# Baccalauréat S 2010

## L'intégrale de septembre 2009 à juin 2010

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

# Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2009

**EXERCICE 1** **4 points**
**Commun à tous les candidats**

**VRAI OU FAUX**
Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

**PARTIE A**

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n$.

1. La suite $(u_n)$ est bornée.
2. La suite $(u_n)$ converge.
3. La suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ converge.
4. Toute suite $(v_n)$ à termes strictement positifs et décroissante converge vers 0.

**PARTIE B**

1. Si $A$ et $B$ sont deux évènements indépendants avec $P(B) \neq 0$ et $P(B) \neq 1$, alors $P(A \cap B) = P_B(A)$.
2. Si $X$ est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$, alors $P\,(X \in [0,1\,;\,0,6]) = 0,6$.
3. Si $X$ est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres 100 et $\dfrac{1}{3}$, alors $P(X \geqslant 1) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}$.

**EXERCICE 2** **5 points**
**Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A$(1\,;\,-1\,;\,4)$, B$(7\,;\,-1\,;\,-2)$ et C$(1\,;\,5\,;\,-2)$.

1. **a.** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$.
   **b.** Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
   **c.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(1\,;\,1\,;\,1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   **d.** En déduire que $x + y + z - 4 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2t \\ y & = & -2t-2 \\ z & = & -2t-3 \end{array}\right. \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}.$$

   **a.** Montrer que la droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au plan (ABC).
   **b.** Montrer que les coordonnées du point G, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC) sont $(3\,;\,1\,;\,0)$.

**c.** Montrer que G est l'isobarycentre des points A, B et C.

**3.** Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre G passant par A.

**a.** Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.

**b.** Déterminer les coordonnées des points d'intersection E et F, de la droite $\mathcal{D}$ et de la sphère $\mathcal{S}$.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

**L'annexe est à rendre avec la copie**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère la surface $S_1$ d'équation $z = x^2 + y^2$, et la surface $S_2$ d'équation $z = xy + 2x$.

**PARTIE A**

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x = 2$, $E_1$ l'intersection de la surface $S_1$ et du plan $\mathcal{P}$ et $E_2$ l'intersection de la surface $S_2$ et du plan $\mathcal{P}$.
En **annexe**, le plan $\mathcal{P}$ est représenté muni du repère $\left(\text{A} ; \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ où A est le point de coordonnées (2 ; 0 ; 0).

**1.** **a.** Déterminer la nature de l'ensemble $E_1$.

**b.** Déterminer la nature de l'ensemble $E_2$.

**2.** **a.** Représenter les ensembles $E_1$ et $E_2$ sur la feuille **annexe**.

**b.** Dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ donner les coordonnées des points d'intersection B et C des ensembles $E_1$ et $E_2$.

**PARTIE B**

*On pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante :*
« *soient a, b et c des entiers avec a premier. Si a divise bc alors a divise b ou a divise c.* »

L'objectif de cette partie est de déterminer les points d'intersection $M(x ; y ; z)$ des surfaces $S_1$ et $S_2$ où $y$ et $z$ sont des entiers relatifs et $x$ un nombre premier.
On considère un tel point $M(x ; y ; z)$.

**1.** **a.** Montrer que $y(y - x) = x(2 - x)$.

**b.** En déduire que le nombre premier $x$ divise $y$.

**2.** On pose $y = kx$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

**a.** Montrer que $x$ divise 2, puis que $x = 2$.

**b.** En déduire les valeurs possibles de $k$.

**3.** Déterminer les coordonnées possibles de $M$ et comparer les résultats avec ceux de la PARTIE A, question 2. b.

**EXERCICE 3** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = -11+4\mathrm{i},\ z_B = -3-4\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_C = 5+4\mathrm{i}.$$

2. Calculer le module et un argument du quotient $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ et en déduire la nature du triangle ABC.
3. Soit E l'image du point C par la rotation $\mathscr{R}$ de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
   Montrer que l'affixe de E vérifie $z_E = -3 + \left(8\sqrt{2}-4\right)\mathrm{i}$.
   Placer le point E.
4. Soit D l'image du point E par l'homothétie $\mathscr{H}$ de centre B et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   Montrer que D est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
   Placer le point D .
5. **Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.**
   Soit $\mathscr{D}$ la droite parallèle à la droite (EC) passant par le point D. On note F le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et de la droite (BC), I le milieu du segment [EC] et J le milieu du segment [DF].
   Montrer que B, I et J sont alignés.

**EXERCICE 4** **6 points**
**Commun à tous les candidats**

Soit $f$ la fonction définie pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $]0\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = 1 + x\ln x.$$

On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
$T$ est la droite d'équation $y = x$.
La courbe $\mathscr{C}$ et la droite $T$ sont représentées sur le schéma ci-dessous.

1. **a.** Justifier que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
   **b.** En utilisant le signe de $x\ln x$ sur $]0\ ;\ 1]$, montrer que, pour tout nombre réel $x \in ]0\ ;\ 1]$ , on a $f(x) \leqslant 1$.
2. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in ]0\ ;\ 1]$.
   **b.** Vérifier que la droite $T$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
3. On note $g$ la fonction définie pour tout nombre réel $x \in ]0\ ;\ 1]$ par

$$g(x) = 1 + x\ln x - x.$$

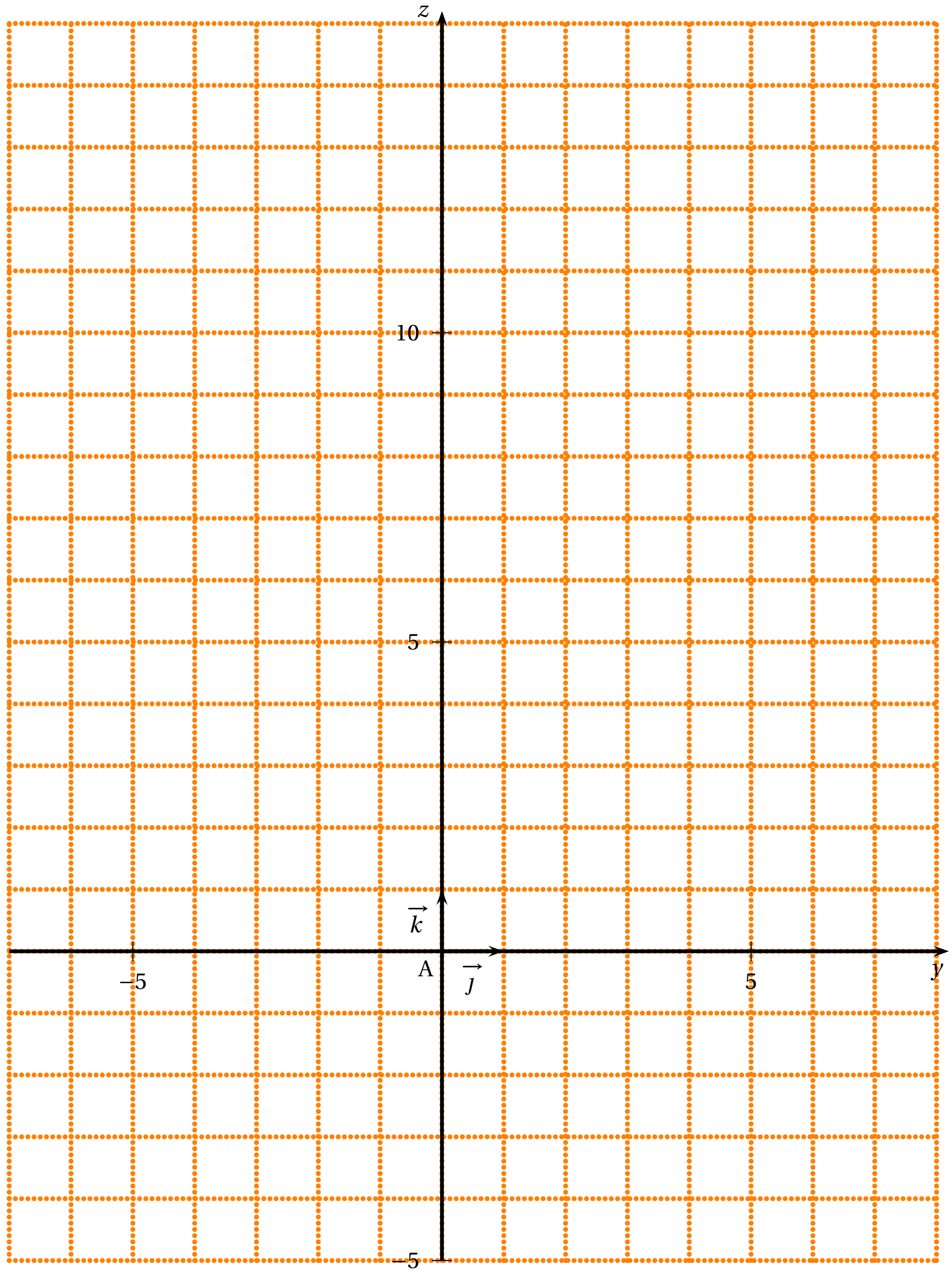
   **a.** Étudier les variations de $g$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$ et dresser le tableau de variation de $g$.
   On ne cherchera pas la limite de $g$ en 0.
   **b.** En déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $T$.
4. Soit $\alpha$ un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$.
   On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_{\alpha}^{1} \left[1 - f(x)\right]\,\mathrm{d}x$.
   **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
   $I(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha + \dfrac{1}{4} - \dfrac{\alpha^2}{4}$.

**b.** Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to 0} I(\alpha)$.

**c.** Interpréter graphiquement le résultat précédent.

**d.** À l'aide des résultats précédents, déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite $T$ et l'axe des ordonnées.

**ANNEXE**
**Exercice 2**
**Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**
**À rendre avec la copie**



**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat S Métropole & La Réunion septembre 2009

## EXERCICE 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + 4\right).$$

**PARTIE A**

1. Étudier le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. Soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
   - **a.** Étudier le sens de variation de la fonction $g$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ .
   - **b.** Montrer que sur l'intervalle $[2 ; 3]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera $\alpha$.
     Donner la valeur arrondie de $\alpha$ à $10^{-1}$ .
   - **c.** Justifier que le nombre réel $\alpha$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

**PARTIE B**

*Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$ par : $u_{n+l} = f(u_n)$.

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction $f$ et la droite $\Delta$ d'équation $y = x$ sont tracées sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).

1. À partir de $u_0$, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\Delta$, on a placé $u_1$ sur l'axe des abscisses. De la même manière, placer les termes $u_2$ et $u_3$ sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.
2. Placer le point $I$ de la courbe $\mathscr{C}$ qui a pour abscisse $\alpha$.
3. 
   - **a.** Montrer que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.
   - **b.** Démontrer que la suite $(u_n)$ converge.
   - **c.** Déterminer sa limite.

## EXERCICE 2 : (5 points)

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k}\right)$.

1. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x + y - 1 = 0$ et par $\mathscr{P}'$ le plan d'équation $y + z - 2 = 0$.
Justifier que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants et vérifier que leur intersection est la droite $\mathscr{D}$, dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{array}\right.$, où $t$ désigne un nombre réel.
2. **a.** Déterminer une équation du plan $\mathscr{R}$ passant par le point O et orthogonal à la droite $\mathscr{D}$.
   **b.** Démontrer que le point I, intersection du plan $\mathscr{R}$ et de la droite $\mathscr{D}$, a pour coordonnées (0 ; 1 ; 1).
3. Soient A et B les points de coordonnées respectives $\left(-\dfrac{1}{2}~;~0~;~\dfrac{1}{2}\right)$ et (1 ; 1 ; 0).
   **a.** Vérifier que les points A et B appartiennent au plan $\mathscr{R}$.
   **b.** On appelle A′ et B′ les points symétriques respectifs des points A et B par rapport au point I.
   Justifier que le quadrilatère ABA' B' est un losange.
   **c.** Vérifier que le point S de coordonnées (2 ; −1 ; 3) appartient à la droite $\mathscr{D}$.
   **d.** Calculer le volume de la pyramide SABA′B′.
   *On rappelle que le volume $V$ d'une pyramide de base d'aire $b$ et de hauteur $h$ est : $V = \dfrac{1}{3} b \times h$.*

## EXERCICE 3 : (4 points)

Commun à tous les candidats

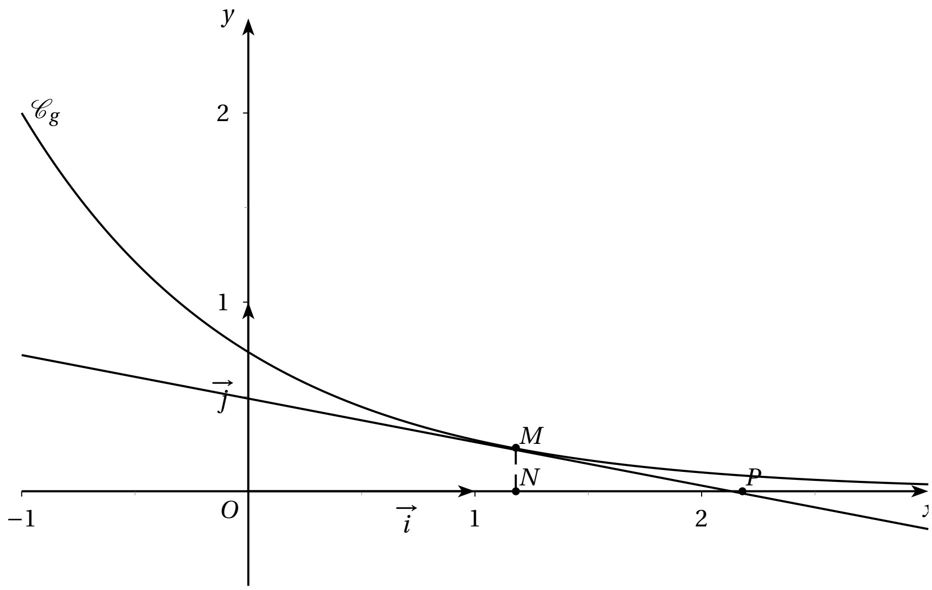
**PARTIE A**

Soit $f$ la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = \text{e}^x$ .
On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $\left(O~;~\vec{i}~;~\vec{j}\right)$.

1. Soit $a$ un nombre réel. Démontrer que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $M$ d'abscisse $a$ coupe l'axe des abscisses au point $P$ d' abscisse $a - 1$.
2. Soit $N$ le projeté orthogonal du point $M$ sur l'axe des abscisses. Démontrer que $\overrightarrow{NP} = -\vec{i}$

**PARTIE B**

Soit $g$ une fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels telle que $g'(x) \neq 0$ pour tout nombre réel $x$.
On appelle $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction $g$ dans un repère orthonormal $\left(O~;~\vec{i}~;~\vec{j}\right)$.
Soit $a$ un nombre réel. On considère le point $M$ de la courbe $\mathscr{C}_g$ d'abscisse $a$ et le point $N$ projeté orthogonal du point $M$ sur l'axe des abscisses.
Soit $P$ le point d'intersection de la tangente $T_a$ à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point $M$ avec l'axe des abscisses.
Le graphique ci-dessous illustre la situation de la partie B.




1. Démontrer que le point P a pour coordonnées $\left(a - \dfrac{g(a)}{g'(a)}\ ;\ 0\right)$.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Existe-t-il une fonction $g$ vérifiant $g(0) = 2$ et $\overrightarrow{NP} = \vec{i}$ ?

