,25 *point et l'absence de réponse est comptée* 0 *point.*
Tout total négatif est ramené à zéro.

1. a est un réel strictement positif et ln désigne la fonction logarithme népérien.
   Si $v_0 = \ln a$ alors :
   a. $u_0 = \dfrac{1}{a} + 1$ **b.** $u_0 = \dfrac{1}{1+a}$ **c.** $u_0 = -a + 1$ **d.** $u_0 = \mathrm{e}^{-a} + 1$
2. Si v est strictement croissante, alors :
   a. u est strictement décroissante et majorée par 2
   b. u est strictement croissante et minorée par 1
   c. u est strictement croissante et majorée par 2
   d. u est strictement décroissante et minorée par 1
3. Si v diverge vers $+\infty$, alors :
   a. u converge vers 2
   b. u diverge vers $+\infty$
   c. u converge vers 1
   d. u converge vers un réel ℓ tel que $\ell > 1$
4. Si v est majorée par 2, alors :
   a. u est majorée par $1 + \mathrm{e}^{-2}$
   b. u est minorée par $1 + \mathrm{e}^{-2}$
   c. u est majorée par $1 + \mathrm{e}^{2}$
   d. u est minorée par $1 + \mathrm{e}^{2}$

Partie B (1 point)
Démontrer que pour tout entier naturel non nul, on a $\ln(u_n) + v_n > 0$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Métropole & La Réunion septembre 2007

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les parties 1 et 2 portent sur un même thème, la dérivation, mais sont indépendantes.

1. **Restitution organisée de connaissances**

   La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si vraie ou fausse et justifier.

   Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

   – P : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$.

   – Q : Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$.

2. On désigne par g la fonction définie sur $]-1\ ;\ 1[$ par $g(0) = 0$ et $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $]-1\ ;\ 1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.

   On considère alors la fonction composée h définie sur $]-\pi\ ;\ 0[$ par

   $h(x) = g(\cos x)$.

   a. Démontrer que pour tout x de $]-\pi\ ;\ 0[$ on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h.

   b. Calculer $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ puis donner l'expression de $h(x)$.

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

1. La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$ pour tout entier naturel n.

   a. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan **en annexe**, la droite d'équation $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{23}{27}$ et le point A de coordonnées $(2\ ;\ 0)$. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.

   b. Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $\ell = \dfrac{23}{18}$.

   c. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geqslant \dfrac{23}{18}$.

   d. Étudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.

2. **a.** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :

   $$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \text{ c'est-à-dire que } \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

b. La suite v est définie par $v_n = 1,2777\cdots7$ avec n décimales consécutives égales à 7.

Ainsi $v_0 = 1,2,\ v_1 = 1,27$ et $v_2 = 1,277$.

En utilisant le **a** démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).

3. La suite u définie au **1** et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6},\ z_2 = 2 + 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Écrire Z sous forme algébrique.

2. Donner les modules et arguments de $z_1,\ z_2$ et Z.

3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

4. Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_1,\ z_2$ et Z. Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).

5. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007}.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

a. Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau figurant en annexe 2 l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1 \pmod{7}$.

b. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5 \pmod{7}$ équivaut à $x \equiv 4 \pmod{7}$.

c. Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0 \pmod{7}$ sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. On considère l'ensemble $A_p = \{l ; 2 ; \ldots ; p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p.

a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1 \pmod{p}$.

b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p, de l'équation $ax \equiv 1 \pmod{p}$.

c. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0 \pmod{p}$ si et seulement si x est un multiple de p où y est un multiple de p.

d. Application : $p = 31$. Résoudre dans A_{31} les équations : $2x \equiv 1 (\text{modulo} 31)$ et $3x \equiv 1 \quad (\text{modulo} 31)$. À l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{31}$.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$:

(E) : $y' + (1 + \tan x)y = \cos x$

(E_0) : $y' + y = 1$.

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).

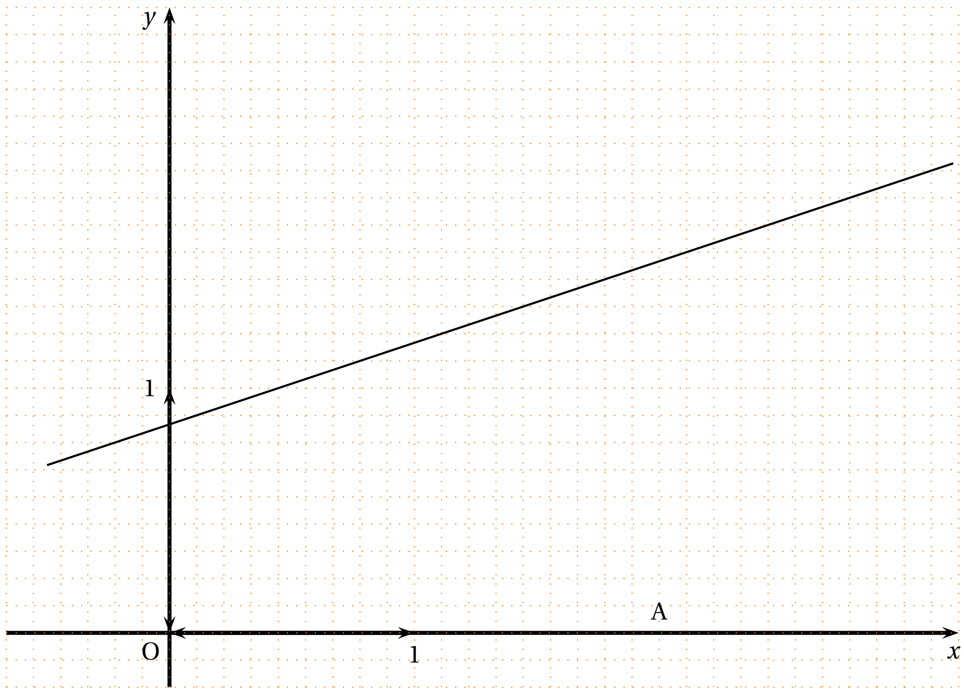
2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}~;~\dfrac{\pi}{2}\right[$ et telles que $f(x) = g(x)\cos x$.
Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0).

3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

ANNEXE 1

(À compléter et à rendre avec la copie)

Exercice 2



ANNEXE 1

(À compléter et à rendre avec la copie)

Exercice 3 (spécialité)

a	1	2	3	4	5	6
y						6

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Polynésie septembre 2007

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

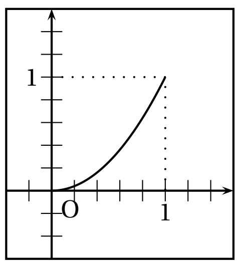
On désigne par (E) l'ensemble des fonctions f continues sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et vérifiant les conditions (P_1), (P_2) et (P_3) suivantes :

- (P_1) : f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.
- (P_2) : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
- (P_3) : pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) \leqslant x$.

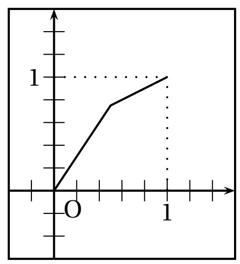
Dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan, on note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative d'une fonction f de l'ensemble (E) et (D) la droite d'équation $y = x$.

À toute fonction f de (E), on associe le nombre réel $I_f = \displaystyle\int_0^1 [x - f(x)]\,\text{d}x$.

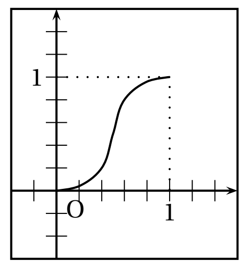
1. **a.** Une seule des trois courbes ci-dessous représente une fonction de (E). La déterminer en justifiant l'élimination des deux autres.



Courbe n° 1



Courbe n° 2



Courbe n° 3

b. Montrer que, pour toute fonction f de (E), $I_f \geqslant 0$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $h(x) = 2^x - 1$. (On rappelle que, pour tout x réel, $2^x = \text{e}^{x\ln 2}$).

a. Montrer que la fonction h vérifie les conditions (P_1) et (P_2).

b. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $\varphi(x) = 2^x - x - 1$.

Montrer que, pour tout x de $[0\,;\,1]$, $\varphi(x) \leqslant 0$. (On pourra étudier le sens de variation de la fonction φ sur $[0\,;\,1]$).

En déduire que la fonction h appartient à l'ensemble (E).

c. Montrer que le réel I_h associé à la fonction h est égal à $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\ln 2}$.

3. Soit P une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels tels que $0 < a < 1$. On se propose de déterminer les valeurs des réels a, b et c pour que la fonction P appartienne à l'ensemble (E) et que $I_p = I_h$.

a. Montrer que la fonction P vérifie la propriété (P_2) si et seulement si, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $P(x) = ax^2 + (1 - a)x$.

Montrer que toute fonction P définie sur $[0\,;\,1]$ par $P(x) = ax^2 + (1 - a)x$ avec $0 < a < 1$ appartient à (E).

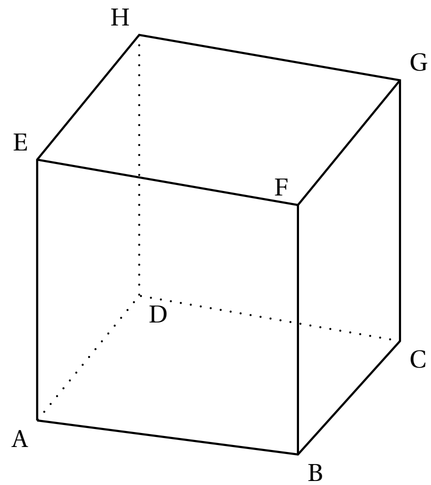
b. Exprimer en fonction de a le réel I_P associé à la fonction P.

c. Montrer qu'il existe une valeur du réel a pour laquelle $I_P = I_h$. Quelle est cette valeur ?

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 3.



On choisit le repère orthonormal $\left(D\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ tel que $\vec{\imath} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\vec{k} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.

1. **a.** Donner les coordonnées des points A, C et E.

b. Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système $\{(C\,;\,2),\ (E\,;\,1)\}$.

c. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$.

2. Soit $(a,\ b)$ un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AE}$ et N le point de la droite (DL) tel que $\overrightarrow{DN} = b\overrightarrow{DL}$.

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ si et seulement si le couple $(a,\ b)$ vérifie le système $\left\{\begin{array}{rcl} -a+2b & = & 1 \\ 3a-b & = & 0 \end{array}\right.$

b. En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

c. Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes :
40 % sont de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.
On admet qu'au début de chaque année :

- chaque plante de type A disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type B disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type C disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

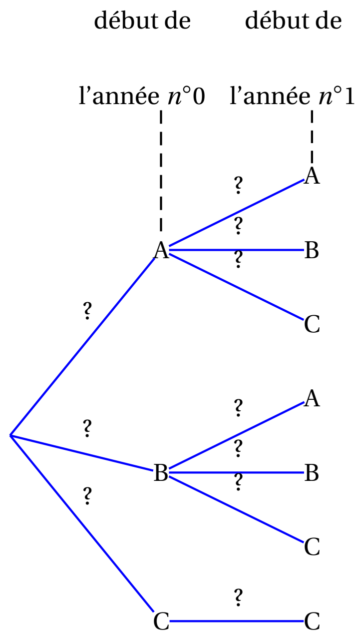
La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est $0,6$ et celle qu'elle le soit par une plante de type B est $0,3$.
La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est $0,6$ et celle qu'elle le soit par une plante de type A est $0,3$.
Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- A_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type A »,
- B_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type B »,

- C_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type C ».

On désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n et C_n.
Compte tenu de la composition initiale de la végétation (début de l'année n°0) on pose : $p_0 = 0,40$, $q_0 = 0,41$ et $r_0 = 0,19$.

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



2. **a.** Montrer que $p_1 = 0,363$ puis calculer q_1 et r_1.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\left\{\begin{array}{lcl} p_{n+1} & = & 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} & = & 0,3p_n + 0,6q_n \end{array}\right.$$

3. On définit les suites (S_n) et (D_n) sur $\mathbb{N}$ par $S_n = q_n + p_n$ et $D_n = q_n - p_n$.

   a. Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. On admet que (D_n) est une suite géométrique de raison $0,3$.

   b. Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n).

   c. En déduire les limites des suites (p_n), (q_n) et (r_n).
   Interpréter le résultat.