## EXERCICE 4 : (5 points)

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.
Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

1. Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.
   **a.** Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.
   **b.** Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur ? On donnera la valeur arrondie du résultat à $10^{-3}$.
2. Le réparateur choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus.
   Quelle est alors la probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut ? On donnera la valeur arrondie à $10^{-3}$.
3. On note $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaison. On fait l'hypothèse que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

   On rappelle que, pour tout nombre réel $k$ positif : $P(X \leqslant k) = \int_0^k \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$

   **a.** Montrer que $P(500 \leqslant X \leqslant 1000) = \mathrm{e}^{-500\lambda} - \mathrm{e}^{-1\,000\lambda}$.
   **b.** *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1 000 kilomètres sans crevaison étant égale à $\frac{1}{4}$, déterminer la valeur arrondie à $10^{-4}$ du paramètre $\lambda$.

## EXERCICE 4 : (5 points)

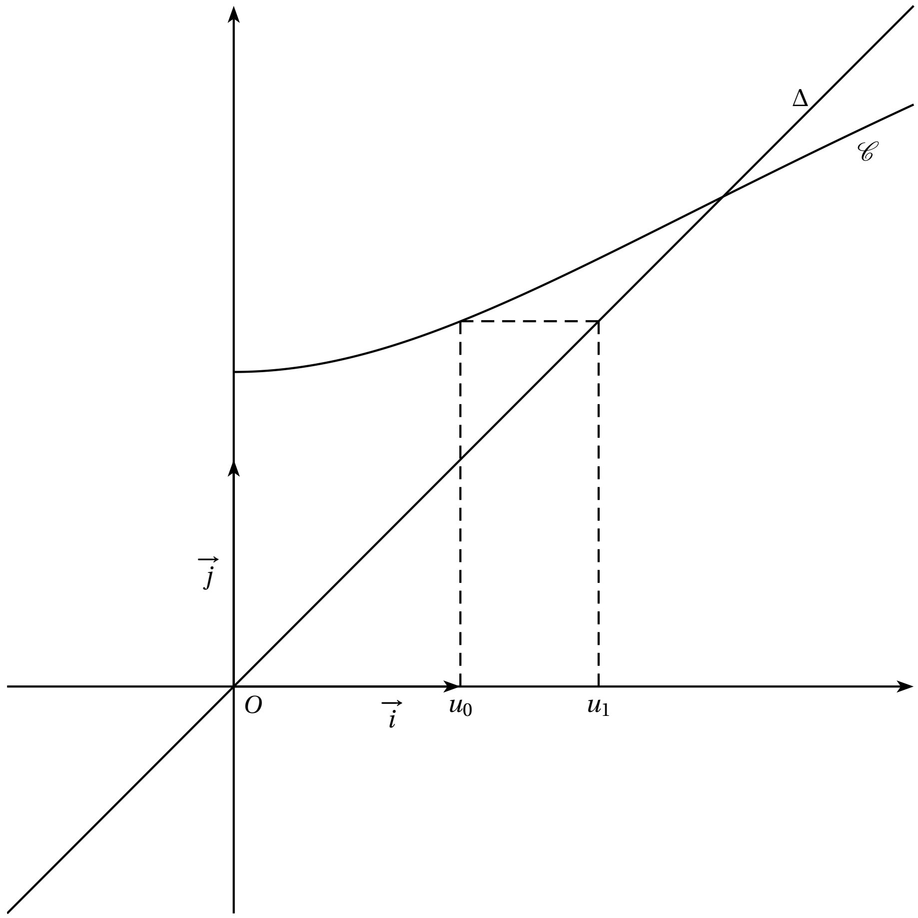
**Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

1. **a.** Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2 009 par 11.
   **b.** Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{10}$ par 11.
   **c.** Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11.
2. On désigne par $p$ un nombre entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul n le nombre $A_n = 2^n + p$.

   On note $d_n$ le PGCD de $A_n$ et $A_{n+1}$.
   **a.** Montrer que $d_n$ divise $2^n$.
   **b.** Déterminer la parité de $A_n$ en fonction de celle de $p$. Justifier.
   **c.** *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer la parité de $d_n$ en fonction de celle de $p$.
   En déduire le PGCD de $2^{2009} + 2009$ et $2^{2010} + 2009$.

**ANNEXE DE L'EXERCICE 1**

(à rendre avec la copie)



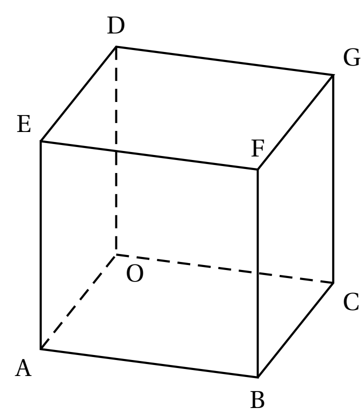
# ∽ Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie ∾ septembre 2009

**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

On considère le cube OABCDEFG d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.
Il n'est pas demandé de rendre le graphique complété avec la copie.
Soient les points P et Q tels que $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OQ} = 4\overrightarrow{OC}$.
On appelle R le barycentre des points pondérés (B, $-1$) et (F, 2).
L'espace est muni du repère orthonormal $\left(O~;~\overrightarrow{OA},~\overrightarrow{OC},~\overrightarrow{OD}\right)$.

1. **a.** Démontrer que le point R a pour coordonnées (1 ; 1 ; 2).
   **b.** Démontrer que les points P, Q et R ne sont pas alignés.
   **c.** Quelle est la nature du triangle PQR ?
2. **a.** Démontrer qu'une équation du plan (PQR) est $4x + 2y + z - 8 = 0$.
   **b.** Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (PQR).
3. On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (PQR).
   **a.** Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (DH).
   **b.** Déterminer les coordonnées du point H.
   **c.** Démontrer que le point H appartient à la droite (PR).




**EXERCICE 2** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

*Pour chaque question, deux propositions sont énoncées.*
*Il s'agit de dire, sans le justifier, si chacune d'elles est vraie ou fausse.* ***Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la proposition et la mention VRAIE ou FAUSSE****.*

*Pour chaque question, il est compté* 1 *point si les deux réponses sont exactes,* 0,5 *point pour une réponse exacte et une absence de réponse et* 0 *point sinon.*

| | | |
|---|---|---|
| **Question A**<br>Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher. On tire deux boules au hasard simultanément. On considère les évènements :<br>A : « les deux boules tirées sont de la même couleur » ;<br>B : « une seule des deux boules tirées est rouge ». | Proposition 1<br>La probabilité de A est égale à $\dfrac{3}{7}$. | Proposition 2<br>La probabilité de B est égale à $\dfrac{1}{7}$. |
| **Question B**<br>Soient A, B et C trois évènements d'un même univers $\Omega$ muni d'une probabilité $P$.<br>On sait que :<br>• A et B sont indépendants ;<br>• $P(\text{A}) = \dfrac{2}{5}$ ; $P(\text{A} \cup \text{B}) = \dfrac{3}{4}$ ;<br>• $P(\text{C}) = \dfrac{1}{2}$ ; $P(\text{A} \cap \text{C}) = \dfrac{1}{10}$. | Proposition 3<br>$P(\text{B}) = \dfrac{7}{12}$ | Proposition 4<br>$P\left(\overline{\text{A} \cup \text{C}}\right) = \dfrac{2}{5}$.<br>$\overline{\text{A} \cup \text{C}}$ désigne l'évènement contraire de $\text{A} \cup \text{C}$. |
| **Question C**<br>Une variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ où $n$ est égal à 4 et $p$ appartient à $]0\,;\,1[$. | Proposition 5<br>Si $P(X = 1) = 8P(X = 0)$ alors $p = \dfrac{2}{3}$. | Proposition 6<br>Si $p = \dfrac{1}{5}$ alors $P(X = 1) = P(X = 0)$. |
| **Question D**<br>La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire $X$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,07$ sur $[0\,;\,+\infty[$.<br>On rappelle que pour tout $t > 0$, la probabilité de l'évènement $(X \leqslant t)$ est donnée par :<br>$P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ (avec $\lambda = 0,07$). | Proposition 7<br>La probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans est égale à 0,5 à $10^{-2}$ près. | Proposition 8<br>Sachant que l'appareil a fonctionné 10 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 10 ans est égale à 0,5 à $10^{-2}$ près. |

## EXERCICE 3 — 5 points

**Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire**

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.
On appelle $(\Gamma)$ le cercle de centre O et de rayon 1.

*On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.*

On appelle $F$ l'application du plan $P$ privé du point O dans $P$ qui, à tout point $M$ différent de O, d'affixe $z$, associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z'$ définie par :

$$z' = z + \text{i} - \frac{1}{z}.$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \text{i}$ et $b = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A′ et B′ par $F$ d'affixes respectives $a'$ et $b'$.
   **a.** Calculer $a'$ et $b'$.
   **b.** Placer les points A, A′ B et B′.

**c.** Démontrer que $\dfrac{-b}{b'-b} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$.

**d.** En déduire la nature du triangle OBB$'$.

**2.** On recherche l'ensemble (E) des points du plan $P$ privé du point O qui ont pour image par $F$, le point O.

**a.** Démontrer que, pour tout nombre complexe $z$,

$$z^2 + \mathrm{i}z - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right).$$

**b.** En déduire les affixes des points de l'ensemble (E).

**c.** Démontrer que les points de (E) appartiennent à $(\Gamma)$.

**3.** Soit $\theta$ un réel.

**a.** Démontrer que si $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ alors $z' = (2\sin\theta + 1)\mathrm{i}$.

**b.** En déduire que si $M$ appartient au cercle $(\Gamma)$ alors $M'$ appartient au segment [A$'$C] où C a pour affixe $-\mathrm{i}$.

## EXERCICE 4 — 7 points

Pour tout entier naturel $n$, on considère la fonction $f_n$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = -nx - x\ln x.$$

On note $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction $f_n$, dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Les courbes $(\mathscr{C}_0)$, $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ représentatives des fonctions $f_0$, $f_1$ et $f_2$ sont données en annexe.
On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.

**Partie A : Étude de la fonction $f_0$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f_0(x) = -x\ln x$.**

**1.** Déterminer la limite de $f_0$ en $+\infty$.

**2.** Étudier les variations de la fonction $f_0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

**Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction $f_n$, $n$ entier naturel.**

Soit $n$ un entier naturel.

**1.** Démontrer que pour $x \in ]0\,;\,+\infty[$, $f_n'(x) = -n-1-\ln x$ où $f_n'$ désigne la fonction dérivée de $f_n$.

**2.** **a.** Démontrer que la courbe $(\mathscr{C}_n)$ admet en un unique point $A_n$ d'abscisse $\mathrm{e}^{-n-1}$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

**b.** Prouver que le point $A_n$ appartient à la droite $\Delta$ d'équation $y = x$.

**c.** Placer sur la figure en annexe les points $A_0$, $A_1$, $A_2$.

**3.** **a.** Démontrer que la courbe $(\mathscr{C}_n)$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté $B_n$, dont l'abscisse est $\mathrm{e}^{-n}$.

**b.** Démontrer que la tangente à $(\mathscr{C}_n)$ au point $B_n$ a un coefficient directeur indépendant de l'entier $n$.

**c.** Placer sur la figure en annexe les points $B_0$, $B_1$, $B_2$.

**Partie C : Calculs d'aires**

Pour tout entier naturel $n$, on considère le domaine du plan $D_n$ délimité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C}_n)$ et les droites d'équation $x = \mathrm{e}^{-n-1}$ et $x = \mathrm{e}^{-n}$.
On note $I_n$ l'aire en unités d'aires du domaine $D_n$.

1. Hachurer, sur la figure donnée en annexe, les domaines $D_0$, $D_1$, $D_2$.
2. a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} x\ln x\,\mathrm{d}x$.

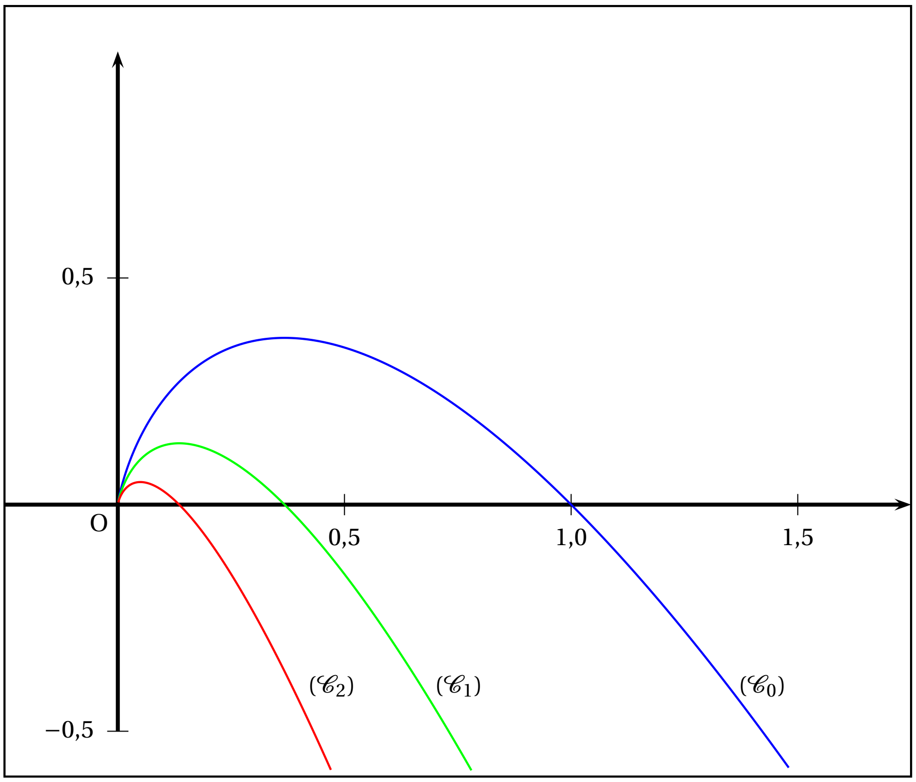
   b. En déduire que $I_0 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4\mathrm{e}^2}$.

   c. On admet que le domaine $D_{n+1}$ est l'image du domaine $D_n$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
   Exprimer $I_1$ et $I_2$ en fonction de $I_0$.

**ANNEXE**

**Cette page sera complétée et remise à la fin de l'épreuve**

**Exercice 4**



**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat S Amérique du Sud Novembre 2009

## EXERCICE 1 6 points

**Commun à tous les candidats**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On prend 1 cm comme unité.

### Partie A — Restitution organisée de connaissances

Soit D le point de coordonnées $(x_{\mathrm{D}},\ y_{\mathrm{D}},\ z_{\mathrm{D}})$ et $P$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$, où $a$, $b$ et $c$ sont des réels qui ne sont pas tous nuls.
Démontrer que la distance du point D au plan $P$ est donnée par :

$$d(\mathrm{D}, P)=\frac{\left|ax_{\mathrm{D}}+by_{\mathrm{D}}+cz_{\mathrm{D}}+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

### Partie B

On considère les points A de coordonnées $(3\ ;\ -2\ ;\ 2)$, B de coordonnées $(6\ ;\ -2\ ;\ -1)$, C de coordonnées $(6\ ;\ 1\ ;\ 5)$ et D de coordonnées $(4\ ;\ 0\ ;\ -1)$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle. En déduire l'aire du triangle ABC.
2. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$ est normal au plan (ABC).
   Déterminer une équation du plan (ABC).
3. Calculer la distance du point D au plan (ABC).
   Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

### Partie C

Soit $Q$ le plan d'équation $x-2y+z-5=0$.

1. Déterminer la position relative des deux plans $Q$ et (ABC).
2. $Q$ coupe les droites (DA), (DB) et (DC) respectivement en E, F et G.
   Déterminer les coordonnées de E et montrer que E appartient au segment [DA].
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer le volume du tétraèdre EFGD.

## EXERCICE 2 5 points

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et $(-2)$ et on définit l'application $f$ qui à tout point $M$ d'affixe $z$ et différent de A associe le point $M'$ d'affixe

$$z' = \frac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2}.$$

1. **a.** Déterminer l'affixe du point P$'$ image par $f$ du point P d'affixe $(1+\text{i})$.
   **b.** Montrer que les droites (AP) et (BP$'$) sont parallèles.
   **c.** Établir que les droites (AP) et (PP$'$) sont perpendiculaires.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par $f$ (c'est-à-dire l'ensemble des points tels que M'=M).

On cherche à généraliser les propriétés **1.b** et **1.c** pour obtenir une construction de l'image $M'$ d'un point $M$ quelconque du plan.

3. **a.** Montrer que pour tout nombre complexe $z$, le nombre $(z-2)\left(\overline{z}-2\right)$ est réel.
   **b.** En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est réel.
   **c.** Montrer que les droites (A$M$) et (B$M'$) sont parallèles.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit $M$ un point quelconque non situé sur la droite (AB). Généraliser les résultats de la question **1.c**.
5. Soit $M$ un point distinct de A. Déduire des questions précédentes une construction du point $M'$ image de $M$ par $f$. Réaliser une figure pour le point Q d'affixe $3-2\text{i}$.

## EXERCICE 2 5 points

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On considère un carré direct ABCD (c'est à dire un carré ABCD tel que
$\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{2}\quad [2\pi]$) de centre I.

Soit J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [DA].
$\Gamma_1$ désigne le cercle de diamètre [AI] et $\Gamma_2$ désigne le cercle de diamètre [BK].

**Partie A**

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe $s$ telle que $s(\text{A}) = \text{I}$ et $s(\text{B}) = \text{K}$.
2. Montrer que les cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ se coupent en deux points distincts : le point J et le centre $\Omega$ de la similitude directe $s$.
3. **a.** Déterminer les images par $s$ des droites (AC) et (BC). En déduire l'image du point C par $s$.
   **b.** Soit E l'image par $s$ du point I. Démontrer que E est le milieu du segment [ID].

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Démontrer que les points A, Ω et E sont alignés.
(On pourra considérer la transformation $t = s \circ s$).

**Partie B**

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct $\left(\text{A}\,;\ \frac{1}{10}\overrightarrow{\text{AB}}\ ;\ \frac{1}{10}\overrightarrow{\text{AD}}\right)$.

1. Donner les affixes des points A, B, C et D.
2. Démontrer que la similitude directe $s$ a pour écriture complexe

$$z' = \frac{\text{i}}{2}z + 5 + 5\text{i}.$$

3. Calculer l'affixe $\omega$ du centre Ω de $s$.
4. Calculer l'affixe $z_{\text{E}}$ du point E et retrouver l'alignement des points A, Ω et E.
5. Démontrer que les droites (AE), (CL) et (DJ) sont concourantes au point Ω.

## EXERCICE 3 — 5 points

**Commun à tous les candidats**

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à $10^{-2}$ près de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\text{e}^{-x}}{2-x}\right) \text{d}x$$

1. a. Étudier les variations de la fonction $f\ : x \longmapsto f(x) = \frac{\text{e}^{-x}}{2-x}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
   b. Montrer que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, on a $\frac{1}{\text{e}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
2. Soit $J$ et $K$ les intégrales définies par $J = \int_0^1 (2+x)\text{e}^{-x}\,\text{d}x$ et $K = \int_0^1 x^2 f(x)\,\text{d}x$.
   a. Au moyen d'une intégration par parties, prouver que $J = 3 - \frac{4}{\text{e}}$.
   b. Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que $\frac{1}{3\text{e}} \leqslant K \leqslant \frac{1}{6}$.
   c. Démontrer que $J + K = 4I$.
   d. Déduire de tout ce qui précède un encadrement de $I$, puis donner une valeur approchée à $10^{-2}$ près de $I$.

## EXERCICE 4 — 4 points

**Commun à tous les candidats**

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites ($A$, $B$ et $C$), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot « $BBAAC$ » signifie que le candidat a répondu $B$ aux première et deuxième questions, $A$ aux troisième et quatrième questions et $C$ à la cinquième question.

1. **a.** Combien y-a-t'il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?

   **b.** On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

   Calculer la probabilité des évènements suivants :

   $E$ : « le candidat a exactement une réponse exacte ».

   $F$ : « le candidat n'a aucune réponse exacte ».

   $G$ : « le mot-réponse du candidat est un palindrome » (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, « $BACAB$ » est un palindrome).

2. Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

   On désigne par $X$ le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.

   **a.** Justifier que la variable aléatoire $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \dfrac{32}{243}$.

   **b.** Calculer la probabilité, arrondie à $10^{-2}$, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.

**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2009

**EXERCICE 1** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2\text{e}^{-x}.$$

On note $f'$ la fonction dérivée de $f$.

1. **a.** Déterminer les limites de la fonction $f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

   **b.** Calculer $f'(x)$ et déterminer le tableau de variations de $f$.

   **c.** En déduire le signe de $f$ sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout nombre réel $a$, on considère l'intégrale : $I(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\text{d}x$.

   **a.** Donner selon les valeurs de $a$ le signe de $I(a)$.

   **b.** À l'aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel $a$ :

   $$I(a) = 2 - 2\text{e}^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$

   **c.** En déduire pour tout nombre réel $a$ :

   $$\frac{1}{2}\text{e}^{a}I(a) = \text{e}^{a} - \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$

3. Soient $g$ et $h$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \text{e}^x$ et $h(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $g$ et $\mathscr{P}$ celle de $h$.

   **a.** Montrer que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ ont la même tangente au point d'abscisse 0.

   **b.** Déduire des questions précédentes la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est $0,3$.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est $0,8$.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel $n$ non nul, on considère l'évènement :

- $T_n$ : « le manchot utilise le toboggan lors de son $n$-ième passage. »
- $P_n$ : « le manchot utilise le plongeoir lors de son $n$-ième passage. »

On considère alors la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

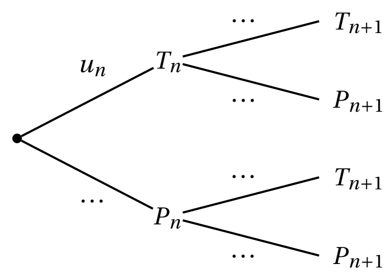
$$u_n = p\left(T_n\right)$$

où $p\left(T_n\right)$ est la probabilité de l'évènement $T_n$.

1. **a.** Donner les valeurs des probabilités $p\left(T_1\right)$, $p\left(P_1\right)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}\left(T_2\right)$, $p_{P_1}\left(T_2\right)$.

   **b.** Montrer que $p\left(T_2\right) = \dfrac{1}{4}$.

   **c.** Recopier et compléter l'arbre suivant :




   **d.** Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.

   **e.** À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite $(u_n)$.

2. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

   **a.** Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$. Préciser son premier terme.

   **b.** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

   **c.** Calculer la limite de la suite $(u_n)$. Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en 1. e. ?

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit $n$ un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation notée $(E)$ :

$$3x + 7y = 10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

   **a.** Déterminer un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tels que $3u + 7v = 1$.
   En déduire une solution particulière $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ de l'équation $(E)$.

   **b.** Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions de $(E)$.

2. On considère l'équation notée $(G)$

$$3x^2 + 7y^2 = 10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

   **a.** Montrer que $100 \equiv 2$ (modulo 7).
   Démontrer que si $(x\ ;\ y)$ est solution de $(G)$ alors $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo 7).

**b.** Reproduire et compléter le tableau suivant :

| Reste de la division euclidienne de $x$ par 7 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7. | | | | | | | |

**c.** Démontrer que $2^n$ est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
En déduire que l'équation $(G)$ n'admet pas de solution.

**EXERCICE 3** **5 points**
**Commun à tous les candidats**

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
On considère le cube ABCDEFGH représenté sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.
On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [BF] et [HF].

**1.** Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

**2.** Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(2\,;\,1\,;\,1)$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$ et à $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$.
En déduire qu'une équation du plan (IJK) est : $4x+2y+2z-5=0$.

**3. a.** Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

**b.** En déduire que le point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD) est le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{4}\,;\,1\,;\,0\right)$.

**c.** Placer le point R sur la figure.

**4.** Tracer sur la figure la section du cube par le plan (IJK). On peut répondre à cette question sans avoir traité les précédentes.

**5. a.** Montrer que la distance du point G au plan (IJK) est $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

**b.** Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre G passant par F.
Justifier que la sphère $\mathcal{S}$ et le plan (IJK) sont sécants.
Déterminer le rayon de leur intersection.

**EXERCICE 4** **5 points**
**Commun à tous les candidats**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\,\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A et B d' affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{B}} = 2\mathrm{i}$.

**1. a.** Écrire $z_{\mathrm{A}}$ et $z_{\mathrm{B}}$ sous forme exponentielle.

**b.** Placer les points A et B sur une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.

**c.** Déterminer la nature du triangle OAB.

**2.** On note $r$ la rotation de centre O qui transforme A en B. Pour tout point $M$ d' affixe $z$, on note $M'$ l'image de $M$ par $r$ et $z'$ l'affixe du point $M'$.

**a.** Calculer un argument du quotient $\dfrac{z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}}$. Interpréter géométriquement ce résultat.

**b.** En déduire l'écriture complexe de la rotation $r$.

**3.** Soient $\Gamma$ le cercle de centre A passant par O et $\Gamma'$ le cercle de centre B passant par O.
Soit C le deuxième point d'intersection de $\Gamma$ et $\Gamma'$ (autre que O). On note $z_{\mathrm{C}}$ son affixe.

**a.** Justifier que le cercle $\Gamma'$ est l'image du cercle $\Gamma$ par la rotation $r$.

**b.** Calculer l'affixe $z_{\text{I}}$ du milieu I de [AB].

**c.** Déterminer la nature du quadrilatère OACB.

**d.** En déduire que I est le milieu de [OC] puis montrer que l'affixe de C est :

$$z_{\text{C}} = 1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)\text{i}.$$

**4.** Soit D le point d'affixe $z_{\text{D}} = 2\text{i}\sqrt{3}$.

**a.** Justifier que le point D appartient au cercle $\Gamma$. Placer D sur la figure.

**b.** Placer D$'$ image de D par la rotation $r$ définie à la question 2.
On note $z_{\text{D}'}$ l'affixe de D$'$.
Montrer que $z_{\text{D}'} = -\sqrt{3} + 3\text{i}$.

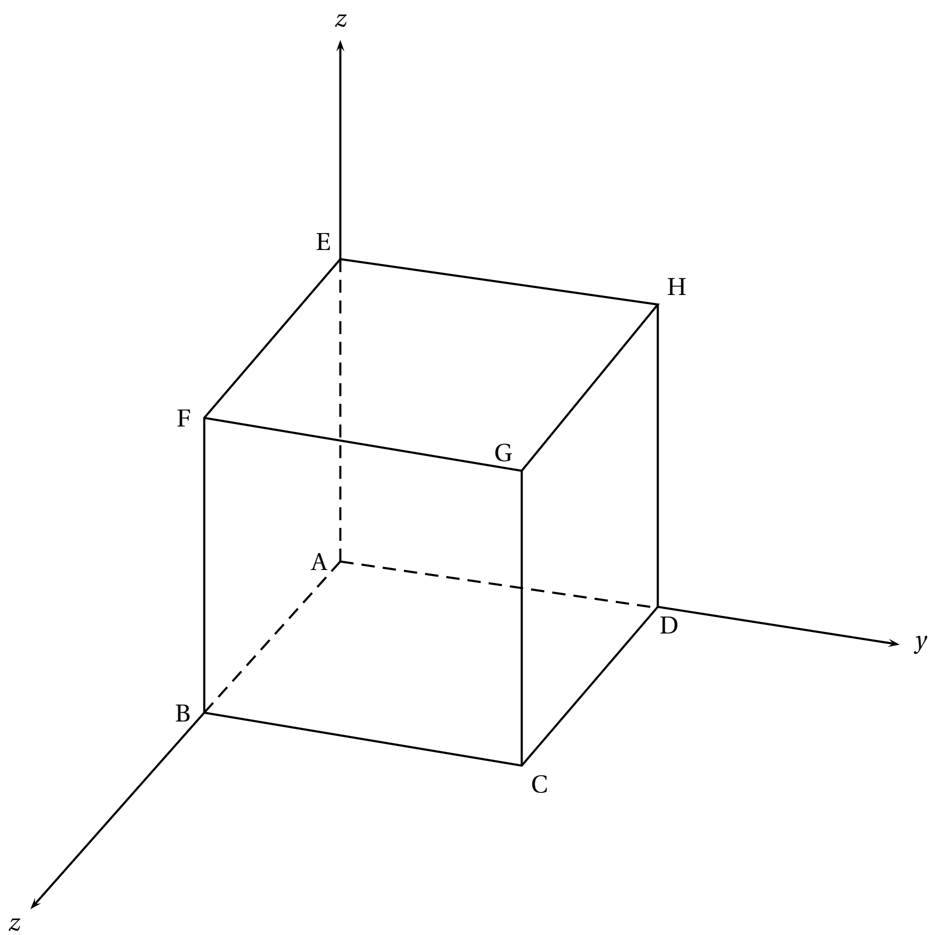
**5.** Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{DC}}$ et $\overrightarrow{\text{DD}'}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire ?

**ANNEXE**

**Exercice 3**

**Commun à tous les candidats**

**À rendre avec la copie**



# ∽ Baccalauréat S Pondichéry 21 avril 2010 ∾

**Exercice 1** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A - Restitution organisée de connaissances :**

Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$ et $f$ et $g$ deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. On suppose connus les résultats suivants :

- $\displaystyle\int_a^b \left[f(t)+g(t)\right]\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $f(t) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Montrer que : si pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

**Partie B**

Soit $n$ un entier naturel non nul. On appelle $f_n$ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \ln\left(1+x^n\right)$$

et on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,\mathrm{d}x$.

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de $f_1$ en $+\infty$.

   **b.** Étudier les variations de $f_1$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

   **c.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_1$ et interpréter graphiquement le résultat.

   (Pour le calcul de $I_1$ on pourra utiliser le résultat suivant :

   pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$)
2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel non nul $n$, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2$.