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

Pour cet exercice, les figures correspondant aux parties A et B sont fournies sur la feuille jointe en annexe. Cette feuille ne sera pas remise avec la copie.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère un triangle OAB et une similitude directe σ de centre O, de rapport λ et d'angle θ. Soit :

- les points A′ et B′, images respectives des points A et B par la similitude σ ;
- les points I, milieu du segment [A′ B] et J, milieu du segment [A B′] ;
- le point M milieu du segment [AA′] ;
- Je point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AR) et le point H′ image du point H par la similitude σ.

Partie A. Étude d'un exemple

Dans cette partie, le point A a pour affixe $-6 + 4i$, le point B a pour affixe $2 + 4i$, et le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), a donc pour affixe $4i$.
La similitude σ est la similitude directe de centre O, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Déterminer les affixes des points A′, B′ et H′.
2. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH′).

Partie B. Étude du cas général

1. **a.** Montrer que H′ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (A′ B′).

   b. Montrer que $\overrightarrow{\text{MI}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AB}}$. On admet que $\overrightarrow{\text{MJ}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{A}'\text{B}'}$.

   c. En déduire que $\dfrac{\text{MJ}}{\text{MI}} = \dfrac{\text{OH}'}{\text{OH}}$ et que $\left(\overrightarrow{\text{MI}}, \overrightarrow{\text{MJ}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{OH}}, \overrightarrow{\text{OH}'}\right) + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. On appelle s la similitude directe qui transforme M en O et I en H.
   On note K l'image du point J par la similitude s.

   a. Montrer que OK= OH′, puis que $\left(\overrightarrow{\text{MI}}, \overrightarrow{\text{MJ}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{OK}}, \overrightarrow{\text{OH}'}\right) + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

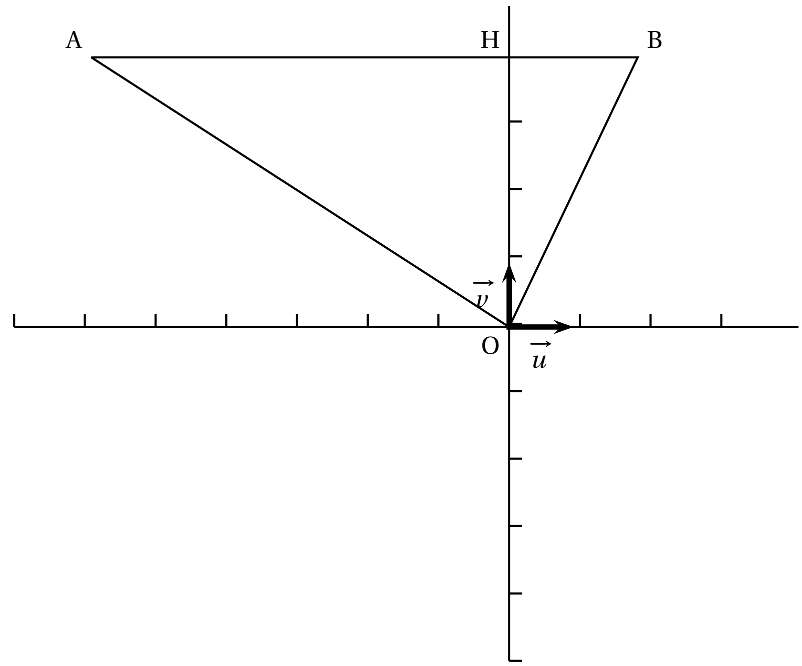
   b. En déduire que le point H′ est l'image du point J par la similitude s.

3. Montrer que $\left(\overrightarrow{\text{IJ}}, \overrightarrow{\text{HH}'}\right) = \left(\overrightarrow{\text{MI}}, \overrightarrow{\text{OH}}\right) + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
   Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH′).

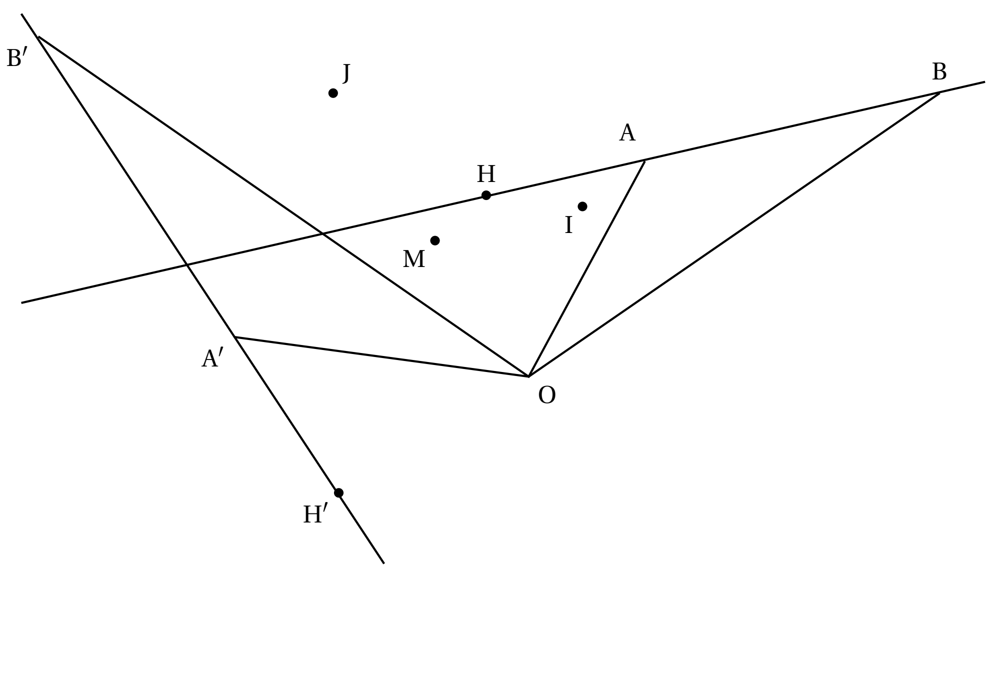
ANNEXE

Cette page ne sera pas remise avec la copie

Partie A



Partie B



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2007

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. *Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.*

On suppose connu le résultat suivant :
La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.
Soit a un réel donné.

a. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.

b. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$. Montrer que h est une fonction constante.

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_0(x) = a\cos x + b\sin x$$

soit une solution f_0 de (E).

b. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$.

c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).

d. En déduire les solutions de (E).

e. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i. On appelle S la réflexion (symétrie axiale) d'axe (AB).
Montrer que l'image M' par S d'un point M d'affixe z a pour affixe
$z' = -\mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$.

2. On note H l'homothétie de centre A et de rapport -2. Donner l'écriture complexe de H.

3. On note f la composée $H \circ S$.

a. Montrer que f est une similitude.

b. Déterminer l'écriture complexe de f.

4. On appelle M'' l'image d'un point M par f.

a. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{A}M''} = -2\overrightarrow{\mathrm{A}M}$ est la droite (AB).

b. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{A}M''} = 2\overrightarrow{\mathrm{A}M}$ est la perpendiculaire en A à la droite (AB).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

1. Soit E le point d'affixe $z_{\mathrm{E}} = -\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point E$'$, image de E par f
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.
3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.
   Soit M un point distinct des points O, A et B.
   a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et -1, on a :
   $$\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$$
   b. En déduire une expression de $\dfrac{M'\mathrm{B}}{M'\mathrm{A}}$ en fonction de $\dfrac{M\mathrm{B}}{M\mathrm{A}}$ puis une expression de l'angle $\left(\overrightarrow{M'\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M'\mathrm{B}}\right)$ en fonction de l'angle $\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right)$
4. Soit Δ la médiatrice du segment [A, B]. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ.
5. Soit Γ le cercle de diamètre [A, B].
   a. Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB).
   b. Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par f ?

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. On considère le point A de coordonnées $(-2~;~8~;~4)$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1~;~5~;~-1)$.
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives
   $x - y - z = 7$ et $x - 2z = 11$.
   Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants. On donnera une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée (d').
   Montrer que le vecteur de coordonnées $(2~;~1~;~1)$ est un vecteur directeur de (d').
3. Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.
4. On considère le point H de coordonnées $(-3~;~3~;~5)$ et le point H$'$ de coordonnées $(3~;~0~;~-4)$.
   a. Vérifier que H appartient à (d) et que H$'$ appartient à (d').

b. Démontrer que la droite (HH′) est perpendiculaire aux droites (d) et (d').

c. Calculer la distance entre les droites (d) et (d'), c'est-à-dire la distance HH′.

5. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MH'} \cdot \overrightarrow{HH'} = 126$.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

1. On considère la fonction f_1 définie sur $[0 ;\ +\infty[$ par

$$f_1(x) = 2x - 2 + \ln\left(x^2 + 1\right).$$

a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

b. Déterminer la dérivée de f_1.

c. Dresser le tableau de variations de f_1.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n, définie sur $[0 ;\ +\infty[$ par

$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln\left(x^2 + 1\right)}{n}.$$

a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

b. Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0 ;\ +\infty[$.

c. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0 ;\ +\infty[$

d. Justifier que, pour tout entier naturel n, $0 < \alpha_n < 1$.

3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $f_n\left(\alpha_{n+1}\right) > 0$.

4. Étude de la suite (α_n)

a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.

b. En déduire qu'elle est convergente.

c. Utiliser l'expression $\alpha_n = 1 - \dfrac{\ln\left(\alpha_n^2 + 1\right)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2007

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte $0,5$ *point ; une réponse inexacte enlève* $0,25$ *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1. Une solution de l'équation $2z+\overline{z}=9+\text{i}$ est :

   a. 3 **b.** i **c.** $3+\text{i}$

2. Soit z un nombre complexe ; $|z+\text{i}|$ est égal à :

   a. $|z|+1$ **b.** $|z-1|$ **c.** $|\text{i}\overline{z}+1|$

3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1+\text{i}\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :

   a. $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$ **b.** $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ **c.** $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$

4. Soit n un entier naturel. Le complexe $\left(\sqrt{3}+\text{i}\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :

   a. $n=3$ **b.** $n=6k+3$, avec k relatif **c.** $n=6k$ avec k relatif

5. Soient A et B deux points d'affixe respective i et -1. l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-\text{i}|=|z+1|$ est :

   a. la droite (AB) **b.** le cercle de diamètre [AB] **c.** la droite perpendiculaire à (AB) passant par O

6. Soit Ω le point d'affixe $1-\text{i}$. L'ensemble des points M d'affixe $z=x+\text{i}y$ vérifiant $|z-1+\text{i}|=|3-4\text{i}|$ a pour équation :

   a. $y=-x+1$ **b.** $(x-1)^2+y^2=\sqrt{5}$ **c.** $z=1-\text{i}+5\text{e}^{\text{i}\theta}$ avec θ réel

7. Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et 3i. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ est :

   a. $1-4\text{i}$ **b.** -3i **c.** $7+4\text{i}$

8. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z-2}{z-1}=z$ est :

   a. $\{1-\text{i}\}$ **b.** L'ensemble vide **c.** $\{1-\text{i}\ ;\ 1+\text{i}\}$

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.

La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.

On note :

– D l'évènement « le composant est défectueux » ;
– F_1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur » ;
– F_2 l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».

1. **a.** Dessiner un arbre pondéré.
   b. Calculer $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que $p(D) = 0{,}0225$.
   c. Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

   Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} près.
2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?
3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.
   a. Sachant que $p(X > 5) = 0,325$, déterminer λ.
   Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0,225$.
   b. Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?
   c. Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

EXERCICE 3 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A : question de cours

1. Soit f une fonction réelle définie sur $[a~;~+\infty[$. Compléter la phrase suivante :
   « On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si ... »
2. Démontrer le théorème « des gendarmes » : soient f, g et h trois fonctions définies sur $[a~;~+\infty[$ et ℓ un nombre réel. Si g et h ont pour limite commune ℓ quand x tend vers $+\infty$, et si pour tout x assez grand $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, alors la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à ℓ.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$$

et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$. On a représenté sur la feuille annexe la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D).

1. Soit a un nombre réel. Écrire, en fonction de a, une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point M d'abscisse a.
2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b. Vérifier que $b - a = -1$.
3. En déduire une construction, à effectuer sur la feuille annexe, de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point M d'abscisse $1,5$. On fera apparaître le point N correspondant.

Partie C

1. Déterminer graphiquement le signe de f.

2. En déduire pour tout entier naturel non nul n les inégalités suivantes :

$$(1) \quad e^{\frac{1}{n}} \geqslant 1+\frac{1}{n} \qquad (2) \quad e^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1-\frac{1}{n+1}$$

3. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$$

4. En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

$$e \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

5. Déduire des questions précédentes un encadrement de

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

puis sa limite en $+\infty$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit OABC un tétraèdre trirectangle (les triangles OAB, OBC, OCA sont rectangles en O). On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).
Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de ce tétraèdre.