   **b.** Étudier les variations de la suite $(I_n)$

   **c.** En déduire que la suite $(I_n)$ est convergente.
3. Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

   $$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

   **a.** Étudier le sens de variation de $g$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

   **b.** En déduire le signe de $g$ sur $[0\,;\,+\infty[$. Montrer alors que pour tout entier naturel $n$ non nul, et pour tout $x$ réel positif, on a

   $$\ln\left(1+x^n\right) \leqslant x^n.$$

   **c.** En déduire la limite de la suite $(I_n)$.

**Exercice 2** **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

*Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une dé monstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.*

1. La droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t+2\\ y &=& -2t\\ z &=& 3t-1\end{array}\right.$ , $t \in \mathbb{R}$ est parallèle au plan dont une équation cartésienne est : $x+2y+z-3=0$.
2. Les plans $P$, $P'$, $P''$ d'équations respectives $x-2y+3z=3$, $\quad 2x+3y-2z=6$ et $4x-y+4z=12$ n'ont pas de point commun.
3. Les droites de représentations paramétriques respectives
$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2-3t\\ y &=& 1+t\\ z &=& -3+2t\end{array}\right.$ , $t \in \mathbb{R}$ et $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 7+2u\\ y &=& 2+2u\\ z &=& -6-u\end{array}\right.$ , $u \in \mathbb{R}$ sont sécantes.
4. On considère les points :
A, de coordonnées $(-1~;~0~;~2)$, B, de coordonnées $(1~;~4~;~0)$, et C, de coordonnées $(3~;~-4~;~-2)$.
Le plan (ABC) a pour équation $x+z=1$.
5. On considère les points :
A, de coordonnées $(-1~;~1~;~3)$, B, de coordonnées $(2~;~1~;~0)$, et C, de coordonnées $(4~;~-1~;~5)$.
On peut écrire C comme barycentre des points A et B.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

*Les parties A et B peuvent, dans leur quasi-totalité, être traitées de façon indépendante.*

**Partie A**

Dans cette partie, on se propose d'étudier des couples $(a,~b)$ d'entiers strictement positifs, tels que :

$$a^2 = b^3$$

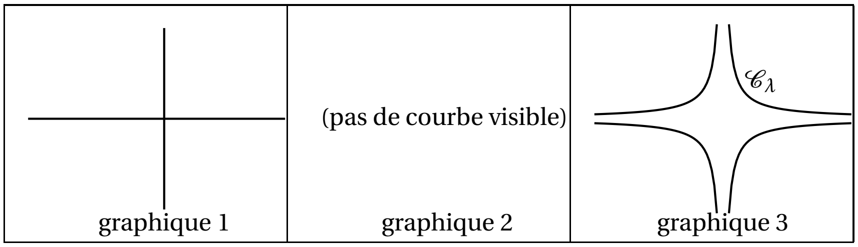
Soit $(a,~b)$ un tel couple et $d = \text{PGCD}(a,~b)$. On note $u$ et $v$ les entiers tels que $a = du$ et $b = dv$.

1. Montrer que $u^2 = dv^3$.
2. En déduire que $v$ divise $u$, puis que $v = 1$.
3. Soit $(a,~b)$ un couple d'entiers strictement positifs.
Démontrer que l'on a $a^2 = b^3$ si et seulement si $a$ et $b$ sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse. sera prise en compte dans l'évaluation.*
Montrer que si $n$ est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors $n \equiv 0 \quad [7]$ ou $n \equiv 1 \quad [7]$.

**Partie B**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$, on considère la surface $S$ d'équation $x^2 \times y^2 = z^3$.
Pour tout réel $\lambda$, on note $\mathscr{C}_\lambda$ la section de $S$ par le plan d'équation $z = \lambda$.

1. Les graphiques suivants donnent l'allure de $\mathscr{C}_\lambda$ tracée dans le plan d'équation $z = \lambda$, selon le signe de $\lambda$.
Attribuer à chaque graphique l'un des trois cas suivants : $\lambda < 0$, $\lambda = 0, \lambda > 0$, et justifier l'allure de chaque courbe.




**2.** **a.** Déterminer le nombre de points de $\mathscr{C}_{25}$ dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.

**b.** *Pour cette question, on pourra éventuellement s'aider de la question* 3 *de la partie A.*

Déterminer le nombre de points de $\mathscr{C}_{2010}$ dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs

**EXERCICE 3** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

Une urne contient 10 boules blanches et $n$ boules rouges, $n$ étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.
On désigne par $X$ la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

*Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.*

**1.** Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

**a.** Démontrer que : $P(X=-1)=\dfrac{20n}{(n+10)(n+9)}$.

**b.** Calculer, en fonction de $n$ la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable $X$.

**c.** Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$ vaut :

$$\mathrm{E}(X)=\frac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}.$$

**d.** Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

**2.** Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier $n$ afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à $0,999$.

**3.** On suppose que $n = 1\,000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1 000 boules rouges.

Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complètement défavorable et décide d' effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.

Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire $Z$ suivant la loi :

$$\text{pour tout } k\in\mathbb{N},\ p(Z\leqslant k)=\int_0^k 0,01\mathrm{e}^{-0,01x}\,\mathrm{d}x.$$

On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.

**a.** Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(Z \leqslant 50)$.

**b.** Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement : « le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche » sachant l'évènement « le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche ».

**EXERCICE 4** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$.

**1.** Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

**2.** **a.** Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.

**b.** En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.

**c.** En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**3.** On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$.

**a.** Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

**b.** En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$.

**c.** Soit la somme $S_n$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Déterminer l'expression de $S_n$ en fonction de $n$.

# Baccalauréat S Amérique du Nord 3 juin 2010

**EXERCICE 1** **4 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

$$A(1\,;\,-2\,;\,4) \quad B(-2\,;\,-6\,;\,5) \quad C(-4\,;\,0\,;\,-3).$$

1. a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\,(1\,;\,-1\,;\,-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   c. Déterminer une équation du plan (ABC).
2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).
   b. Déterminer les coordonnées du point O′ projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
3. On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur La droite (BC).
   Soit $t$ le réel tel que $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$.
   a. Démontrer que $t = \dfrac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$.
   b. En déduire le réel $t$ et les coordonnées du point H.

**EXERCICE 2** **3 points**

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.
20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges.
Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?
2. On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge.
   Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\dfrac{2}{7}$.
3. Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   On effectue $n$ tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).
   a. Exprimer en fonction de $n$ la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des $n$ tirages.
   b. Déterminer l'entier $n$ à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des $n$ tirages est supérieure ou égale à $0,99$.

**EXERCICE 3** **5 points**
**Enseignement obligatoire**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
On considère les points A d'affixe i, B d'affixe $-2\text{i}$ et D d'affixe 1.
On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.
Soit $f$ l'application qui à tout point $M$ d'affixe $z (z \neq \text{i})$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par :

$$z' = \frac{2z - \text{i}}{\text{i}z + 1}.$$

**1.** Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + \text{i})$.

**2.** Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D$'$ associé au point D par l'application $f$.

**3.** **a.** Démontrer que, pour tout nombre complexe $z$ différent de i, $\left(z' + 2\text{i}\right)(z - \text{i}) = 1$.

**b.** En déduire que pour tout point $M$ d'affixe $z (z \neq \text{i})$ :

$$\text{BM}' \times \text{AM} = 1$$
et $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{B}M'}\right) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{A}M}\right) + k \times 2\pi$ où $k$ est un entier relatif.

**4.** **a.** Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

**b.** En utilisant les résultats de la question 3. b., placer le point E$'$ associé au point E par l'application $f$. On laissera apparents les traits de construction.

**5.** Quelle est la nature du triangle BD$'$ E$'$ ?

## EXERCICE 3 — 5 points

**Enseignement de spécialité**

### Partie A

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x,\ y)$ solutions de l'équation

$$(\text{E}) : \quad 16x - 3y = 4.$$

**1.** Vérifier que le couple (1, 4) est une solution parliculière de (E).

**2.** Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

### Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On considère la transformation $f$ du plan, qui à tout point $M$ d' affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par

$$z' = \sqrt{2}\text{e}^{\frac{3\text{i}\pi}{8}} z.$$

On définit une suite de points $(M_n)$ de la manière suivante :
le point $\text{M}_0$ a pour afflxe $z_0 = \text{i}$ et pour tout entier naturel $n,\ M_{n+1} = f\left(M_n\right)$.
On note $z_n$ l'affixe du point $M_n$
Les points $\text{M}_0$, $\text{M}_1$, $\text{M}_2$ et $\text{M}_3$ sont placés sur la figure donnée en annexe page 6.

**1.** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $f$.

**2.** On note $g$ la transformation $f \circ f \circ f \circ f$.

**a.** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $g$.

**b.** En déduire que pour tout entier naturel $n$, $OM_{n+4} = 4OM_n$ et que $\left(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+4}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ où $k$ est un entier relatif.

**c.** Compléter la figure en construisant les points $M_4$, $M_5$ et $M_6$.

**3.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8}\right)}$.

**4.** Soient deux entiers naturels $n$ et $p$ tels que $p \leqslant n$.

**a.** Exprimer en fonction de $n$ et $p$ une mesure de $\left(\overrightarrow{OM_p}, \overrightarrow{OM_n}\right)$.

**b.** Démontrer que les points O, $M_p$ et $M_n$ sont alignés si et seulement si $n - p$ est un multiple de 8.

**5.** Déterminer l'ensemble des entiers naturels $n$ tels que le point $M_n$ appartienne à la demi-droite $[Ox)$. On pourra utiliser la partie A.

**EXERCICE 4** **8 points**

À tout entier naturel $n$ non nul, on associe la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction $f_n$ dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont données en annexe.

**Partie A :** Étude de la fonction $f_1$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \dfrac{4e^x}{e^x + 7}$

**1.** Vérifier que pour tout réel $x$, $f_1(x) = \dfrac{4}{1 + 7e^{-x}}$.

**2.** **a.** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_1$ admet deux asymptotes dont on précisera des équations.

**b.** Démontrer que la fonction $f_1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**c.** Démontrer que pour tout réel $x$, $0 < f_1(x) < 4$.

**3.** **a.** Démontrer que le point $I_1$ de coordonnées $(\ln 7 ; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_1$.

**b.** Déterminer une équation de la tangente $(T_1)$ à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point $I_1$.

**c.** Tracer la droite $(T_1)$.

**4.** **a.** Déterminer une primitive de la fonction $f_1$ sur $\mathbb{R}$.

**b.** Calculer la valeur moyenne de $f_1$ sur l'intervalle $[O ; \ln 7]$.

**Partie B :** Étude de certaines propriétés de la fonction $f_n$.

**1.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$ non nul le point $A\left(0 ; \dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_n$.

**2.** **a.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$ non nul la courbe $\mathscr{C}_n$ et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l' abscisse.

On note $I_n$ ce point d'intersection.

**b.** Déterminer une équation de la tangente $(T_n)$ à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point $I_n$.

**c.** Tracer les droites $(T_2)$ et $(T_3)$.

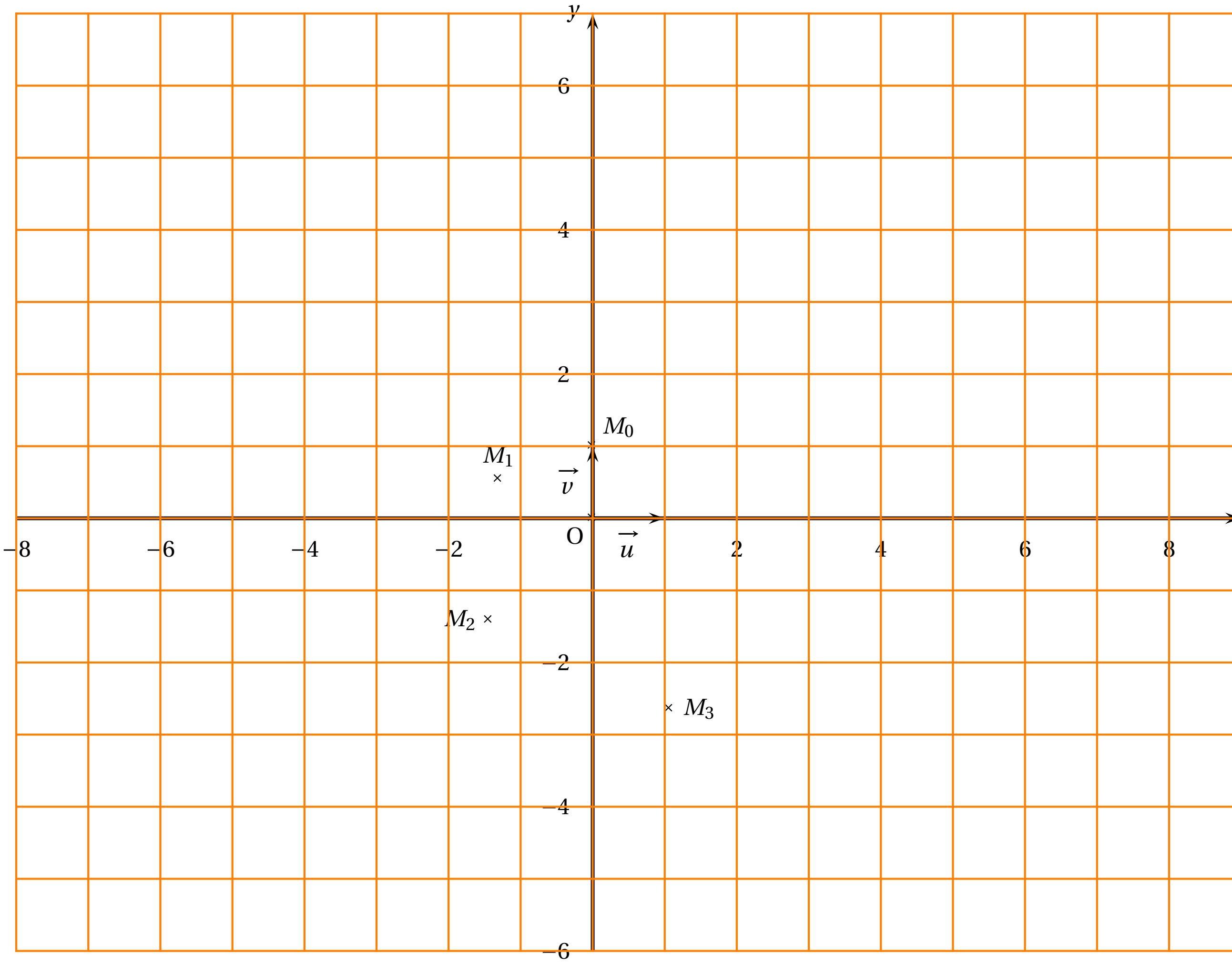
**3.** Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ non nul par

$$u_n = \frac{n}{\ln 7} \int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,dx.$$

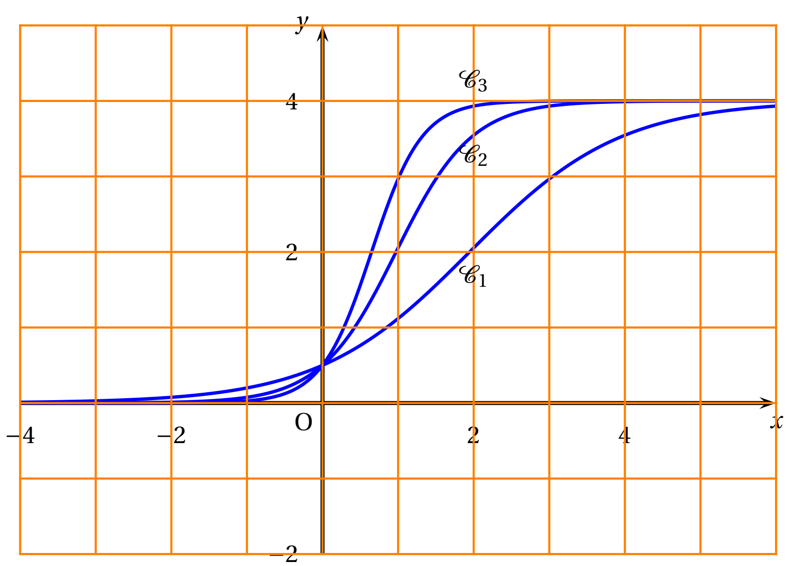
Montrer que la suite $(u_n)$ est constante.

**Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve**

**Exercice 3 (enseignement de spécialité)**




**Exercice 4**



# ஐ Baccalauréat S Liban 3 juin 2010 ஐ

**EXERCICE 1** **5 points**

**Partie A**

Restitution organisée de connaissances On supposera connus les résultats suivants :

- $e^0 = 1$.
- Pour tous réels $x$ et $y$, $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

**1.** Démontrer que pour tout réel $x$, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

**2.** Démontrer que pour tout réel $x$ et pour tout entier naturel $n$, $(e^x)^n = e^{nx}$.

**Partie B**

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx.$$

**1.** **a.** Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.

**b.** Calculer $u_1$. En déduire $u_0$.

**2.** Montrer que pour tout entier naturel $n, u_n \geqslant 0$.

**3.** **a.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

**b.** En déduire que pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n \leqslant \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

**4.** Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**EXERCICE 2** **4 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On note (D) la droite passant par les points A(1 ; −2 ; −1) et B(3 ; −5 ; −2).

**1.** Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+2t \\ y &=& -2-3t \\ z &=& -1-t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

**2.** On note (D′) la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x &=& 2-k \\ y &=& 1+2k \\ z &=& k \end{array}\right. \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (D) et (D′) ne sont pas coplanaires.

**3.** On considère le plan (P) d'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$.

**a.** Montrer que le plan (P) contient la droite (D).

**b.** Montrer que le plan (P) et la droite (D′) se coupent en un point C dont on précisera les coordonnées.

**4.** On considère la droite (Δ) passant par le point C et de vecteur directeur $\vec{w}\,(1\ ;\ 1\ ;\ -1)$.

**a.** Montrer que les droites (Δ) et (D′) sont perpendiculaires.

**b.** Montrer que la droite $(\Delta)$ coupe perpendiculairement la droite (D) en un point E dont on précisera les coordonnées.

**EXERCICE 3** **5 points**
**Enseignement obligatoire**

*Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.*

*Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même nonfructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

1. Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise (on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence).

   **Proposition 1 :** « La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est $3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^7$. »
2. Une variable aléatoire $X$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda (\lambda > 0)$.
   On rappelle que pour tout réel $a > 0$ : $p(X \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

   **Proposition 2 :** « Le réel $a$ tel que $p(X > a) = p(X \leqslant a)$ est égal à $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$. »
3. Soit le nombre complexe $z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.
   **Proposition 3 :** « Si l'entier naturel $n$ est un multiple de 3 alors $z^n$ est un réel. »
4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, le point A d'affixe $a = 2 - \mathrm{i}$ et le point B d'affixe $b = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}a$.
   **Proposition 4 :** « Le triangle OAB est rectangle isocèle. »
5. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, à tout point $M$ du plan d'affixe $z$ non nulle on associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que $z' = \dfrac{-10}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de $z$.
   **Proposition 5 :** « Il existe un point $M$ tel que O, $M$ et $M'$ ne sont pas alignés. »

**EXERCICE 3** **5 points**
**Enseignement de spécialité**

*Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.*

*Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

1. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, le point A d'affixe $2 - \mathrm{i}$ et B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   On note I le milieu du segment [AB].
   **Proposition 1 :** « La similitude directe de centre A qui transforme I en O a pour écriture complexe $z' = (1 + \mathrm{i})z - 1 - 2\mathrm{i}$. »

2. On appelle S l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $3x - 5y = 2$.
   **Proposition 2 :** « L'ensemble S est l'ensemble des couples $(5k - 1\ ;\ 3k - 1)$ où $k$ est un entier relatif. »
3. On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 = 0 \quad$ modulo 3, où $(x\ ;\ y)$ est un couple d'entiers relatifs.
   **Proposition 3 :** « Il existe des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de (E) qui ne sont pas des couples de multiples de 3. »
4. Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 3.
   **Proposition 4 :** « Pour tout entier naturel $k$ $(2 \leqslant k \leqslant n)$, le nombre $n! + k$ n'est pas un nombre premier. »
5. On considère l'équation (E$'$) : $x^2 - 52x + 480 = 0$, où $x$ est un entier naturel.
   **Proposition 5 :** « Il existe deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E$'$). »

## EXERCICE 4 — 6 points

### Partie A

Soit $u$ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x.$$

1. Étudier les variations de $u$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. a. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\ ;\ +\infty[$. On note $\alpha$ cette solution.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude $10^{-2}$ de $\alpha$.
3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de $x$.
4. Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

### Partie B

On considère la fonction $f$ définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2.$$

On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Exprimer, pour tout $x$ de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2. En déduire les variations de $f$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

### Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on note :

- $\Gamma$ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées (0 ; 2) ;
- $M$ le point de $\Gamma$ d'abscisse $x$ appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Montrer que la distance A$M$ est donnée par A$M = \sqrt{f(x)}$.
2. Soit $g$ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x}$.
   a. Montrer que les fonctions $f$ et $g$ ont les mêmes variations sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   b. Montrer que la distance A$M$ est minimale en un point de $\Gamma$, noté P, dont on précisera les coordonnées.
   c. Montrer que $\text{AP} = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.
3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à $\Gamma$ en P ?

**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat S Antilles-Guyane 18 juin 2010

**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

*Pour chacune des questions suivantes,* ***une ou deux des réponses*** *proposées sont correctes.*
*Un point est attribué à chacune des questions. Toute réponse inexacte est pénalisée de 0,25 point.*
*Il n'y a pas de pénalité en cas d'absence de réponse. Aucune justification n'est attendue.*
*Si le total des points obtenus est négatif, le note attribuée à l'exercice est 0.*

**Recopier le numéro de la question et la ou les réponses correctes (deux au maximum).**

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
   La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

   **A :** $\frac{5}{8}$ **B :** $\frac{21}{32}$ **C :** $\frac{11}{32}$ **D :** $\frac{3}{8}$

2. On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes.
   La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

   **A :** $\frac{105}{248}$ **B :** $\frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}}$ **C :** $\frac{21^2}{32^2}$ **D :** $\frac{5^2}{8^2}$

3. On suppose que la durée d'attente à un guichet de service, exprimée en heure, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0~;~1]$.
   La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min est :

   **A :** $\frac{1}{3}$ **B :** $\frac{1}{5}$ **C :** $\frac{1}{12}$ **D :** $\frac{1}{4}$

4. On considère 10 appareils identiques, de même garantie, fonctionnant indépendamment les uns des autres. La probabilité pour chaque appareil de tomber en panne durant la période de garantie est égale à 0,15.
   La probabilité pour qu'exactement 9 appareils soient en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie est égale à :

   **A :** 0,35 à $10^{-2}$ près **B :** $0,85^9$ **C :** $0,85^9 \times 0,15$ **D :** $0,85^9 \times 0,15 \times 10$

**EXERCICE 2** **5 points**

**Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité 1 cm.

**1. Restitution organisée de connaissances**

Pour $M \neq \Omega$, on rappelle que le point $M'$ est l'image du point $M$ par la rotation $r$ de centre $\Omega$ et d'angle de mesure $\theta$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Omega M' & = & \Omega M & (1)\\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\ ;\ \overrightarrow{\Omega M'}\right) & = & \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k \in \mathbb{Z}) & (2)\end{array}\right.$$

**a.** Soient $z$, $z'$ et $\omega$ les affixes respectives des points $M$, $M'$ et $\Omega$.
Traduire le relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.

**b.** En déduire l'expression de $z'$ en fonction de $z$, $\theta$ et $\omega$

**2.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

**3.** Soient $A$ et $B$ les points d'affixes respectives $a = 2\sqrt{3} - 2\text{i}$ et $b = 2\sqrt{3} + 2\text{i}$.

**a.** Écrire $a$ et $b$ sous forme exponentielle.

**b.** Faire une figure et placer les points $A$ et $B$.

**c.** Montrer que O$AB$ est un triangle équilatéral.

**4.** Soit $C$ le point d'affixe $c = -8\text{i}$ et $D$ son image par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
Placer les points $C$ et $D$.
Montrer que l'affixe du point $D$ est $d = 4\sqrt{3} + 4\text{i}$.

**5.** Montrer que $D$ est l'image du point $B$ par une homothétie de centre O dont on déterminera le rapport.

**6.** Montrer que O$AD$ est un triangle rectangle.

**EXERCICE 2** **5 points**
**Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ d'unité 1 cm.

**1. Restitution organisée de connaissances**

On utilisera sans démonstration les deux propriétés suivantes :

**Propriété 1 :** Toute similitude indirecte qui transforme un point $M$ d'affixe $z$ en un point $M'$ d'affixe $z'$ admet une expression complexe de la forme $z' = a\overline{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

**Propriété 2 :** Soit C une point d'affixe $c$. Pour tout point D, distinct de C, d'affixe $d$ et pour tout point E, distinct de C, d'affixe $e$, on a :

$$\left(\overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{CE}\right) = \arg\left(\frac{e-c}{d-c}\right) \quad (2\pi).$$

***Question :*** Montrer qu'une similitude indirecte transforme un angle orienté en son opposé.

**2.** Soient les points $C$ et $D$ d'affixes respectives $c = 3$ et $d = 1 - 3\text{i}$, et $\mathcal{S}_1$ la similitude qui à tout point $M$ du plan associe le point $M_1$ symétrique de $M$ par rapport à l'axe $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{u}\right)$ des réels.

**a.** Placer les points $C$ et $D$ puis leurs images respectives $C_1$ et $D_1$ par $\mathcal{S}_1$. On complètera le figure au fur et à mesure de l'exercice.

**b.** Donner l'expression complexe de $\mathscr{S}_1$.

**3.** Soit $\mathscr{S}_2$ la similitude directe définie par :
- le point $C_1$ et son image $C'$ d'affixe $c' = 1+4\text{i}$ ;
- le point $D_1$ et son image $D'$ d'affixe $d' = -2+2\text{i}$.

**a.** Montrer que l'expression complexe de $\mathscr{S}_2$ est : $z' = \text{i}z+1+\text{i}$.

**b.** En déduire les éléments caractéristiques de cette similitude.

**4.** Soit $\mathscr{S}$ la similitude définie par $\mathscr{S} = \mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_1$.
Déterminer l'expression complexe de $\mathscr{S}$.

**5.** On pourra admettre désormais que $\mathscr{S}$ est la similitude indirecte d'expression complexe :

$$z' = \text{i}\overline{z}+1+\text{i}.$$

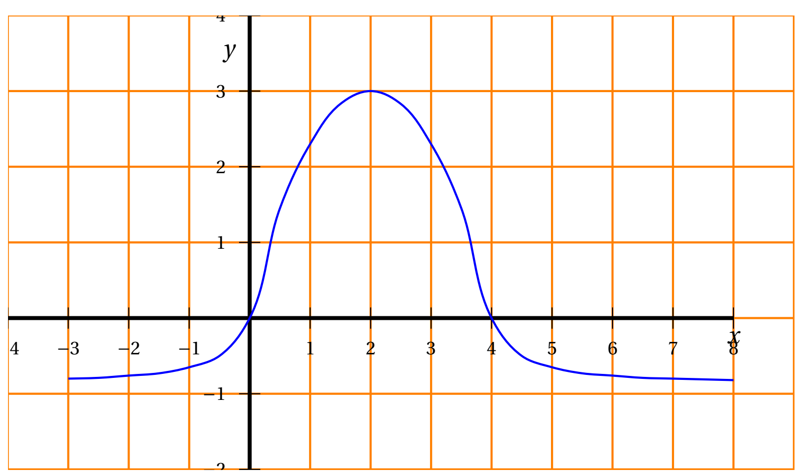
**a.** Quelle est l'image de $C$ par $\mathscr{S}$ ? Quelle est l'image de $D$ par $\mathscr{S}$ ?

**b.** Soit $H$ le point d'affixe $h$ tel que : $h-c = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(d-c)$.
Montrer que le triangle $CDH$ est équilatéral direct.

**c.** Soit $H'$ l'image de $H$ par $\mathscr{S}$. Préciser la nature du triangle $C'D'H'$ et construire le point $H'$ (on ne demande pas de calculer l'affixe $h'$ du point $H'$).

**Exercice 3** **4 points**
**Commun à tous les candidats**

On donne la représentation graphique d'une fonction $f$ définie et continue sur l'intervalle $I = [-3\,;\,8]$.




On définit la fonction $F$ sur $I$, par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\text{d}t$.

**1.** **a.** Que vaut $F(0)$ ?

**b.** Donner le signe de $F(x)$ :
- pour $x \in [0\,;\,4]$ ;
- pour $x \in [-3\,;\,0]$.

Justifier les réponses.

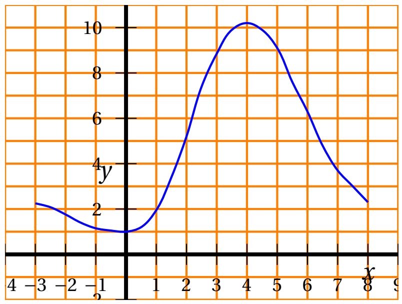
**c.** Faire figurer sur le graphique donné en **ANNEXE** les éléments permettant de justifier les inégalités $6 \leqslant F(4) \leqslant 12$.

2. **a.** Que représente $f$ pour $F$ ?

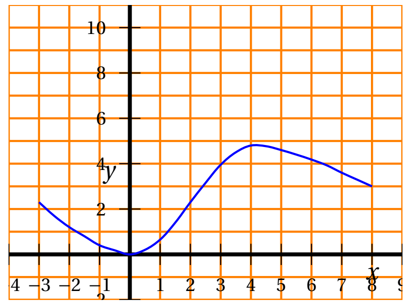
   **b.** Déterminer le sens de variation de la fonction $F$ sur $I$. Justifier la réponse à partir d'une lecture graphique des propriétés de $f$.

3. On dispose de deux représentations graphiques sur $I$.

Courbe A




Courbe B




L'une de ces courbes peut-elle représenter la fonction $F$ ? Justifier la réponse.

## EXERCICE 4 — 6 points

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

Soit $g$ la fonction définie pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x - x\ln x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction $g$ en 0 et $+\infty$.
2. Montrer que $g$ est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et que $g'(x) = -\ln x$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $g$.

**Partie B**

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\text{e}^n}{n^n}$.

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :

   **a.** le sens de variation de la suite $(u_n)$ ;

   **b.** la limite éventuelle de la suite $(u_n)$.

2. Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \ln(u_n)$.