1. **a.** Pourquoi la droite (OH) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?
Pourquoi la droite (OA) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?

b. Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales. On démontrera de façon anlogue que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales. Ce résultat est ici admis.

c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

2. L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 3).

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par O et orthogonale au plan (ABC).

c. Démontrer que le plan (ABC) et la droite (D) se coupent en un point H de coordonnées $\left(\frac{36}{49} ; \frac{18}{49} ; \frac{12}{49}\right)$.

3. **a.** Calculer la distance du point O au plan (ABC).

b. Calculer le volume du tétraèdre OABC. En déduire l'aire du triangle ABC.

c. Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.

b. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.

c. En déduire que $6^{40} \equiv 1\ [11]$ et que $6^{40} \equiv 1\ [5]$.

d. Démontrer que $6^{40}-1$ est divisible par 55.

2. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.

a. Montrer que l'équation

$$(E) \qquad 65x - 40y = 1$$

n'a pas de solution.

b. Montrer que l'équation

$$(E') \qquad 17x - 40y = 1$$

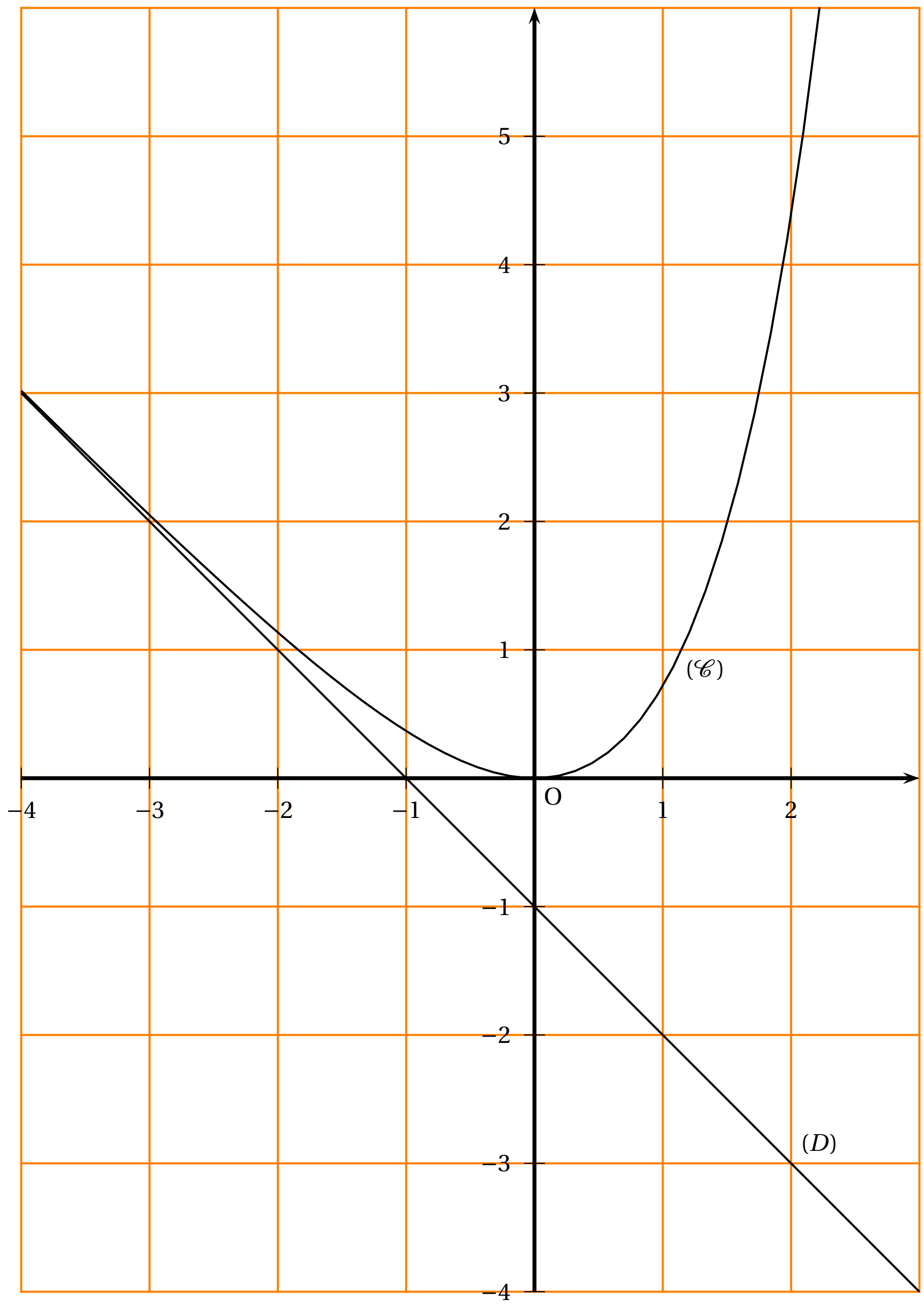
admet au moins une solution.

c. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $\left(E'\right)$.

d. Résoudre l'équation $\left(E'\right)$.
En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que
$17x_0 \equiv 1 \quad [40]$.

3. Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b \quad [55]$ et si $a^{40} \equiv 1 \quad [55]$, alors $b^{33} \equiv a \quad [55]$.

ANNEXE (à rendre avec la copie)



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2008 (spécialité)

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 6[$ par

$$f(x) = \frac{9}{6-x}$$

On définit pour tout entier naturel n la suite (U_n) par

$$\left\{\begin{array}{lcl} U_0 & = & -3 \\ U_{n+1} & = & f(U_n) \end{array}\right.$$

1. La courbe représentative de la fonction f est donnée sur la feuille jointe accompagnée de celle de la droite d'équation $y = x$. Construire, sur cette feuille annexe les points $M_0(U_0\ ;\ 0)$, $M_1(U_1\ ;\ 0)$, $M_2(U_2\ ;\ 0)$, $M_3(U_3\ ;\ 0)$ et $M_4(U_4\ ;\ 0)$.
   Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (U_n) ?
2. **a.** Démontrer que si $x < 3$ a alors $\dfrac{9}{6-x} < 3$.
   En déduire que $U_n < 3$ pour tout entier naturel n.
   b. Étudier le sens de variation de la suite (U_n).
   c. Que peut-on déduire des questions 2. a. et 2. b. ?
3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \dfrac{1}{U_n - 3}$ pour tout entier naturel n.
   a. Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
   b. Déterminer V_n puis U_n en fonction de n.
   c. Calculer la limite de la suite (U_n).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A : Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?
Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

PARTIE B

On note 0, 1, 2, ..., 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple :

$$\overline{\beta\alpha7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1\,711 \text{ en base } 10$$

1. **a.** Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 :

$$N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$$

   Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

b. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 :

$$N_2 = 1\,131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$$

Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :

$$N = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}^{12}$$

2. **a.** Démontrer que $N \equiv a_0 \quad (3)$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.

3. **a.** Démontrer que $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0 \quad (11)$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris.
- pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.

1. Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.

a. Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.

b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.

c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie ? On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, 0,25 euro s'il est gris et perd 0,10 euro s'il ne survit pas.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormé. Soit t un nombre réel.
On donne le point A$(-1\,;\,2\,;\,3)$ et la droite $\mathcal{D}$ de système d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 9+4t \\ y & = & 6+t \\ z & = & 2+2t \end{array}\right.$$

Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes la distance d entre le point A et la droite $\mathcal{D}$.

1. **a.** Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$, perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ et passant par A.

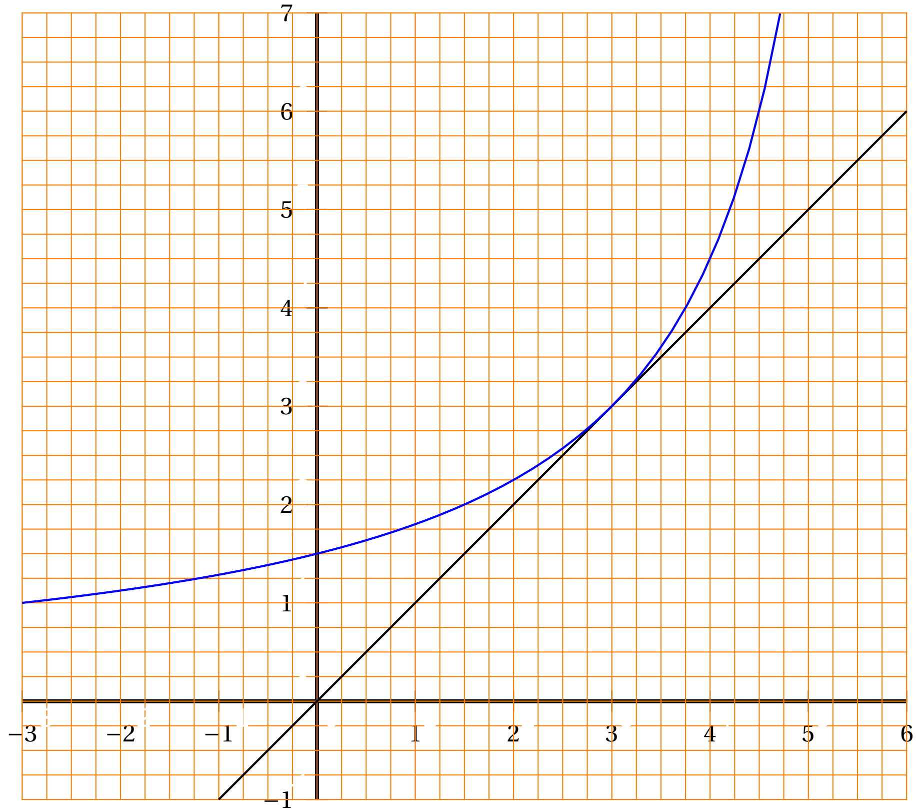
   b. Vérifier que le point B$(-3\,;\,3\,;\,-4)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

   c. Calculer la distance d_{B} entre le point B et le plan $\mathcal{P}$.

   d. Exprimer la distance d en fonction de d_{B} et de la distance AB. En déduire la valeur exacte de d.

2. Soit M un point de la droite $\mathcal{D}$. Exprimer AM^2 en fonction de t. Retrouver alors la valeur de d.

ANNEXE (à rendre avec la copie)



Baccalauréat S Pondichéry 16 avril 2008

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $[1~;~+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\text{e}^x - 1}$ et soit H la fonction définie sur $[1~;~+\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\text{d}t$.
   a. Justifier que f et H sont bien définies sur $[1~;~+\infty[$
   b. Quelle relation existe-t-il entre H et f ?
   c. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ du plan. Interpréter en termes d'aire le nombre $H(3)$.
2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre $H(3)$.
   a. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{x}{\text{e}^x - 1} = x \times \dfrac{\text{e}^{-x}}{1 - \text{e}^{-x}}$.
   b. En déduire que $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\text{d}x = 3\ln\left(1 - \dfrac{1}{\text{e}^3}\right) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{\text{e}}\right) - \int_1^3 \ln\left(1 - \text{e}^{-x}\right)\,\text{d}x$.
   c. Montrer que si $1 \leqslant x \leqslant 3$, alors $\ln\left(1 - \dfrac{1}{\text{e}}\right) \leqslant \ln\left(1 - \text{e}^{-x}\right) \leqslant \ln\left(1 - \dfrac{1}{\text{e}^3}\right)$.
   d. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_1^3 \ln\left(1 - \text{e}^{-x}\right)\,\text{d}x$ puis de $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\text{d}x$.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.