   **a.** Montrer que $v_n = n - n\ln n$.

   **b.** En utilisant la **Partie A**, déterminer le sens de variation de la suite $(v_n)$.

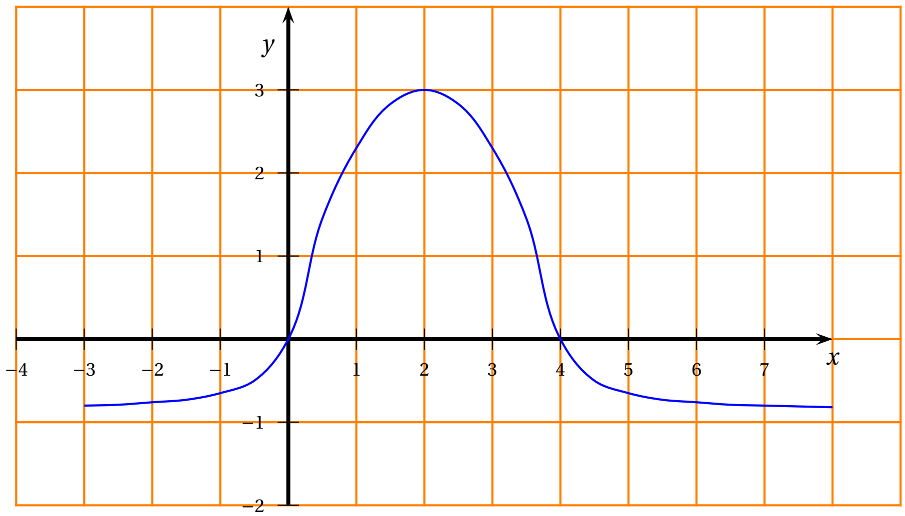
   **c.** En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)$.

3. Montrer que la suite $(u_n)$ est bornée.
4. Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

**FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)**

**Exercice 3**

Commun à tous les candidats



# Baccalauréat S Asie 21 juin 2010

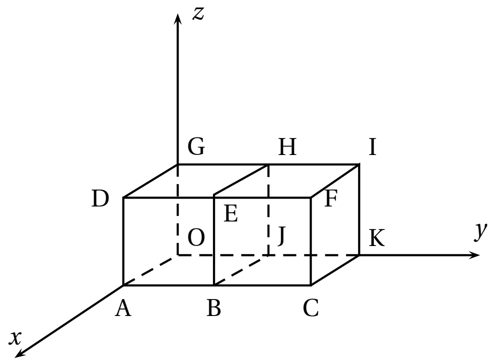
**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

*Cet exercice est un QCM qui comporte 8 questions, numérotées de 1 à 8. À chaque question, une seule des trois réponses notée **a**, **b** ou **c** est exacte. On demande au candidat d'indiquer sur sa copie, pour chaque question, quelle est la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.*

*Une réponse exacte rapporte* $0,5$ *point. Une réponse fausse ou une absence de réponse n'enlèvent pas de point.*

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points : A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(1, 2, 0), D(1, 0, 1), E(1, 1, 1), F(1, 2, 1), G(0, 0, 1), H(0, 1, 1), I(0, 2, 1), J(O, 1, 0), K(0, 2, 0) comme indiqués sur la figure ci -contre :




1. Question 1 : Le triangle GBI est :

   Réponse **a** : isocèle. Réponse **b** : équilatéral. Réponse **c** : rectangle.

2. Question 2 : Le barycentre du système de points pondérés {(O, 2), (A, -1), (C, 1)} est :

   Réponse **a** : le point K. Réponse **b** : le point I. Réponse **c** : le point J.

3. Question 3 : Le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AH}} \cdot \overrightarrow{\text{FC}}$ est égal à :

   Réponse **a** : 1. Réponse **b** : $-1$. Réponse **c** : 2.

4. Question 4 : Les points B, C, I, H :

   Réponse **a** : sont non coplanaires. Réponse **b** : forment un rectangle. Réponse **c** : forment un carré.

5. Question 5 : Une représentation paramétrique de paramètre $t$ de la droite (KE) est :

   Réponse **a** $\left\{\begin{array}{l c r} x &=& t\\ y &=& 2+t\\ z &=& t \end{array}\right.$. Réponse **b** $\left\{\begin{array}{l c r} x &=& 3+4t\\ y &=& t\\ z &=& 4t \end{array}\right.$. Réponse **c** $\left\{\begin{array}{l c r} x &=& 1-t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 1-t \end{array}\right.$.

6. Question 6 : Une équation cartésienne du plan (GBK) est :

   Réponse **a** : $2x+2y-z-2=0$. Réponse **b** : $x+y-3=0$. Réponse **c** : $x+y+2z=2$.

7. Question 7 : La distance du point C au plan (ADH) est :

   Réponse **a** : $\sqrt{2}$. Réponse **b** : 2. Réponse **c** : $\dfrac{1}{2}$.

8. Question 8 : Le volume du tétraèdre HJKB est égal à :

   Réponse **a** : $\dfrac{1}{2}$. Réponse **b** : $\dfrac{1}{6}$. Réponse **c** : $\dfrac{1}{3}$.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives :

$$a=-2, \quad b=2-2\text{i}\sqrt{3}, \quad c=3+3\text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad p=10.$$

**PARTIE A Étude de la configuration**

1. Construction de la figure.
   - **a.** Placer les points A et P dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   - **b.** Déterminer les modules des nombres complexes $b$ et $c$.
   - **c.** Utiliser les cercles de centre O et de rayons respectifs 4 et 6 pour construire les points B et C.
2. Démontrer que le triangle BCP est équilatéral.
3. On note $r_{\text{A}}$ la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
   - **a.** Vérifier que l'image Q du point C par $r_{\text{A}}$ a pour affixe : $q=-4+4\text{i}\sqrt{3}$.
   - **b.** Vérifier l'égalité : $q=-2b$. Que peut-on en déduire pour les points B, O et Q ?
4. Soit R le symétrique de C par rapport à O.
   - **a.** Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes en O.
   - **b.** Établir que : AP = BQ = CR.

**PARTIE B**

On note $f$ l'application qui, à tout point $M$ du plan, associe le réel $f(M)$ défini par :

$$f(M) = M\text{A} + M\text{B} + M\text{C}.$$

1. Calculer $f(\text{O})$.

2. Soient $M$ un point quelconque et $N$ son image par la rotation $r_{\text{A}}$.
Démontrer que : $M\text{A} = MN$ puis que $M\text{C} = N\text{Q}$.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiatives, même infructueuses, sera prise en compte dans l'évaluation.*

En utilisant l'inégalité triangulaire, démontrer que pour tout point $M$ du plan, $f(M) \geqslant 12$.

### EXERCICE 2 — 5 points

**Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{A}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère les points B, C et H d'affixes respectives :

$$b = 5\text{i},\quad c = 10 \quad \text{et} \quad h = 2+4\text{i}.$$

*Construire une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.*

1. Étude de la position du point H
   **a.** Démontrer que le point H appartient à la droite (BC).
   **b.** Calculer $\dfrac{h}{h-c}$, et en déduire que $\left(\overrightarrow{\text{HC}},\overrightarrow{\text{HA}}\right) = -\dfrac{\pi}{2}\quad [2\pi]$.
2. Étude d'une première similitude
   **a.** Calculer les rapports : $\dfrac{\text{BH}}{\text{AH}}$, $\dfrac{\text{BA}}{\text{AC}}$ et $\dfrac{\text{AH}}{\text{CH}}$.
   **b.** Démontrer qu'il existe une similitude directe $S_1$ qui transforme le triangle CHA en le triangle AHB.
   **c.** Déterminer l'écriture complexe de cette similitude $S_1$ ainsi que ses éléments caractéristiques.
3. Étude d'une seconde similitude
   *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiatives, même infructueuses, sera prise en compte dans l'évaluation*
   On note $S_2$ la similitude qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que :
   $$z' = (-1-2\text{i})\overline{z} + 10.$$
   Démontrer que $S_2$ est composée d'une symétrie orthogonale d'axe $(\Delta)$, et d'une similitude directe dont le centre $\Omega$ appartient à $(\Delta)$. Préciser $(\Delta)$.
4. Étude d'une composée
   **a.** Calculer le rapport de la similitude composée $S_2 \circ S_1$.
   **b.** En déduire le rapport entre les aires des triangles CHA et BAC.

### EXERCICE 3 — 4 points

**Commun à tous les candidats**

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le $n$-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'évènement : « le $n$-ième sondage est positif » est noté $V_n$, on note $p_n$ la probabilité de l'évènement $V_n$.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

**1.** Calculer les probabilités des évènements suivants :

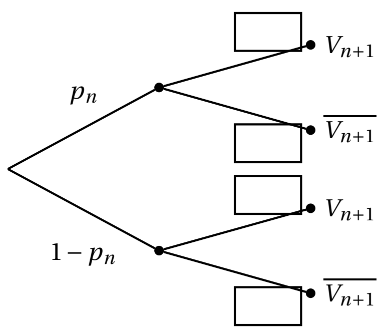
**a.** A : « les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> sondages sont positifs » ;

**b.** B : « les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> sondages sont négatifs ».

**2.** Calculer la probabilité $p_3$ pour que le 3<sup>e</sup> sondage soit positif.

**3.** $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :




**4.** Pour tout entier naturel $n$ non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.

**5.** On note $u$ la suite définie, pour tout entier naturel $n$ non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.

**a.** Démontrer que $u$ est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

**b.** Exprimer $p_n$ en fonction de $n$.

**c.** Calculer la limite, quand $n$ tend vers $+\infty$, de la probabilité $p_n$.

## EXERCICE 4 — 4 points

**Commun à tous les candidats**

L'objectif de l'exercice est l'étude d'une fonction et d'une suite liée à cette fonction

### PARTIE A

On note $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

**1.** Étude des limites

**a.** Déterminer la limite de la fonction $f$ quand $x$ tend vers 0.

**b.** Déterminer la limite de la fonction $f$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

**c.** Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathcal{C}$ ?

**2.** Étude des variations de la fonction $f$

**a.** Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction $f$ s'exprime, pour tout réel $x$ strictement positif, par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(2x+1).$$

**b.** Déterminer le signe de $f'$ et en déduire le tableau de variation de $f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

**c.** Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée $\alpha$ appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et donner la valeur approchée de $\alpha$ arrondie au centième.

**3.** Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

**PARTIE B Étude d'une suite d'intégrales**

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ on considère l'intégrale $I_n$ définie par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.$$

**1.** Calculer $I_2$.

**2.** Une relation de récurrence

**a.** Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ :

$$I_{n+1} = \mathrm{e} - \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n.$$

**b.** Calculer $I_3$.

**3.** Étude de la limite de la suite de terme général $I_n$

**a.** Établir que pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ 2]$, on a :
$0 \leqslant \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{x^n}$.

**b.** En déduire un encadrement de $I_n$ puis étudier la limite éventuelle de la suite $(I_n)$.

**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat S Centres étrangers 14 juin 2010

**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

**Question 1**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de représentations paramétriques :

$$(\mathcal{D}_1)\left\{\begin{array}{lcr} x &=& -1+2t\\ y &=& -3t\\ z &=& 1+t\end{array}\right. \ (t\in\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{D}_2)\left\{\begin{array}{lcr} x &=& 1-2t\\ y &=& 5-t\\ z &=& -2+t\end{array}\right. \ (t\in\mathbb{R}).$$

*Affirmation* :

Les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont orthogonales.

**Question 2**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère le point A de coordonnées $(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$ et la droite $(\mathcal{D})$ de représentation paramétrique :

$$(\mathcal{D})\left\{\begin{array}{lcr} x &=& 1+4t\\ y &=& -2+2t\\ z &=& 3-2t\end{array}\right. \ (t\in\mathbb{R}).$$

*Affirmation* :

Le plan $(\mathcal{P})$ contenant le point A et orthogonal à la droite $(\mathcal{D})$ a pour équation : $2x+y-z=0$.

**Question 3**

La durée de vie, exprimée en heures, d'un jeu électronique, est une variable aléatoire $X$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0003$.

On rappelle que, pour tout $t \geqslant 0$, $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

*Affirmation* :

La probabilité pour que la durée de vie de ce jeu soit strictement supérieure à 2 000 heures est inférieure à $0{,}5$.

**Question 4**

$A$ et $B$ sont deux évènements liés à une même épreuve aléatoire qui vérifient :

$$p(A) = 0{,}4,\ p_A(B) = 0{,}7 \text{ et } p_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0{,}1.$$

*Affirmation* :

La probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé est égale à $\dfrac{14}{41}$.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Dans le plan complexe $(\mathscr{P})$ muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm, on considère le point A d'affixe $a = -1$ et l'application $f$, du plan $(\mathscr{P})$ dans lui-même, qui au point $M$ d'affixe $z$, distinct de A, associe le point $M' = f(M)$ d'affixe $z'$ tel que :

$$z' = \frac{\text{i}z}{z+1}.$$

1. Déterminer l'affixe des points $M$ tels que $M' = M$.
2. Démontrer que pour tout point $M$ distinct de A et de O, on a :

$$\text{O}M' = \frac{\text{O}M}{\text{A}M} \text{ et } \left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{M\text{A}}, \overrightarrow{M\text{O}}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

3. **a.** Soit B le point d'affixe $b = -\frac{1}{2} + \text{i}$.
   Placer dans le repère le point B et la médiatrice $(\Delta)$ du segment [OA].

   **b.** Calculer sous forme algébrique l'affixe $b'$ du point B$'$ image du point B par $f$.
   Établir que B$'$ appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1.
   Placer le point B$'$ et tracer le cercle $(\mathscr{C})$ dans le repère.

   **c.** En utilisant la question 2, démontrer que, si un point $M$ appartient à la médiatrice $(\Delta)$, son image $M'$ par $f$ appartient au cercle $(\mathscr{C})$.

   **d.** Soit C le point tel que le triangle AOC soit équilatéral direct.
   En s'aidant des résultats de la question 2, construire, à la règle et au compas, l'image du point C par $f$ (On laissera apparents les traits de construction.)

4. Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ distincts de A et de O dont l'image $M'$ par $f$ appartient à l'axe des abscisses.
   Les questions a. et b. peuvent être traitées de façon indépendante.

   **a.** On pose $z = x + \text{i}y$ avec $x$ et $y$ réels tels que $(x,\ y) \neq (-1,\ 0)$ et $(x,\ y) \neq (0,\ 0)$.
   Démontrer que la partie imaginaire de $z'$ est égale à :

$$\text{Im}\left(z'\right) = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}$$

   En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble $(\Gamma)$ et le tracer dans le repère.

   **b.** À l'aide de la question 2, retrouver géométriquement la nature de l'ensemble $(\Gamma)$.

## EXERCICE 2 — 5 points

**Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points $A,\ B,\ C,\ M,\ N$ et $P$ d'affixes respectives :

$$a = 1+\text{i},\ b = -1+2\text{i},\ c = 2+3\text{i},\ m = 7-5\text{i},\ n = 5-\text{i},\ p = 9+\text{i}.$$

1. **a.** Placer les points $A,\ B,\ C,\ M,\ N$ et $P$ dans le repère.

**b.** Calculer les longueurs des côtés des triangles $ABC$ et $NMP$.

**c.** En déduire que ces deux triangles sont semblables.

*Dans la suite de l'exercice, on se propose de mettre en évidence deux similitudes qui transforment le triangle ABC en le triangle MNP.*

**2.** Une similitude directe

Soit $s$ la similitude directe qui transforme le point $A$ en $N$ et le point $B$ en $P$.