Partie A

On suppose connus les résultats suivants :

1. Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C.
   Alors $\left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \dfrac{CB}{CA}$ et $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA},~\overrightarrow{CB}\right) \quad (2\pi)$.
2. Soit z un nombre complexe et soit θ un réel :
   $z = \text{e}^{\text{i}\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

Démonstration de cours : démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' - \omega = \text{e}^{\text{i}\alpha}(z - \omega).$$

Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $\left(\text{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = -\sqrt{3} - \text{i},~ z_B = 1 - \text{i}\sqrt{3},~ z_C = \sqrt{3} + \text{i} \text{ et } z_D = -1 + \text{i}\sqrt{3}.$$

1. **a.** Donner le module et un argument pour, chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.

b. Comment construire à la règle et au compas les points A, B, C et D dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$?

c. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

2. On considère la rotation r de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Soient E et F les points du plan définis par : $E = r(A)$ et $F = r(C)$.

a. Comment construire à la règle et au compas les points F et E dans le repère précédent ?

b. Donner l'écriture complexe de r.

c. Déterminer l'affixe du point E.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On suppose connu le résultat suivant :

Une application f du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démonstration de cours : on se place dans le plan complexe. Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonomal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives

$$z_A = -\sqrt{3} - \mathrm{i},\ z_B = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3},\ z_C = \sqrt{3} + \mathrm{i} \text{ et } z_D = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

1. **a.** Donner le module et un argument-de chacun des quatre nomlres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.

b. Construire à la règle et au compas les points A, B, C et D (on prendra pour unité graphique 2 cm).

c. Déterminer le milieu du segment $[AC]$, celui du segment $[BD]$. Calculer le quotient $\dfrac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

2. On considère la similitude directe g dont l'écriture complexe est $z' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}z + 2$.

a. Déterminer les éléments caractéristiques de g.

b. Construire à la règle et au compas les images respectives E, F et J par g des points A, C et O.

c. Que constate-t-on concernant ces points E, F et J ? Le démontrer.

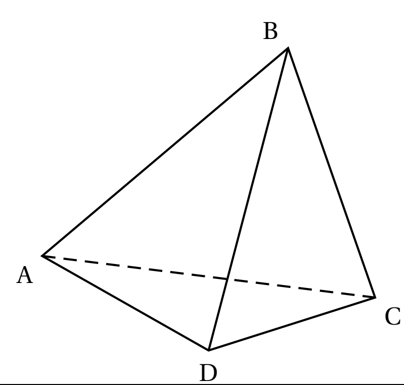
EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère un tétraèdre $ABCD$.

On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$.

On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.



1. Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$.
(On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équifacial, car ses faces sont isométriques).

2. **a.** Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.

b. En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

3. **a.** Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).

b. Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB). Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).

c. Montrer que G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$.

d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$?

EXERCICE 4 **7 points**
Commun à tous les candidats
On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret
Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.
On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n\,(20 - u_n)\,.$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 20]$ par

$$f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x).$$

a. Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ 20]$.

b. En déduire que pour tout $x \in [0\ ;\ 20]$, $f(x) \in [0\ ;\ 10]$.

c. On donne en **annexe** la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal.
Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.
On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\text{E}) \quad ; \quad y' = \frac{1}{20}y(10 - y).$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0~;~+\infty[$ et on pose $z = \dfrac{1}{y}$.

a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_1) \quad : \; z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2. Montrer que g est définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.

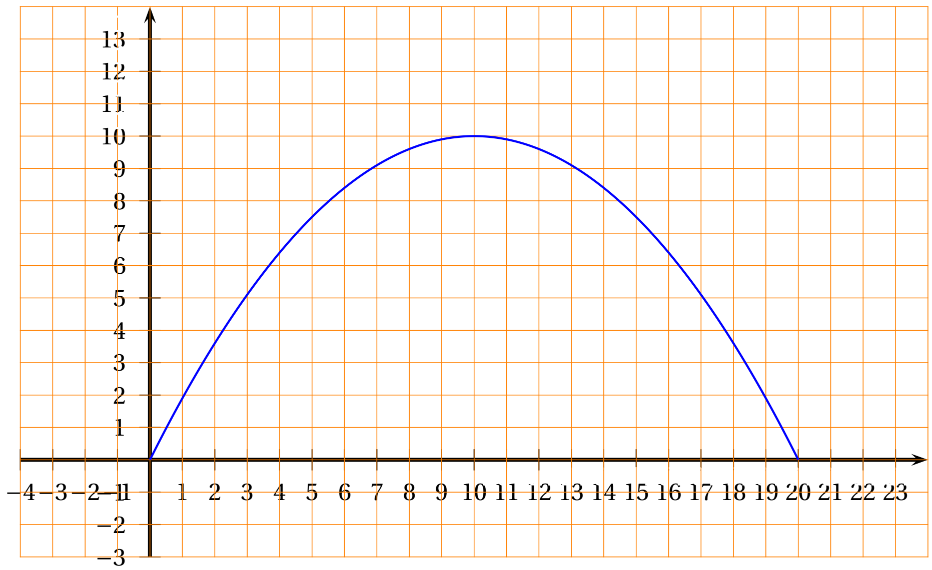
3. Étudier les variations de g sur $[0~;~+\infty[$.

4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

ANNEXE

À rendre avec la copie



Baccalauréat S Liban juin 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires.
Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires.
Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois :
s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A,
sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'évènement « le joueur obtient une boule rouge ».
   Montrer que $p(\mathrm{R}) = 0,15$.
2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).
Soit x un entier naturel non nul.
Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.
On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs $2x$, $x-2$ et -4.

1. Déterminer la loi de probabilité de G.
2. Exprimer l'espérance E(G) de la variable aléatoire G en fonction de x.
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\mathrm{E(G)} \geqslant 0$?

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques
Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

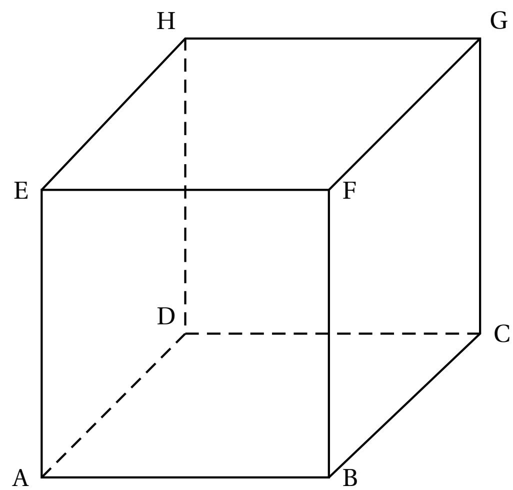
1. Soit z un nombre complexe d'argument $\dfrac{\pi}{3}$.
   Proposition 1 : « z^{100} est un nombre réel ».
2. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z différente de 1 du plan telle que $\left|\dfrac{z}{1-z}\right| = 1$.
   Proposition 2 : « l'ensemble (E) est une droite parallèle à l'axe des réels ».
3. Soit r la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et dont le centre K a pour affixe $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Proposition 3 : « l'image du point O par la rotation r a pour affixe $\left(1-\sqrt{3}\right)+\mathrm{i}\left(1+\sqrt{3}\right)$ ».

4. On considère l'équation (E) suivante : $z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z + 1 = 0$.

   Proposition 4 : « l'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1 ».

Partie B

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1, représenté ci-dessous. **Proposition 5** : « le vecteur $\overrightarrow{\text{AG}}$ est normal au plan (BDE) ».
Proposition 6 : « les droites (EB) et (ED) sont perpendiculaires ».



EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant choisi la spécialité mathématiques

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère la similitude directe f d'écriture complexe

$$z \longmapsto \frac{3}{2}(1-\text{i})z + 4 - 2\text{i}.$$

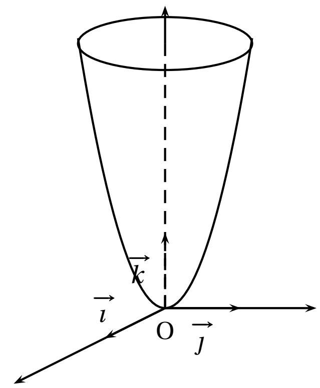
   Proposition 1 : « $f = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport $3\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2-2\text{i}$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ ».

2. Pour tout entier naturel n non nul :
   Proposition 2 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5 ».
   Proposition 3 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7 ».

3. Dans le plan muni d'un repère, (D) est la droite d'équation $11x - 5y = 14$.
   Proposition 4 : « les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées $(5k+14\,;\,11k+28)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

4. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

La surface Σ ci-contre a pour équation $z = x^2 + y^2$.



Proposition 5 : « la section de la surface Σ et du plan d'équation $x = \lambda$, où λ est un réel, est une hyperbole ».

Proposition 6 : « le plan d'équation $z = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$ partage le solide délimité par Σ et le plan d'équation $z = 9$ en deux solides de même volume ».

Rappel : Soit V le volume du solide délimité par Σ et les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ où $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 9$.
V est donné par la formule $V = \displaystyle\int_a^b S(k)\,\mathrm{d}k$ où $S(k)$ est l'aire de la section du solide par le plan d'équation $z = k$ où $k \in [a\,;\,b]$.

EXERCICE 3 **6 points**

Partie A. Démonstration de cours

Prérequis : définition d'une suite tendant vers plus l'infini.
« *une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A* ».
Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2.$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous. Cette courbe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer la droite (T) sur le graphique. Dans la suite de l'exercice, on admet que, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la courbe $(\mathscr{C})$ est située au dessus de la droite (T).

Partie C

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents les traits de construction (utiliser le graphique donné).
2. À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement lorsque n tend vers $+\infty$?

3.

a. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel $n, u_n \geqslant 1$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c. Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

d. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 — 5 points

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$.
On donne le tableau de ses variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	1

Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie A

1. En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe $(\mathscr{C})$ susceptible de représenter f dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).
2. **a.** Interpréter graphiquement $g(2)$.

   b. Montrer que $0 \leqslant g(2) \leqslant 2,5$.
3. **a.** Soit x un réel supérieur à 2.

   Montrer que $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant x-2$. En déduire que $g(x) \geqslant x-2$.

   b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$.

Partie B

On admet que pour tout réel $t, f(t) = (t-1)\mathrm{e}^{-t} + 1$.

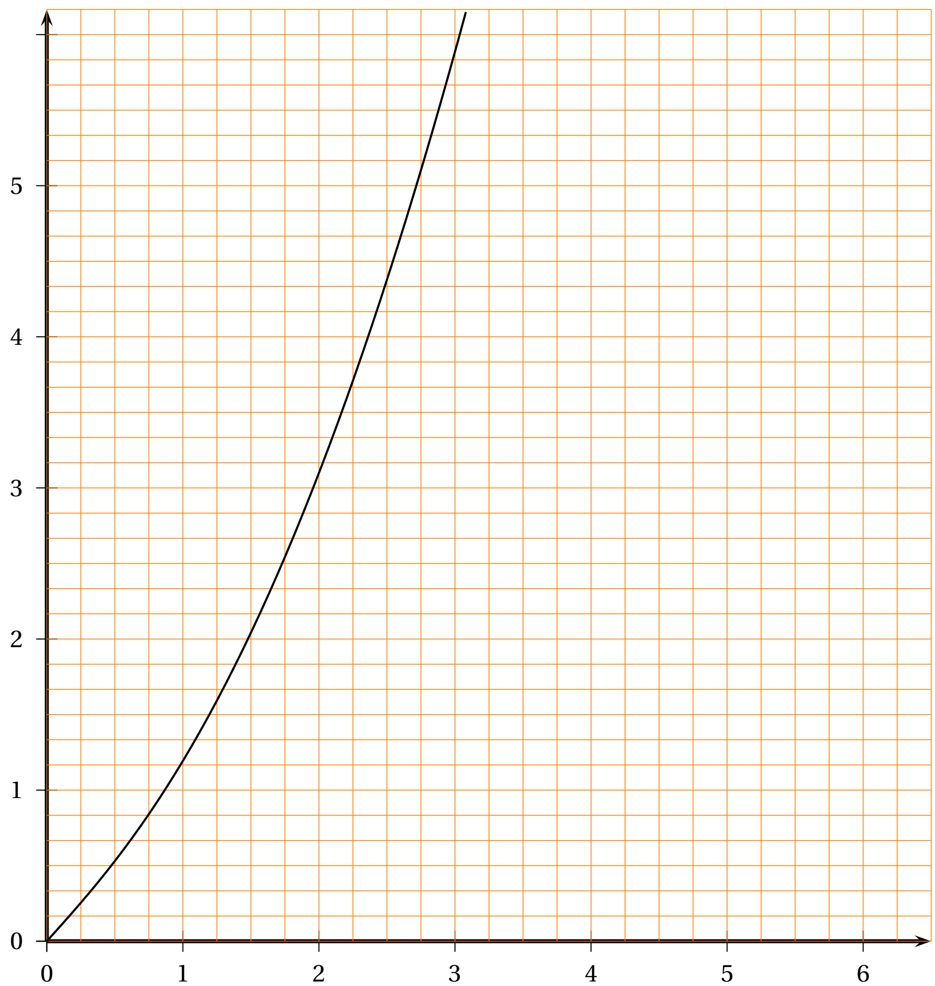
1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer en fonction du réel x l'intégrale $\displaystyle\int_0^x (t-1)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire que pour tout réel x, $g(x) = x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$.
3. Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Exercice 3

Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableur



Baccalauréat S Amérique du Nord 29 mai 2008

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$unité graphique : 4 cm.
On considère le point A d'affixe $z_A = 2 + i$ et le cercle (Γ) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

1. Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice.
2. **a.** Déterminer les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $\left(O ; \vec{u}\right)$.

   b. On désigne par B et C les points d'affixes respectives $z_B = 1$ et $z_C = 3$.
   Déterminer l'affixe z_D du point D diamétralement opposé au point B sur le cercle (Γ).
3. Soit M le point d'affixe $\dfrac{3}{5} + \dfrac{6}{5}i$.

   a. Calculer le nombre complexe $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$.

   b. Interpréter géométriquement un argument du nombre $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$; en déduire que le point M appartient au cercle (Γ).
4. On note (Γ') le cercle de diamètre [AB].
   La droite (BM) recoupe le cercle (Γ') en un point N.

   a. Montrer que les droites (DM) et (AN) sont parallèles.

   b. Déterminer l'affixe du point N.
5. On désigne par M′ l'image du point M par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

   a. Déterminer l'affixe du point M′.

   b. Montrer que le point M′ appartient au cercle (Γ').

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Partie A

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment [AD].

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2$.
2. En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace, tels que $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.

Partie B :

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$A(3 ; 0 ; 0),\ B(0 ; 6 ; 0), C(0 ; 0 ; 4) \quad \text{et} \quad D(-5 ; 0 ; 1).$$

1. **a.** Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

   b. Déterminer une équation du plan (ABC).

2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, orthogonale au plan (ABC) passant par D.
   b. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
   c. Calculer la distance du point D au plan (ABC).
   d. Démontrer que le point H appartient l'ensemble (E) défini dans la partie A.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On nomme (S) la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan $(x\text{O}y)$.
2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives $(3 ; 1 ; -3)$ et $(-1 ; 1 ; 1)$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.
   b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).
3. Determiner la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan $(x\text{O}y)$.
4. a. On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.
   b. M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.
   On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient de entiers naturels vérifiant $a < b$ et $\text{ppcm}(a ; b) = 440$, c'est-à-dire tel que (a, b) soit solution du système

   $$(1) : \left\{\begin{array}{l} a < b \\ a^2 + b^2 = 4\,625 \\ \text{ppcm}(a ; b) = 440 \end{array}\right.$$

   Montrer que si (a, b) est solution de (1) alors $\text{pgcd}(a ; b)$ est égal à 1 ou 5.
   Conclure

Dans cette question toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}.$$

On nomme $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y = \ln x$ dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.
2. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [f(x) - \ln x]$.
   Interpréter graphiquement cette limite.
   b. Préciser les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et de Γ.
3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ passant par le point O.
   a. Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1~;~+\infty[$.
   Démontrer que la tangente $\mathscr{T}_a$ à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - af'(a) = 0$.
   Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ par
   $$g(x) = f(x) - xf'(x).$$
   b. Montrer que sur $]1~;~+\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.
   c. Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$ montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.
   d. En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe $(\mathscr{C})$ passant par le point O.
   La courbe $(\mathscr{C})$ et la courbe Γ sont données en annexe.
   Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure.
4. On considère un réel m et l'équation $f(x) = mx$ d'inconnue x.
   Par lecture graphique et sans justification, donner, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de cette équation appartenant à l'intervalle $]1~;~10]$.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère les suites (x_n) et $\left(y_n\right)$ définies pour tout entier naturel n non nul par :

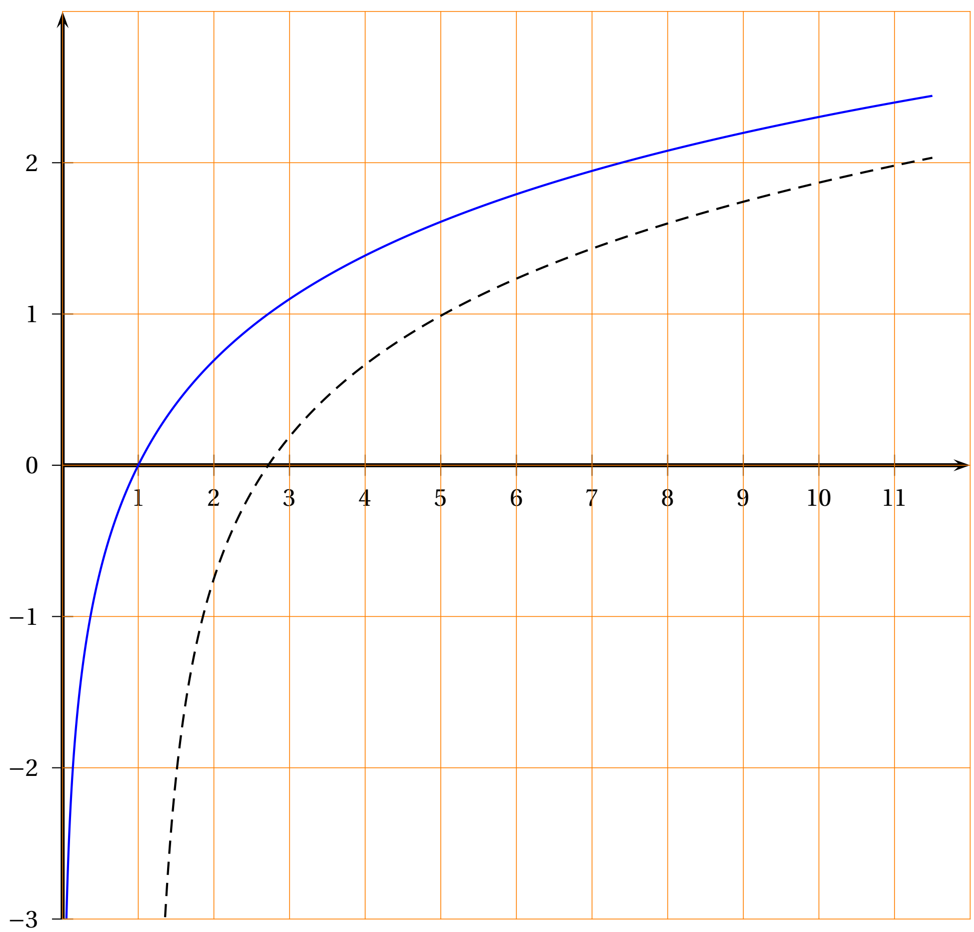
$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.
   b. Étudier les variations de la suite (x_n).
   c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?
2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   b. En déduire la limite de la suite (x_n).
3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.
   b. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$.
4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$.
   Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nx_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} ny_n$.

Annexe

Cette page est à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve

Exercice 3
Représentations graphiques obtenues à l'aide d'un tableur



Courbe Γ représentative de la fonction ln

Courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f

Baccalauréat S Antilles-Guyane 18 juin 2008

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x}.$$

Partie A :

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E$'$) : $y' + 2y = 0$.
2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de (E$'$).
3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$ est solution de l'équation (E).
4. En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

Partie B :

On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité 1 cm.

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x}\left(\frac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right)$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.
5. Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.
6. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. On exprimera cette aire en cm^2.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

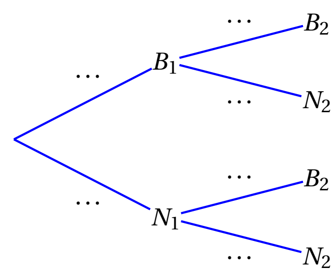
On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient k boules blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.
U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2. On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

On note B_1 (respectivement N_1) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_1 ».
On note B_2 (respectivement N_2) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_2 ».

1. **a.** Recopier et compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-dessous :



Montrer que la probabilité de l'évènement B_2 est égale à $\dfrac{3k+6}{4k+12}$.

Dans la suite on considère que $k = 12$.

Les questions 2 et 3 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

2. Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve.

   Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros.

   Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.

   a. Montrer que les valeurs possibles de X sont 4 et -8.

   b. Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

   c. Calculer l'espérance mathématique de X.

   d. Le jeu est-il favorable au joueur ?

3. Un joueur participe n fois de suite à ce jeu.

   Au début de chaque épreuve, l'urne U_1 contient 12 boules blanches et 3 noires, et l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 noire.

   Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.

   Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'évènement B_2 soit supérieure ou égale à $0,99$.

EXERCICE 2 — 5 points

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-7\,;\,-3)$ est solution de (E).
2. Résoudre alors l'équation (E).
3. En déduire le couple d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ solution de (E) tel que $0 \leqslant u \leqslant 25$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

– on calcule $11x + 8$

– on calcule le reste de la division euclidienne de $11x+8$ par 26, que l'on appelle y.

x est alors « codé » par y.
Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $11 \times 11 + 8 = 129$ or $129 \equiv 25(0\text{modulo}26)$; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre Z.
La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1. Coder la lettre W.

2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.

a. Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j, on a :

$$11x \equiv j \quad (\text{modulo } 26) \text{ équivaut à } x \equiv 19j(\text{modulo } 26).$$

b. En déduire un procédé de décodage.

c. Décoder la lettre W.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 *point ;*
une réponse inexacte enlève 0,25 *point ;*
l'absence de réponse est comptée 0 *point.*
Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. L'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que : $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-6y+2z-7 & = & 0 \\ -x+3y-z+5 & = & 0 \end{array}\right.$ est :

Réponse A : l'ensemble vide — Réponse B : une droite
Réponse C : un plan — Réponse C : réduit à un point

2. Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-t \\ y & = & -1+t \\ z & = & 2-3t \end{array}\right. (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2+t \\ y & = & -2-t \\ z & = & 4+2t \end{array}\right. (t \in \mathbb{R}) \text{ sont :}$$

Réponse A : parallèles et distinctes — Réponse B : confondues
Réponse C : sécantes — Réponse D : non coplanaires

3. La distance du point A(1 ; −2 ; 1) au plan d'équation $-x+3y-z+5=0$ est égale à :

Réponse A : $\dfrac{3}{11}$ — Réponse B : $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$
Réponse C : $\dfrac{1}{2}$ — Réponse D : $\dfrac{8}{\sqrt{11}}$

4. Le projeté orthogonal du point B(1 ; 6 ; 0) sur le plan d'équation $-x+3y-z+5 = 0$ a pour coordonnées :

Réponse A : (3 ; 1 ; 5) — Réponse B : (2 ; 3 ; 1)
Réponse C : (3 ; 0 ; 2) — Réponse D : $(-2;3;-6)$

Exercice 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

La feuille annexe donnée portera les constructions demandées au cours de l'exercice.

Cette feuille est à rendre avec la copie.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, le point A a pour affixe i.

On nomme f l'application qui, à tout point M d'affixe z avec $z \neq \mathrm{i}$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-z^2}{z - \mathrm{i}}$$

Le but de l'exercice est de construire géométriquement le point M' connaissant le point M.

1. Un exemple

On considère le point K d'affixe $1 + \mathrm{i}$.

a. Placer le point K.

b. Déterminer l'affixe du point K′ image de K par f.

c. Placer le point K′.

2. Des points pour lesquels le problème ne se pose pas

a. On considère le point L d'affixe $\frac{\mathrm{i}}{2}$. Déterminer son image L′ par f. Que remarque-t- on ?

b. Un point est dit invariant par f s'il est confondu avec son image.

Démontrer qu'il existe deux points invariants par f dont on déterminera les affixes.

3. Un procédé de construction

On nomme G l'isobarycentre des points A, M, et M', et g l'affixe de G.

a. Vérifier l'égalité $g = \dfrac{1}{3(z - \mathrm{i})}$.

b. En déduire que : si M est un point du cercle de centre A de rayon r, alors G est un point du cercle de centre O de rayon $\dfrac{1}{3r}$.