**a.** Montrer qu'une écriture complexe de la similitude $s$ est :

$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\mathrm{i}\right) z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}\mathrm{i}.$$

**b.** Déterminer le rapport, la valeur de l'angle arrondie au degré, ainsi que le centre de la similitude $s$.

**c.** Vérifier que la similitude $s$ transforme le point $C$ en $M$.

**3.** Une similitude indirecte

Soit $s'$ la similitude dont l'écriture complexe est :

$$z' = 2\mathrm{i}\overline{z} + 3 - 3\mathrm{i}.$$

**a.** Vérifier que : $\left\{\begin{array}{lll} s'(A) & = & N \\ s'(B) & = & M \\ s'(C) & = & P \end{array}\right.$

**b.** Démontrer que $s'$ admet un unique point invariant $K$ d'affixe $k = 1 - \mathrm{i}$.

**c.** Soit $h$ l'homothétie de centre $K$ et de rapport $\frac{1}{2}$ et $J$ le point d'affixe 2.

On pose : $f = s' \circ h$.

Déterminer les images des points $K$ et $J$ par la transformation $f$. En déduire la nature précise de la transformation $f$.

**d.** Démontrer que la similitude $s'$ est la composée d'une homothétie et d'une réflexion.

**EXERCICE 3** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

On considère les deux courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ d'équations respectives $y = \mathrm{e}^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.

Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente $\mathscr{T}$ commune à ces deux courbes.

**1.** Sur le graphique représenté dans l'annexe 1, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.

Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_2)$.

**2.** On désigne par $a$ et $b$ deux réels quelconques, par A le point d'abscisse $a$ de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et par B le point d'abscisse $b$ de la courbe $(\mathscr{C}_2)$.

**a.** Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T}_\mathrm{A})$ à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ au point A.

**b.** Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T}_\mathrm{B})$ à la courbe $(\mathscr{C}_2)$ au point B.

**c.** En déduire que les droites $(\mathcal{T}_A)$ et $(\mathcal{T}_B)$ sont confondues si et seulement si les réels $a$ et $b$ sont solutions du système (S) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} e^a & = & -2b \\ e^a - ae^a & = & b^2 - 1 \end{array}\right. .$$

**d.** Montrer que le système (S) est équivalent au système (S′) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} e^a & = & -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

**3.** Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation

$$\text{(E)} \quad : \quad e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0.$$

Pour cela, on considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4.$$

**a.** Montrer que pour tout $x$ appartenant à $]-\infty~;~0[$, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$.

**b.** En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty~;~0[$.

**c.** Démontrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

**d.** Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

On note $a$ cette solution. Donner un encadrement d'amplitude $10^{-2}$ de $a$.

**4.** On prend pour A le point d'abscisse $a$. Déterminer un encadrement d'amplitude $10^{-1}$ du réel $b$ pour lequel les droites $(\mathcal{T}_A)$ et $(\mathcal{T}_B)$ sont confondues.

## EXERCICE 4 — 5 points

**Commun à tous les candidats**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites $(u_n)$ définies par un premier terme positif ou nul $u_0$ et vérifiant pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

**1.** Étude de propriétés de la fonction $f$

**a.** Étudier le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

**b.** Résoudre dans l'intervalle $[0~;~+\infty[$ l'équation $f(x) = x$.

On note $\alpha$ la solution.

**c.** Montrer que si $x$ appartient à l'intervalle $[0~;~\alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0~;~\alpha]$.

De même, montrer que si $x$ appartient à l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha~;~+\infty[$.

**2.** Étude de la suite $(u_n)$ pour $u_0 = 0$

Dans cette question, on considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

**a.** Sur le graphique représenté dans l'annexe 2, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.

Placer le point $A_0$ de coordonnées $(u_0\ ;\ 0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de $A_0$ les points $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$ d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$.

Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite $(u_n)$ ?

**b.** Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

**c.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

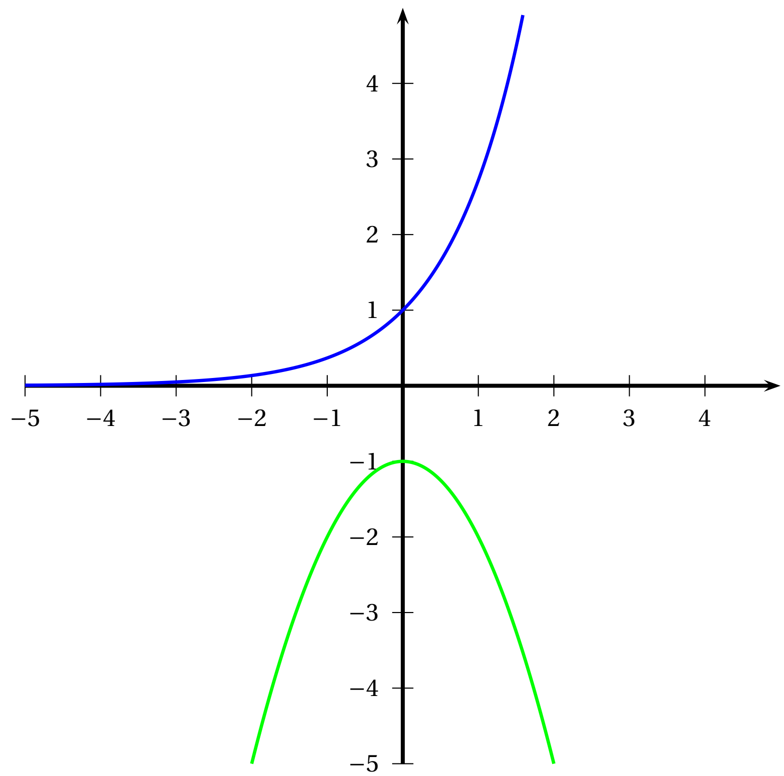
**3.** Étude des suites $(u_n)$ selon les valeurs du réel positif ou nul $u_0$

*Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

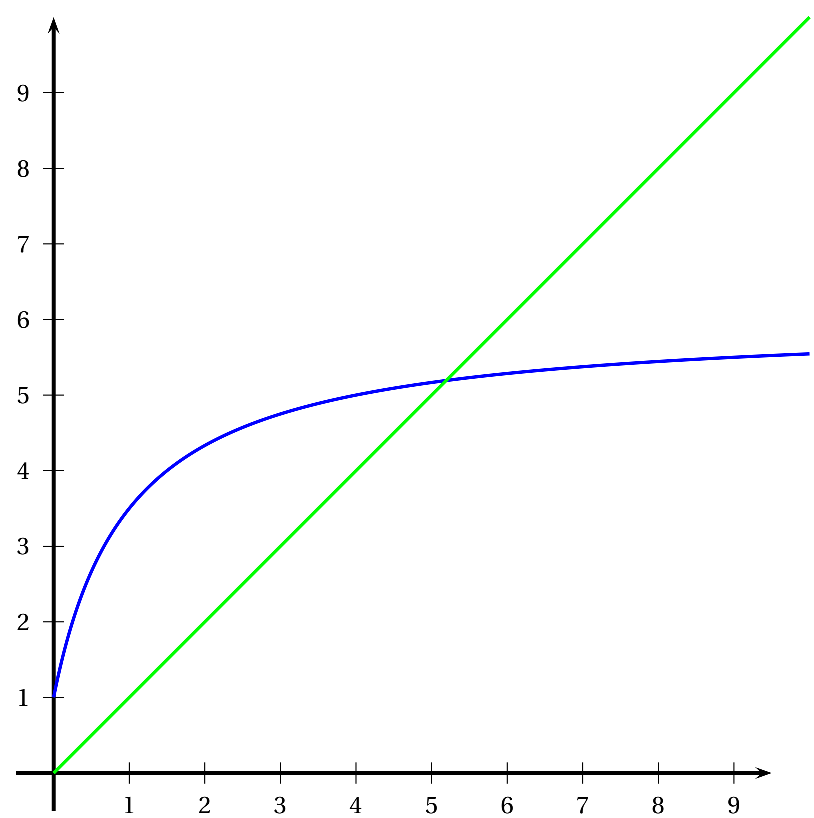
Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite $(u_n)$ suivant les valeurs du réel positif ou nul $u_0$ ?

**FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)**

**Annexe 1 (Exercice 3, question 1)**




**Annexe 2 (Exercice 4, question 2. a.)**



# Baccalauréat S La Réunion 22 juin 2010

**Exercice 1** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(1+x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthononnal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On note $D$ la droite d'équation $y = x$.

**Partie A**

1. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction $f$.
   **b.** Déterminer les limites de la fonction $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
   **a.** Déterminer $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$.
   **b.** Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
   **c.** Étudier le sens de variation de la fonction $g$, puis dresser le tableau de variations de la fonction $g$.
   **d.** Montrer que sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha$ et $\beta$, avec $\alpha$ négative et $\beta$ appartenant à l'intervalle $[2\,;3]$.
   **e.** À l'aide des questions précédentes, détenniner le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite $D$.

**Partie B**

*Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout nombre entier naturel $n$ par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel $n$, $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$.
2. La suite $(u_n)$ est-elle convergente ? Justifier la réponse.

**Exercice 2** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

**Partie I :**

On dispose d'un dé cubique $A$ parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.
Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.
2. Soit l'évènement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».
   Démontrer que la probabilité de l'évènement C est égale à $\dfrac{7}{18}$.
3. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.
4. À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

**Partie II :**

On dispose d'un second dé cubique $B$ équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires. Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé $B$ et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé $A$ et on note la couleur de la face obtenue.

1. **a.** Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.
   **b.** Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?
2. Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\dfrac{4}{9}$.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

**EXERCICE 3** **5 points**
**Commun à tous les candidats**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.
Partie A :

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions $f$, définies et dérivables sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, vérifiant la condition (E) :

$$\text{pour tout nombre réel } x \text{ strictement positif, } xf'(x) - f(x) = x^2\mathrm{e}^{2x}.$$

1. Montrer que si une fonction $f$, définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, vérifie la condition (E), alors la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ vérifie :
   $$\text{pour tout nombre réel } x \text{ strictement positif, } g'(x) = \mathrm{e}^{2x}.$$
2. En déduire l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ qui vérifient la condition (E).
3. Quelle est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en $\dfrac{1}{2}$ ?

**Partie B :**

On considère la fonction $h$ définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$h(x) = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} - \frac{\mathrm{e}}{2}x.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif $x$, le signe de $h(x)$.
2. a. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x\text{e}^{2x}\,\text{d}x$ et en déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,\text{d}x$.

   b. En déduire, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au dessus de la courbe $\mathscr{C}$.

**EXERCICE 4** **5 points**

**Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

**Partie I : Restitution organisée de connaissances**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives $a$, $b$, $c$.
On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C.

On rappelle que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{AB}}\right) = \arg(b-a) \quad [2\pi]$.

Montrer que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi]$.

**Partie II :**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère le point A d'affixe $1+\text{i}$.
On associe, à tout point $M$ du plan d'affixe $z$ non nulle, le point $M'$ d'affixe

$$z' = \frac{z-1-\text{i}}{z}.$$

Le point $M'$ est appelé le point image du point $M$.

1. a. Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe du point B′, image du point B d'affixe i.

   b. Montrer que, pour tout point $M$ du plan d'affixe $z$ non nulle, l'affixe $z'$ du point $M'$ est telle que $z' \neq 1$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan d'affixe $z$ non nulle pour lesquels l'affixe du point $M'$ est telle que $\left|z'\right| = 1$.
3. Quel est l'ensemble des points $M$ du plan d'affixe $z$ non nulle pour lesquels l'affixe du point $M'$ est un nombre réel ?

**EXERCICE 4** **5 points**

**Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

**Partie 1 : Restitution organisée de connaissances**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

**Prérequis :**

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude directe du plan est de la forme $z' = \alpha z + \beta$, où $\alpha$ est un nombre complexe non nul et $\beta$ est un nombre complexe.
Soient A, B, C, D quatre points du plan ; on suppose d'une part que les points A et C sont distincts et d'autre part que les points B et D sont distincts.
Démontrer qu'il existe une unique similitude directe $s$ telle que $s(\text{A}) = \text{B}$ et $s(\text{C}) = \text{D}$.

**Partie II :**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}\,,\,\overrightarrow{\text{AD}}\right)$ ;
$\left(\overrightarrow{\text{AB}}\,,\,\overrightarrow{\text{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
On considère le point C tel que ABCD est un carré.
Soit E le milieu du segment [AD], on considère le carré EDGF tel que
$\left(\overrightarrow{\text{ED}}\,,\,\overrightarrow{\text{EF}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

**1.** **a.** Faire une figure en plaçant les points A, B, C, D, E, F, G. On complètera la figure au cours de l'exercice.

**b.** Préciser les nombres complexes $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, affixes respectives des points A, B, C, D, E, F et G.

**c.** Montrer qu'il existe une unique similitude directe $s$ du plan telle que $s(\text{D}) = \text{F}$ et $s(\text{B}) = \text{D}$.

**2.** On se propose de préciser les éléments caractéristiques de la similitude directe $s$.

**a.** Déterminer le rapport $k$ et l'angle $\theta$ de la similitude directe $s$.

**b.** Donner l'écriture complexe de cette similitude.

**c.** Déterminer, le centre $\Omega$ de la similitude directe $s$.

# Baccalauréat S Métropole 22 juin 2010

**EXERCICE 1** **6 points**
**Commun à tous les candidats**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

**Partie A :**

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}): \quad y' + y = \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Montrer que la fonction $u$ définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle (E$'$) : $y' + y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E$'$).
3. Soit $v$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $v$ est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E$'$).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
5. Déterminer l'unique solution $g$ de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

**Partie B :**

On considère la fonction $f_k$ définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_k(x) = (x + k)\mathrm{e}^{-x}$$

où $k$ est un nombre réel donné.
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction $f_k$ dans un repère orthogonal.

1. Montrer que la fonction $f_k$ admet un maximum en $x = 1 - k$.
2. On note $M_k$ le point de la courbe $\mathscr{C}_k$ d'abscisse $1 - k$. Montrer que le point $M_k$ appartient à la courbe $\Gamma$ d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$.
3. Sur le graphique donné en annexe 1 (à rendre avec la copie), le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :
   - la courbe $\Gamma$ d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$ ;
   - la courbe $\mathscr{C}_k$ d'équation $y = (x + k)\mathrm{e}^{-x}$ pour un certain nombre réel $k$ donné.

   **a.** Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie).

   **b.** En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel $k$ correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.
4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^2 (x + 2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

1. **Restitution organisée de connaissances**

   Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

   Définition : deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.
   Propriété 1 : si deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes avec $(u_n)$ croissante et $(v_n)$ décroissante alors pour tout entier naturel $n$, $v_n \geqslant u_n$.
   Propriété 2 : toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

   *Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

2. Dans les cas suivants, les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ont-elles la même limite ? Sont-elles adjacentes ?

   Justifier les réponses.

   **a.** $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$ ;

   **b.** $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \ln(n+1) + \dfrac{1}{n}$ ;

   **c.** $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

3. On considère un nombre réel $a$ positif et les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies pour tout nombre entie naturel $n$ non nul par : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \ln\left(a + \dfrac{1}{n}\right)$.

   Existe-t-il une valeur de $a$ telle que les suites soient adjacentes ?

**EXERCICE 3** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

.