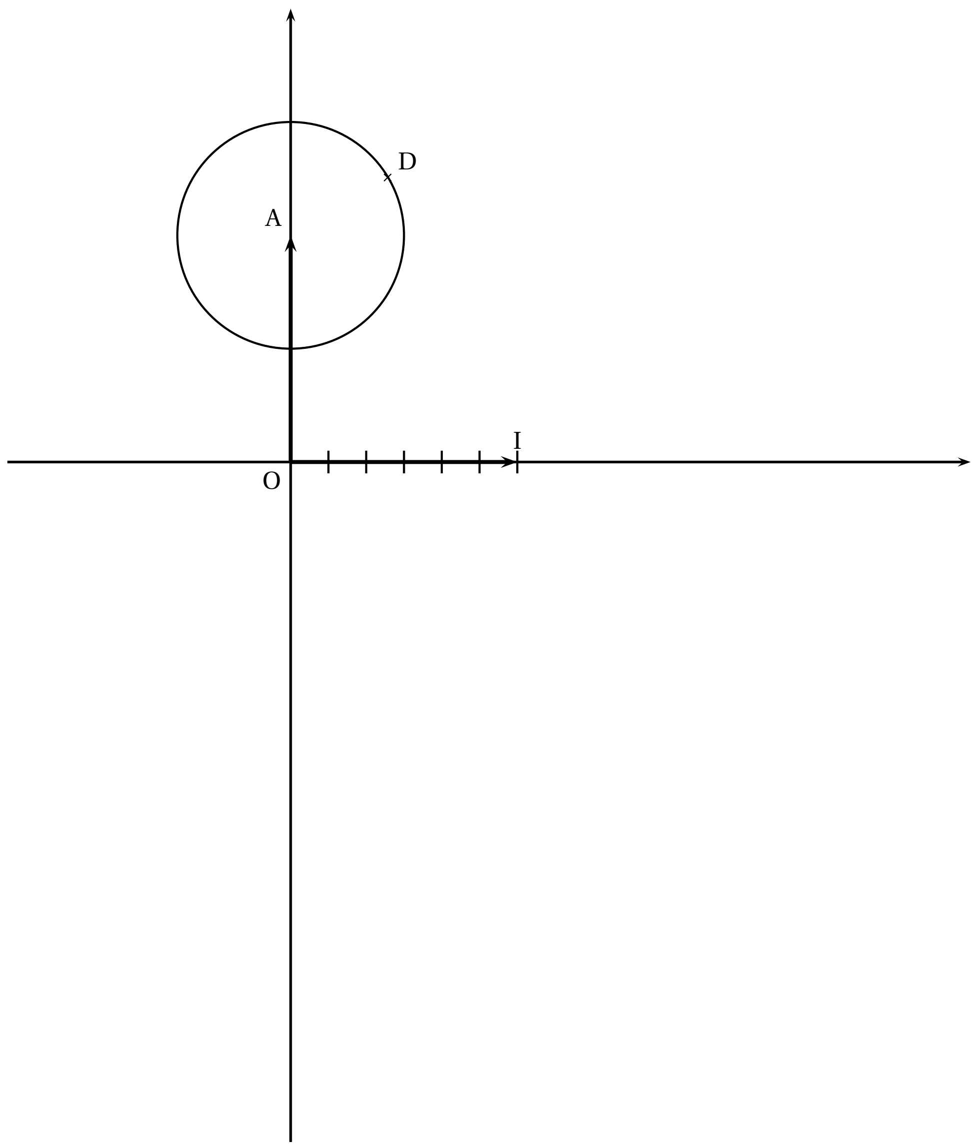
c. Démontrer que $\arg g = -\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AM}\right)$.

d. Sur la feuille annexe, on a marqué un point D sur le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

On nomme D′ l'image de D par f. Déduire des questions précédentes la construction du point D′ et la réaliser sur **la figure annexe à rendre avec la copie.**

Annexe à rendre avec la copie

Sur la figure ci-dessous le segment [OI] tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{OI}}$ est partagé en six segments d'égale longueur.



∽ Baccalauréat S Asie 18 juin 2008 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

A -Vrai ou faux ?

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse la démonstration consistera à proposer un contre-exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exempte.

Rappel des notations :

- $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ *désigne l'ensemble des points communs aux plans* $\mathscr{P}_1$ *et* $\mathscr{P}_2$.
- *L'écriture* $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \emptyset$ *signifie que les plans* $\mathscr{P}_1$ *et* $\mathscr{P}_2$ *n'ont aucun point commun.*

1. Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \emptyset \text{ et } \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \emptyset,$$

alors on peut conclure que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ vérifient : $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 \neq \emptyset$.

2. Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset$$

alors on peut conclure que $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont tels que : $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \emptyset$ et $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset$.

3. Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \emptyset \text{ et } \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset,$$

alors on peut conclure que $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ vérifient : $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \emptyset$.

4. Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont deux plans distincts et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace vérifiant :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{D} \neq \emptyset \text{ et } \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \emptyset,$$

alors on peut conclure que $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{D} \neq \emptyset$

B - Intersection de trois plans donnés

Dans un repère orthonorrnal de l'espace on considère les trois plans suivants :

- $\mathscr{P}_1$ d'équation $x + y - z = 0$
- $\mathscr{P}_2$ d'équation $2x + y + z - 3 = 0$,
- $\mathscr{P}_3$ d'équation $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

1. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'interseclion, notée Δ.

2. En déduire la nature de l'intersection $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère plusieurs sacs de billes $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ tels que :

– le premier, S_1, contient 3 billes jaunes et 2 vertes ;
– chacun des suivants, S_2, $S_3, \ldots, S_n, \ldots$ contient 2 billes jaunes et 2 vertes.

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivante :

– on tire au hasard une bille dans S_1 ;
– on place la bille tirée de S_1 dans S_2, puis on tire au hasard une bille dans S_2 ;
– on place la bille tirée de S_2 dans S_3, puis on tire au hasard une bille dans S_3 ;
– etc.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note E_n l'évènement : « la bille tirée dans S_n est verte » et on note $p(E_n)$ sa probabilité.

1. Mise en évidence d'une relation de récurrence
   a. D'après l'énoncé, donner les valeurs de $p(E_1)$, $p_{E_1}(E_2)$, $p_{\overline{E_1}}(E_2)$.
   En déduire la valeur de $p(E_2)$.
   b. À l'aide d'un arbre pondéré, exprimer $p(E_{n+1})$ en fonction de $p(E_n)$.
2. Étude d'une suite
   On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{5} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{2}{5} \quad \text{pour tout } n \geqslant 1. \end{cases}$
   a. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par $\dfrac{1}{2}$.
   b. Démontrer que (u_n) est croissante.
   c. Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
3. Évolution des probabilités $p(E_n)$
   a. À l'aide des résultats précédents, déterminer l'évolution des probabilités $p(E_n)$.
   b. Pour quelles valeurs de l'entier n a-t-on : $0{,}49999 \leqslant p(E_n) \leqslant 0{,}5$?

EXERCICE 2 **5 points**
Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthonormal, dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ sont des entiers vérifiant les conditions : $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant b$. On note $R_{a,\,b}$ ce réseau.
Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

A - Représentation graphique de quelques ensembles

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera dûment complété sur la feuille annexe n° 1 à rendre avec la copie.
Représenter graphiquement les points $M(x\,;\,y)$ du réseau $R_{8,8}$ vérifiant :

1. $x \equiv 2 \pmod 3$ et $y \equiv 1 \pmod 3$, sur le graphique 1 de la feuille annexe
2. $x + y \equiv 1 \pmod 3$, sur le graphique 2 de la feuille annexe ;
3. $x \equiv y \pmod 3$, sur le graphique 3 de la feuille annexe.

B - Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) : $7x - 4y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0\,;\,y_0)$ solution de l'équation (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

3. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution $(x\,;\,y)$ pour laquelle le point $M(x\,;\,y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4,7}$.

C - Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau.
Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale $[\mathrm{O}A]$ du réseau $R_{a,\,b}$, avec $\mathrm{O}(0\,;\,0)$ et $A(a\,;\,b)$.

1. Démontrer que les points du segment $[\mathrm{O}A]$ sont caractérisés par les conditions :

$$0 \leqslant x \leqslant a\,;\, 0 \leqslant y \leqslant b\,;\, ay = bx.$$

2. Démontrer que si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment $[\mathrm{O}A]$ appartenant au réseau $R_{a,\,b}$.

3. Démontrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment $[\mathrm{O}A]$ contient au moins un autre point du réseau.
(On pourra considérer le pgcd d des nombres a et b et poser $a = da'$ et $b = db'$.)

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats
Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra pour le dessin : $\left\|\vec{u}\right\| = 4$ cm.
M est un point d'affixe z non nul. On désigne par M' le point d'affixe z' telle que

$$z' = -\frac{1}{\overline{z}}.$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

A - Quelques propriétés

1. Soit z un nombre complexe non nul. Déterminer une relation entre les modules de z et z' puis une relation entre les arguments de z et z'.

2. Démontrer que les points O, M et M' sont alignés.

3. Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul on a l'égalité :
$\overline{z'+1} = \frac{1}{z}(z-1)$.

B - Construction de l'image d'un point
On désigne par A et B les deux points d'affixes respectives 1 et -1.
On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|z-1| = 1$.

1. Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{C}$?

2. Soit M un point de $\mathscr{C}$ d'affixe z, distinct du point O.

  a. Démontrer que $\left|z'+1\right| = \left|z'\right|$. Interpréter géométriquement cette égalité.

  b. Est-il vrai que si z' vérifie l'égalité : $\left|z'+1\right| = \left|z'\right|$, alors z vérifie l'égalité : $|z-1| = 1$?

3. Tracer l'ensemble $\mathscr{C}$ sur une figure. Si M est un point de $\mathscr{C}$, décrire et réaliser la construction du point M'.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

A - Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

Démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.

B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan. On prendra 4 cm pour unité graphique.

1. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

   Étudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau dc variations le plus complet possible.
2. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

C - Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{kx}.$$

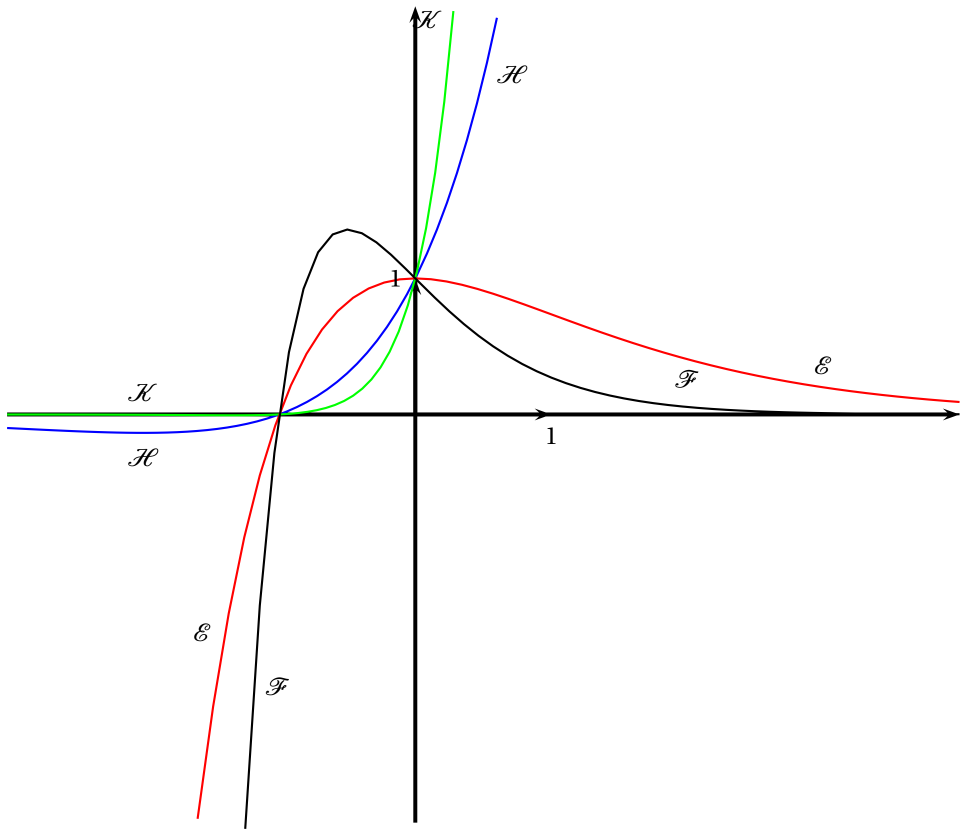
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan.

On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la partie B, car on a $f_{-1} = f$ et $\mathscr{C}_{-1} = \mathscr{C}$.

1. **a.** Quelle est la nature de la fonction f_0 ?

   b. Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.
   Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_k$.
2. Étudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de l'expression : $(x+1)\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$.
   En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.
3. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.
   En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k. (On distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$.)
4. Le graphique suivant représente quatre courbes $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}$, et $\mathscr{K}$, correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k, parmi les entiers -1, -3, 1 et 2.

   Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.

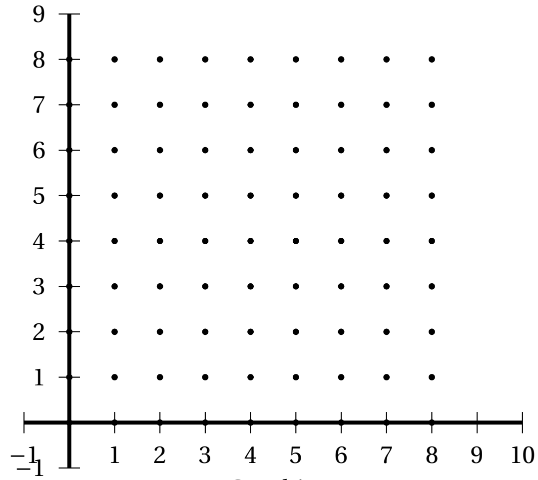


D - Calcul d'une aire plane

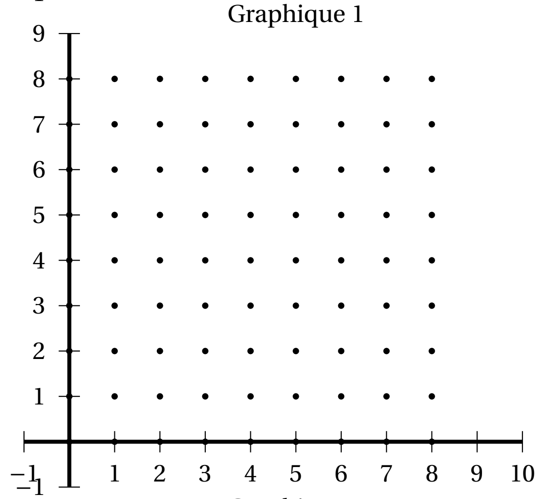
Soit λ un réel stritement positif. La fonction f est celle définie dans la partie B.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer ce nombre : $\mathscr{A}(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda)$. Interpréter graphiquement le résultat.

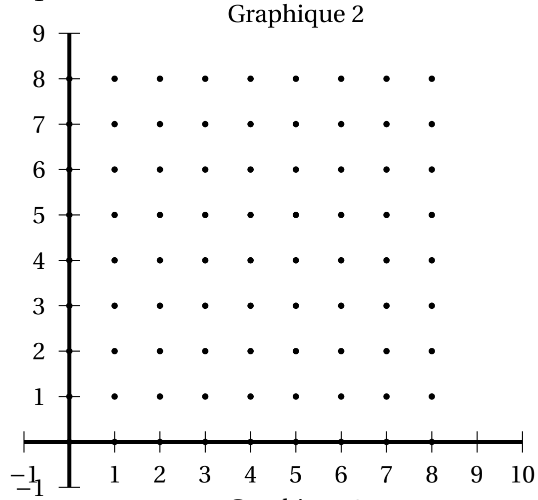
Annexe 1 - exercice 3 (spécialité mathématique) - À rendre avec la copie



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers 17 juin 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points :

$$\text{A}(2 ; 1 ; -1),\ \text{B}(-1 ; 2 ; 4),\ \text{C}(0 ; -2 ; 3),\ \text{D}(1 ; 1 ; -2)$$

et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$.

Pour chacune des huit affirmations suivantes, dire, sans justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et l'un des deux mots **VRAI** *ou* **FAUX** *correspondant à la réponse choisie.*

Une réponse exacte rapporte 0,5 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.*

Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Affirmation 1 : les points A, B et C définissent un plan.
2. Affirmation 2 : la droite (AC) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
3. Affirmation 3 : une équation cartésienne du plan (ABD) est : $x + 8y - z - 11 = 0$.
4. Affirmation 4 : une représentation paramétrique de la droite (AC) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2k \\ y & = & 2+3k \\ z & = & 3-4k \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{R}).$$

5. Affirmation 5 : les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
6. Affirmation 6 : la distance du point C au plan $\mathscr{P}$ est égale à $4\sqrt{6}$
7. Affirmation 7 : la sphère de centre D et de rayon $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan $\mathscr{P}$.
8. Affirmation 8 : le point $\text{E}\left(-\dfrac{4}{3} ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathscr{P}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonornial direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$; l'unité graphique est 1 cm.

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation :

$$z^2 + 4z + 8 = 0.$$

   On donnera les solutions sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

2. On note A et B les points du plan d'affixes respectives : $a = 2 - 2\text{i}$ et $b = -a$.
   Placer ces points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.
   a. Déterminer l'affixe c du point C, image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

b. On note D l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$; démontrer que l'affixe d du point D est $d = 2 - 6\text{i}$.

c. Placer les points C et D sur le graphique Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

3. α étant un nombre réel non nul, on désigne par G_α, le barycentre du système :

$$\{(\text{A}\ ;\ 1)\ ;\ (\text{B}\ ;\ -1)\ ;\ (\text{C}\ ;\ \alpha)\}.$$

a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\text{C}G_\alpha}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\text{BA}}$.

b. En déduire l'ensemble des points G_α lorsque α décrit l'ensemble des réels non nuls. Construire cet ensemble.

c. Pour quelle valeur de α a-t-on $G_\alpha = \text{D}$?

4. On suppose dans cette question que $\alpha = 2$.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + 2\overrightarrow{M\text{C}}\right\| = 4\sqrt{2}.$$

EXERCICE 2 — 5 points

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ l'unité graphique est 2 cm.

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2,\ \ b = 2+3\text{i},\ \ c = 3i,\ \ d = -\frac{5}{2} + 3\text{i}\ \text{ et }\ e = -\frac{5}{2}.$$

1. Placer ces cinq points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.

2. On admet que deux rectangles sont semblables si et seulement si le rapport de la longueur sur la largeur est le même pour les deux rectangles.

Démontrer que OABC et ABDE sont deux rectangles et qu'ils sont semblables.

3. Étude d'une similitude directe transformant OABC en ABDE

a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et A en B.

b. Démontrer que la similitude s transforme OABC en ABDE.

c. Quel est l'angle de la similitude s ?

d. Soit Ω le centre de cette similitude. En utilisant la composée $s \circ s$, démontrer que le point Ω appartient aux droites (OB) et (AD). En déduire la position du point Ω.

4. Étude d'une similitude indirecte transformant OABC en BAED

a. Montrer que l'écriture complexe de la similitude indirecte s' qui transforme O en B et qui laisse A invariant est :

$$z' = -\frac{3}{2}\text{i}\overline{z} + 2 + 3\text{i}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

b. Montrer que s' transforme OABC en BAED.

c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Démontrer que s' est la composée de la réflexion d'axe (OA) suivie d'une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :

- les ingénieurs ;
- les opérateurs de production ;
- les agents de maintenance.

Il y a 8 % d'ingénieurs et 82 % d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production.

I. Partie A

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel dc cette entreprise.
On note :

- M l'évènement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance » ;
- O l'évènement : « le personnel interrogé est un opérateur de production » ;
- I l'évènement : « le personnel interrogé est un ingénieur » ;
- F l'évènement : « le personnel interrogé est une femme ».

1. Construire un arbre pondéré correspondant aux données.

2. Calculer la probabilité d'interroger :

a. un agent de maintenance ;

b. une femme agent de maintenance ;

c. une femme,

II. Partie B

Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue ; des études ont montré que sur une journée :

- la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à $0,002$;
- la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à $0,003$;
- la probabilité qu'une panne se produise est égale à $0,04$.

On note :

- A l'évènement : « l'alarme se déclenche » ;
- B l'évènement : « une panne se produit » ;

1. Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à $0,037$.

2. Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.

3. Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

I. Restitution organisée des connaissances

Prérequis : on rappelle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\text{e}^x}{x} = +\infty$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$.

II. Étude d'une fonction *f*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\;;\;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]0\;;\;+\infty[$ par $u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.
   a. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]0\;;\;+\infty[$.
   b. Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\;;\;+\infty[$.
2. Étude de la fonction f
   a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b. Déterminer la fonction dérivée de f et construire le tableau de variations de la fonction f.
3. Éléments graphiques et tracés.
   a. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.
   b. Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à (Δ).
   c. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite (Δ).

Calculs d'aires

On note α un nombre réel strictement positif et on désigne par $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.

1. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$.
   a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\mathscr{A}(\alpha) = 1 - \dfrac{\ln \alpha}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha}$.
   b. Déterminer la limite ℓ de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse. sera prise en compte dans l'évaluation.*

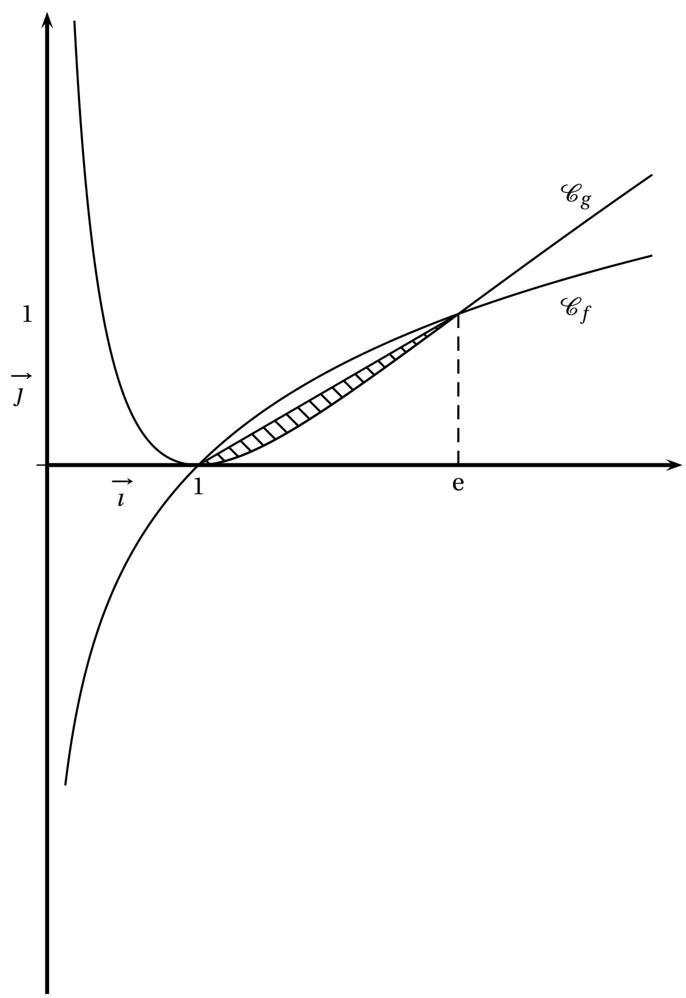
   Démontrer que $\ell = \mathscr{A}\left(\dfrac{1}{\text{e}}\right)$.

Baccalauréat S Métropole 19 juin 2008

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln x)^2.$$



1. On cherche à déterminer l'aire $\mathscr{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.
On note $I = \displaystyle\int_1^{\text{e}} \ln x \,\text{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^{\text{e}} (\ln x)^2 \,\text{d}x$.

a. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.

b. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = \text{e} - 2I$.

c. En déduire J.

d. Donner la valeur de $\mathscr{A}$.

2. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n 'aboutit pas.*

Pour x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$, on note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ de même abscisse. Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$, on considère les points

$$\mathrm{A}(1\ ;\ 1\ ;\ 0), \mathrm{B}(1\ ;\ 2\ ;\ 1) \text{ et } \mathrm{C}(3\ ;\ -1\ ;\ 2).$$

1. a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y - z - 3 = 0$.

2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + 2y - z - 4 = 0$ et $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.

Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est une droite $(\mathscr{D})$, dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2+t \\ y & = & 3 \\ z & = & t \end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R})$$

3. Quelle est l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) ?

4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où X est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

La fonction R définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Restitution organisée de connaissances

a. Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

b. Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t + s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.

2. Dans cette question, on prend $\lambda = 0{,}000\,26$.

a. Calculer $P(X \leqslant 1\,000)$ et $P(X > 1\,000)$.

b. Sachant que l'évènement $(X > 1\,000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'évènement $(X > 2\,000)$.

c. Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2 000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3 000 heures ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$(unité graphique : 1 cm).
Soient A, B et I les points d'affixes respectives 1 + i, $3-\text{i}$ et 2.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$. Le point M' est appelé l'image de M.

1. Faire une figure sur une feuille de papier millimétré et compléter cette figure tout au long de l'exercice.
2. Calculer les affixes des points A′ et B′, images respectives des points A et B. Que remarque-t-on ?
3. Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe -5.
4. **a.** Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $z' + 4 = (z-2)^2$.

   b. En déduire une relation entre $\left|z'+4\right|$ et $|z-2|$ et, lorsque z est différent de 2, une relation entre $\arg\left(z'+4\right)$ et $\arg\,(z-2)$,

   c. Que peut-on dire du point M' lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2 ?
5. Soient E le point d'affixe $2+2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$, J le point d'affixe -4 et E′ l'image de E.

   a. Calculer la distance IE et une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\ ; \overrightarrow{\text{IE}}\right)$.

   b. Calculer la distance JE′ et une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\ ; \overrightarrow{\text{JE}'}\right)$.

   c. Construire à la règle et au compas le point E′ ; on laissera apparents les traits de construction.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 1-\text{i}$ et $z_{\text{B}} = 7+\dfrac{7}{2}\text{i}$.

1. On considère la droite (d) d'équation $4x+3y=1$.
   Démontrer que l'ensemble des points de (d) dont les coordonnées sont entières est l'ensemble des points $M_k(3k+1, -4k-1)$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs.
2. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe de centre A qui transforme B en $M_{-1}(-2\ ;\ 3)$.
3. Soit s la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe
   $$z' = \frac{2}{3}\text{i}z + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\text{i}.$$
   Déterminer l'image de A par s, puis donner la nature et les éléments caractéristiques de s.
4. On note B_1 l'image de B par s et pour tout entier naturel n non nul, B_{n+1} l'image de B_n par s.

   a. Déterminer la longueur AB_{n+1} en fonction de AB_n.

b. À partir de quel entier n le point B_n, appartient t-il au disque de centre A et de rayon 10^{-2} ?

c. Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels A, B_1 et B_n sont alignés.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S La Réunion juin 2008

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.
   a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
   b. Calculer la probabilité des évènements suivants :
      A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;
      B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;
      C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».
2. En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut.
   On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'évènement « le stylo présente un défaut », et E l'évènement « le stylo est accepté ».
   a. Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.
   b. Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.
   c. Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à 0,022 à 10^{-3} près.
3. Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés.

   Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos.
   Comparer ce résultat avec la probabilité de l'évènement A calculée à la question **1. b.**. Quel commentaire peut-on faire ?

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$, construite dans un repère orthonormal, et son tableau de variations sont donnés en annexe,

1. Le tableau de variations de f donne des propriétés sur les variations de la fonction, les limites aux bornes de l'ensemble de définition ainsi que l'extremum.
   Énoncer puis démontrer ces propriétés.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Existe-t-il des tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ qui contiennent le point O origine du repère ? Si oui donner leur équation.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; \infty[$ par

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** Que représente f pour la fonction g ?
   b. En déduire le sens de variations de g sur $]0 ; \infty[$.
2. Interpréter géométriquement les réels $g(3)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$.
3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $g(x) = 1 - \frac{\ln x + 1}{x}$.
   b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 1,\ u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)u_{n-1} + \frac{6}{n}.$$

1. **a.** Calculer u_1.
   b. Les valeurs de $u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}$ sont respectivement égales à :
   45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.
   À partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.
2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
   Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à
   $4n^2 + 12n$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :
   $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.
4. Valider la conjecture émise à la question **1. b.**.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.
On considère le point A de $(\mathscr{C})$ d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

1. Déterminer l'affixe z_{B} du point B image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
   Déterminer l'affixe z_{C} du point C image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2. a. Justifier que ($\mathscr{C}$) est le cercle circonscrit au triangle ABC. Construire les points A, B et C sur la feuille de papier millimétré.

   b. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

3. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2.

   a. Compléter la figure en plaçant les points P, Q et R images respectives des points A, B et C par h.

   b. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier.

4. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

   a. Donner l'écriture complexe de h.

   b. Calculer $z_{\text{A}} + z_{\text{B}} + z_{\text{C}}$. En déduire que A est le milieu du segment [QR].

   c. Que peut-on dire de la droite (QR) par rapport au cercle ($\mathscr{C}$) ?

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonornal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   Soient A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 2 + \text{i}, \quad z_{\text{B}} = 5 + 2\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{C}} = \text{i}.$$

   s_1 désigne la symétrie d'axe (AB).

   a. Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\text{i}\right)\overline{z} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\text{i}\right)$$

   b. En déduire l'affixe de C′, symétrique de C par rapport à (AB).

   c. Démontrer que l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite ($\mathscr{D}$) d'équation $4x + 3y = 1$.

   d. Vérifier que le point C′ appartient à ($\mathscr{D}$).

2. a. Démontrer que les droites ($\mathscr{D}$) et (AB) sont sécantes en un point Ω dont on précisera l'affixe ω.

   b. On désigne par s_2 la symétrie d'axe ($\mathscr{D}$) et par f la transformation définie par $f = s_2 \circ s_1$. Justifier que f est une similitude directe et préciser son rapport.

   c. Déterminer les images des points C et Ω par la transformation f.

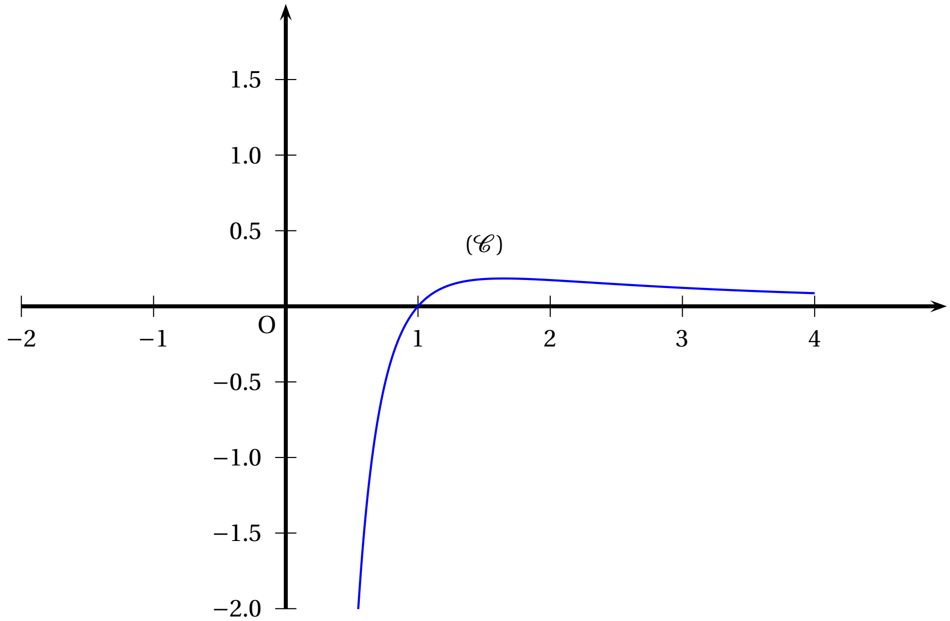
   d. Justifier que f est une rotation dont on donnera le centre.

3. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n 'aboutit pas.*

   a. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solutions de l'équation : $4x + 3y = 1$.

   b. Déterminer les points de ($\mathscr{D}$) à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9.

ANNEXE exercice 2



x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\dfrac{1}{2e}$	↘	0

∽ Baccalauréat S Polynésie juin 2008 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation

$$z^2 - 6z + 13 = 0.$$

   Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A, B, C d'affixes respectives
   $a = 3 - 2\text{i}, b = 3 + 2\text{i}, c = 4\text{i}$.
2. Faire une figure et placer les points A, B, C.
3. Montrer que OABC est un parallélogramme.
4. Déterminer l'affixe du point Ω, centre du parallélogramme OABC.
5. Déterminer et tracer l'ensemble des points M du plan tels que
   $\left\|\overrightarrow{M\text{O}} + \overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = 12$.
6. Soit M un point de la droite (AB). On désigne par β la partie imaginaire de l'affixe du point M. On note N l'image du point M par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   a. Montrer que N a pour affixe $\dfrac{5}{2} - \beta + \dfrac{5}{2}\text{i}$.
   b. Comment choisir β pour que N appartienne à la droite (BC) ?

EXERCICE 2 **4 points**

Dans l'espace rapporté à un repère orthononnal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A(1 ; 2 ; 3), B(0 ; 1 ; 4), C(−1 ; −3 ; 2), D(4 ; −2 ; 5) et le vecteur $\vec{n}\,(2 ; -1 ; 1)$.

1. **a.** Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.
   b. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   c. Déterminer une équation du plan (ABC).
2. Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2-2t\\ y &=& -1+t\\ z &=& 4-t\end{array}\right.$
   avec $t \in \mathbb{R}$.
   Montrer que le point D appartient à la droite (Δ) et que cette droite est perpendiculaire au plan (ABC).
3. Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
   Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABC.

EXERCICE 3 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Soit f la fonction solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -y + 2$ telle que $f(\ln 2) = 1$.
   Proposition 1 : « La courbe représentative de f admet au point d'abscisse 0, une tangente d'équation $y = 2x$ « .

2. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[A ; +\infty[$ où A est un réel strictement positif.

   Proposition 2 : « Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = 0$ ».

3. On admet qu'un bloc de glace fond en perdant 10 % de sa masse par minute.

   Sa masse initiale est de 10 kg.

   Proposition 3 : « À partir de la soixante-dixième minute, sa masse devient inférieure à 1 g ».

4. Soient A et B deux évènements d'un même univers Ω muni d'une probabilité p.

   Proposition 4 : « Si A et B sont indépendants et si $p(\text{A}) = p(\text{B}) = 0{,}4$ alors $p(\text{A} \cup \text{B}) = 0,8$ ».

5. Une usine fabrique des pièces. Une étude statistique a montré que 2 % de la production est défectueuse. Chaque pièce est soumise à un contrôle de fabrication. Ce contrôle refuse 99 % des pièces défectueuses et accepte 97 % des pièces non défectueuses.

   On choisit au hasard une pièce avant son passage au contrôle.

   Proposition 5 : « La probabilité que la pièce soit acceptée est égale à 0,950 8 ».

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. **Proposition 1** : « Pour tout entier naturel n non nul, n et $2n+1$ sont premiers entre eux. »

2. Soit x un entier relatif.

   Proposition 2 : « $x^2 + x + 3 = 0$ (modulo 5) si et seulement si $x \equiv 1$ (modulo 5). »

3. Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{aba7}$.

   Proposition 3 : « Si N est divisible par 7 alors $a + b$ est divisible par 7. »

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

   Proposition 4 : « La similitude directe de rapport 2, d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ et de centre le point d'affixe $1 - \text{i}$ a pour écriture complexe $z' = \left(\sqrt{3}+\text{i}\right)z + \sqrt{3} - \text{i}\sqrt{3}$. »

5. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

   On considère un point A. On désigne par a son affixe. On note s la réflexion d'axe $\left(\text{O} ; \overrightarrow{u}\right)$ et s_A la symétrie centrale de centre A.

   Proposition 5 : « L'ensemble des nombres complexes a tels que $s \circ s_{\text{A}} = s_{\text{A}} \circ s$ est l'ensemble des nombres réels. »

EXERCICE 4 **7 points**

Partie A

Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$.

– Si $u \geqslant 0$ sur $[a \;;\; b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

– Pour tous réels α et β $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right).$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ ainsi que la droite (D) d'équation $y = x$ sont données ci-dessous dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que f est croissante et positive sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ admet pour asymptote la droite (D).

b. Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D).

3. Soit I l'intégrale définie par : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x) - x]\,\mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à calculer I.

a. Donner une interprétation géométrique de I.

b. Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $\ln(1 + t) \leqslant t$. (On pourra étudier les variations de la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = \ln(1 + t) - t$.)

On admettra que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $\dfrac{t}{t+1} \leqslant \ln(1 + t)$.

c. En déduire que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, on a :

$\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x} + 1} \leqslant \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

d. Montrer que $\ln\left(\dfrac{2}{1 + \mathrm{e}^{-1}}\right) \leqslant \mathrm{I} \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

e. En déduire un encadrement de I d'amplitude 0,4 par deux nombres décimaux.

4. On désigne par M et N les points de même abscisse x appartenant respectivement à $(\mathscr{C})$ et (D).

On juge que M et N sont indiscernables sur le graphique lorsque ia distance MN est inférieure à 0,5 mm.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles M et N sont indiscernables.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

ANNEXE à rendre avec la copie

EXERCICE 4