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).*

*Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.*

1. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 sont blanches et 3 sont noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire est égale à :

   - $\dfrac{21}{40}$
   - $\dfrac{7}{10} \times \dfrac{6}{9} \times \dfrac{1}{3}$
   - $\dfrac{7}{10} \times \dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{3}$

2. De la même urne, on tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs avec remise. La probabilité d'avoir obtenu 3 boules noires et 2 boules blanches est égale à :

   - $\dfrac{3^3 \times 7^2}{10^5}$
   - $\binom{5}{2} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^2 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^3$
   - $\binom{5}{2} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^3 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^2$

**3.** De la même urne, on tire une seule boule. Si elle est blanche, on lance un dé cubique (dont les faces sont numérotées de 1 à 6). Si la boule est noire, on lance un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). On suppose les dés bien équilibrés. Le joueur gagne s'il obtient le numéro 1.
Sachant que le joueur a gagné, la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche est égale à :

- $\dfrac{7}{60}$
- $\dfrac{14}{23}$
- $\dfrac{\frac{7}{10}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}$

**4.** On note $X$ une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$. ($\lambda$ étant un nombre réel strictement positif). La probabilité de l'évènement $[1 \leqslant X \leqslant 3]$ est égale à :

- $\mathrm{e}^{-\lambda}-\mathrm{e}^{-3\lambda}$
- $\mathrm{e}^{-3\lambda}-\mathrm{e}^{-\lambda}$
- $\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\mathrm{e}^{-3\lambda}}$

## EXERCICE 4 — 5 points

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle $\mathscr{C}$ de centre O passant par A.
Dans tout l'exercice on note $\alpha$ le nombre complexe $\alpha = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $\overline{\alpha}$ le nombre complexe conjugué du nombre complexe $\alpha$.

**1.** **a.** Démontrer que $\alpha^2-4\alpha = 2\overline{\alpha}-8$.

**b.** Démontrer que les points B et C d'affixes respectives $\alpha$ et $\overline{\alpha}$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

**2.** Soit D un point du cercle $\mathscr{C}$ d'affixe $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta$ est un nombre réel de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

**a.** Construire sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point E image du point D par la rotation $r$ de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

**b.** Justifier que le point E a pour affixe $z_{\mathrm{E}} = \alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

**3.** Soient F et G les milieux respectifs des segments [BD] et [CE].

**a.** Justifier que le point F a pour affixe $z_{\mathrm{F}} = \dfrac{\alpha}{2}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

**b.** On admet que le point G a pour affixe $z_{\mathrm{G}} = \dfrac{\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\overline{\alpha}}{2}$.

Démontrer que $\dfrac{z_{\mathrm{G}}-2}{z_{\mathrm{F}}-2} = \dfrac{\alpha}{2}$. On pourra utiliser la question 1. a.
En déduire que le triangle AFG est équilatéral.

**4.** *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on conjecture qu'il existe une position du point D, défini à la question 2, pour laquelle la longueur du coté AF du triangle AFG est minimale.
On admet que $\mathrm{AF}^2 = 4-3\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$.
On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi]$ par $f(x) = 4-3\cos x+\sqrt{3}\sin x$.
Le tableau ci-dessous donne les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi]$. Compléter ce tableau de variations. Permet-il de valider la conjecture ? Justifier.

| $x$ | $-\pi$ | | $-\dfrac{\pi}{6}$ | | $\dfrac{5\pi}{6}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

**EXERCICE 4** **5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Dans tout l'exercice, $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique : 4 cm).
On désigne par A le point d'affixe $z_{\text{A}} = 1$.

**1.** On considère la transformation $T$ du plan qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point d'affixe $-\overline{z} + 2$.

**a.** Déterminer les images respectives par la transformation $T$ du point A et du point $\Omega$ d'affixe $1 + \text{i}\sqrt{3}$.

**b.** En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $T$.

**c.** Déterminer l'image par la transformation $T$ du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

**2.** $\mathscr{C}'$ désigne le cercle de centre O′ d'affixe 2 et de rayon 1.

**a.** Construire le point A′ appartenant au cercle $\mathscr{C}'$ tel que : $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{O}'\text{A}'}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ [modulo $2\pi$].

**b.** À tout point $M$ du cercle $\mathscr{C}$ d'affixe $z$, on associe le point $M'$ du cercle $\mathscr{C}'$ d'affixe $z'$ tel que : $\left(\overrightarrow{\text{O}M}, \overrightarrow{\text{O}'M'}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ [modulo $2\pi$].

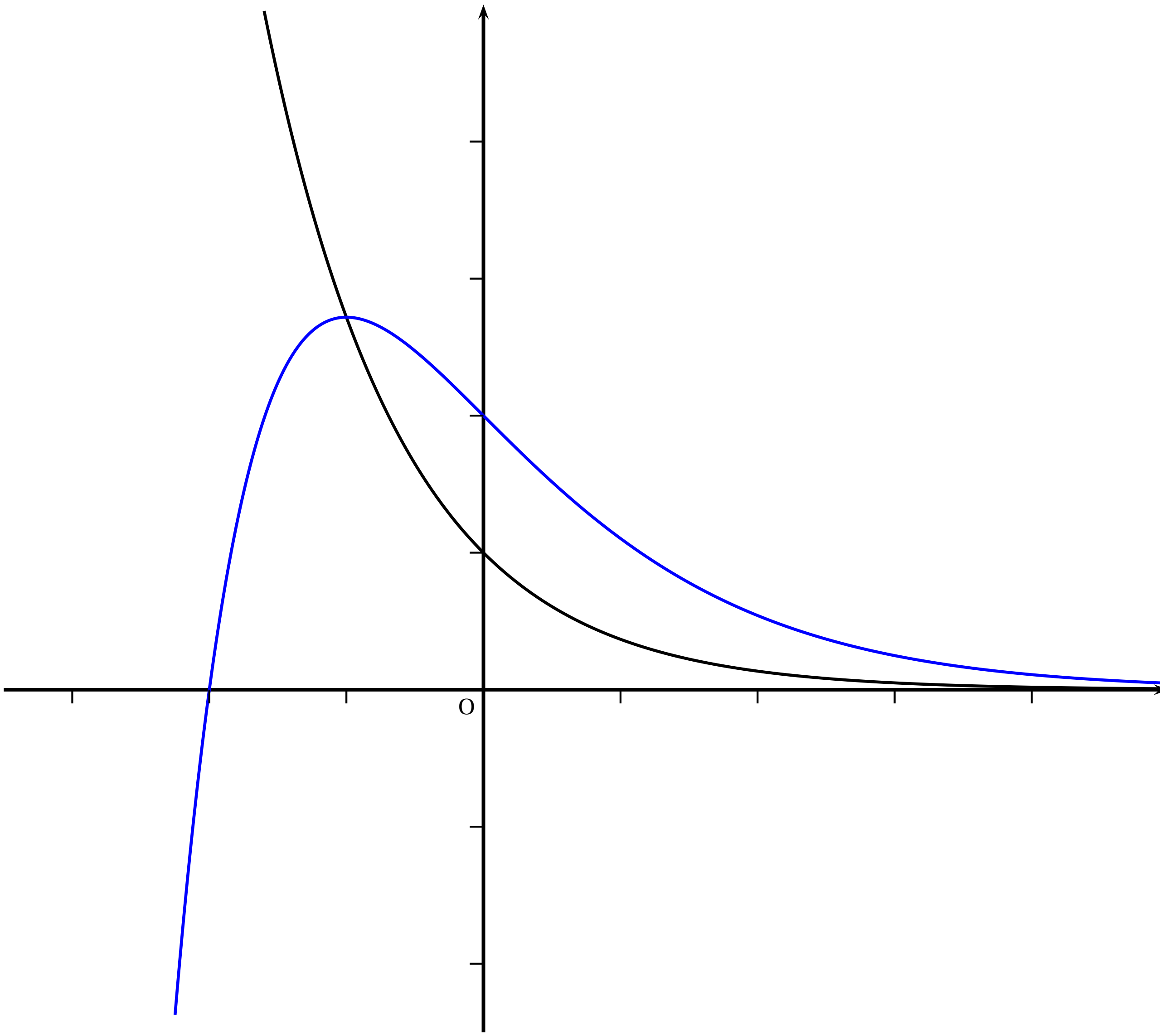
Déterminer le module et un argument de $\dfrac{z' - 2}{z}$. En déduire que $z' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} z + 2$.

**c.** Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r$ qui à tout point $M$ du plan d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que $z' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} z + 2$.

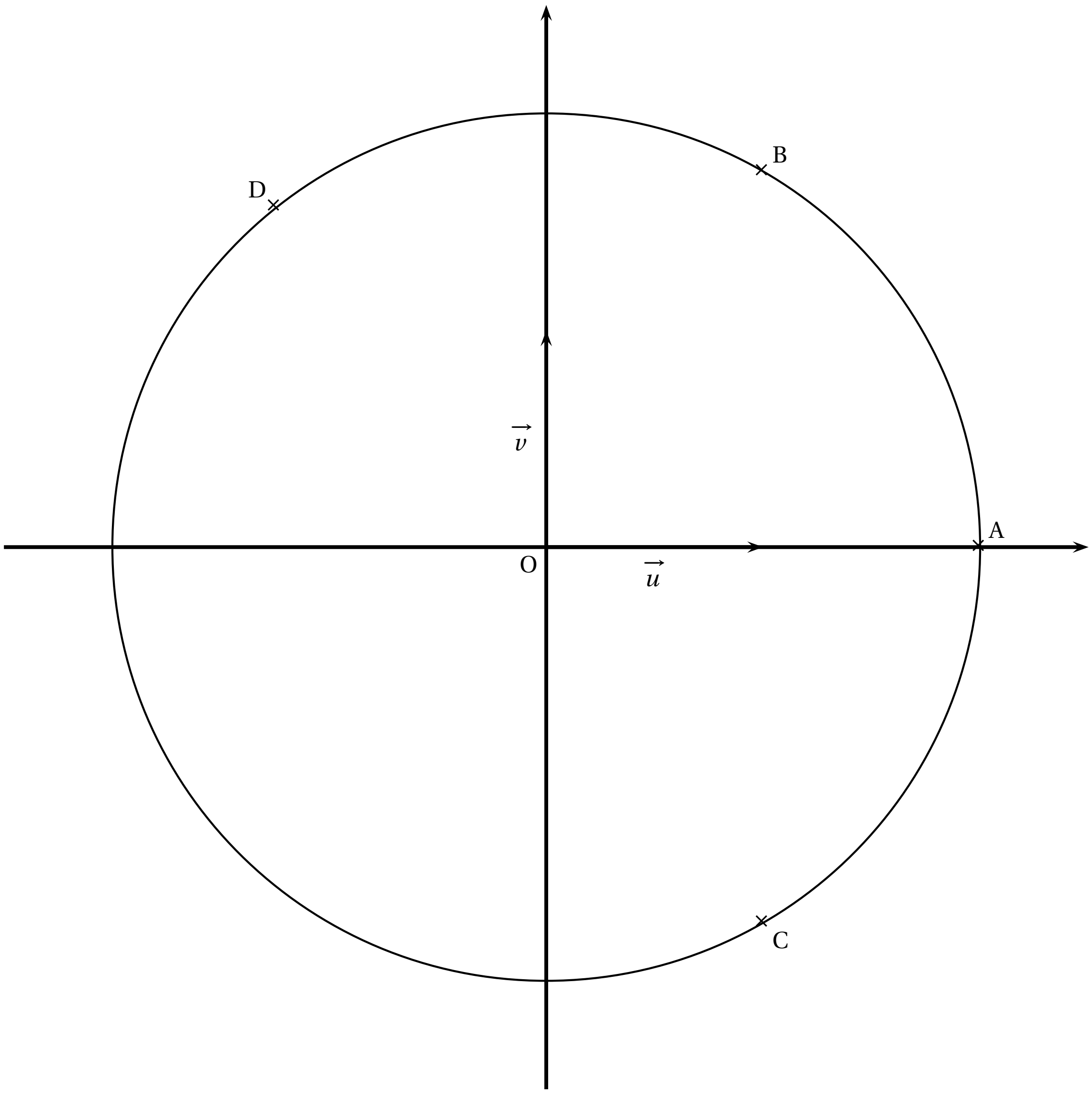
**3.** *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

À tout point $M$ du plan, on associe le point $M_1$ milieu du segment $[MM']$.
Quel est le lieu géométrique du point $M_1$ lorsque $M$ décrit le cercle $\mathscr{C}$ ?

**ANNEXE 1 (Exercice 1)**
(**à rendre avec la copie**)



**ANNEXE 2 (Exercice 4)**
(**à rendre avec la copie**)



# ☙ Baccalauréat S Polynésie 10 juin 2010 ❧

## Exercice 1 — 5 points

*Commun à tous les candidats.*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

**Partie A - Restitution organisée de connaissances**

**Prérequis**

Soit $z$ un nombre complexe tel que $z = a + b\mathrm{i}$ où $a$ et $b$ sont deux nombre réels.
On note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$.

**Questions**

1. Démontrer que, pour tous nombres complexes $z$ et $z'$, $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, et tout nombre complexe $z$, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

**Partie B**

On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où $z$ est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe $z$ est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de l'équation (E).
2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + \mathrm{i}$.
   a. Écrire le nombre complexe $z_0$ sous forme exponentielle.
   b. Vérifier que $z_0$ est solution de l'équation (E).
3. Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

**Partie C**

Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + \mathrm{i}\ ;\ z_B = -1 + \mathrm{i}\ ;\ z_C = -1 - \mathrm{i} \text{ et } z_D = 1 - \mathrm{i}.$$

Soit $r$ la rotation du plan de centre C et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{3}$.
On appelle E l'image du point B par $r$ et F celle du point D par $r$.

1. Déterminer l'écriture complexe de la rotation $r$.
2. a. Démontrer que l'affixe du point E, notée $z_E$, est égale à $-1 + \sqrt{3}$
   b. Déterminer l'affixe $z_F$ du point F.
   c. Démontrer que le quotient $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un nombre réel.
   d. Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?

## Exercice 2 3 points

*Commun à tous les candidats.*

Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I et X.
Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivante :

- à chaque étape, il passe par l'un des trois sommets S, I et X puis il rejoint le point O ;
- les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer par le sommet X et la probabilité de passer par le sommet S est le double de celle de passer par le sommet I ;
- les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres ;
- on ne tient pas compte des passages par O.

**Partie A - Un seul robot**

Un seul robot se trouve au point O.

1. Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $\frac{1}{5}$.
2. On note E l'évènement : « au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les 3 sommets S, I et X dans cet ordre ».
   Démontrer que la probabilité de E est égale à $\frac{4}{125}$.
3. On note F l'évènement : « au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les 3 sommets S, I et X dans un ordre quelconque ».
   Déterminer la probabilité de F.

**Partie B - Plusieurs robots**

Des robots se trouvent au point O, leurs déplacements étant indépendants les uns des autres.
Quel nombre minimal $n$ de robots doit-il y avoir pour que la probabilité de l'évènement : « au moins l'un des robots passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre » soit supérieure ou égale à 0,99 ?

## Exercice 3 5 points

*Enseignement obligatoire*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère :

- les points A$(1\,;\,1\,;\,1)$ et B$(3\,;\,2\,;\,0)$ ;
- le plan (P) passant par le point B et admettant le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ pour vecteur normal ;
- le plan (Q) d'équation : $x - y + 2z + 4 = 0$ ;
- la sphère (S) de centre A et de rayon AB.

1. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est : $2x + y - z - 8 = 0$
2. Déterminer une équation de la sphère (S).
3. **a.** Calculer la distance du point A au plan (Q).
   En déduire que le plan (Q) est tangent à la sphère (S).

   **b.** Le plan (P) est-il tangent à la sphère (S) ?

4. On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan (Q), noté C, a pour coordonnées $(0\,;\,2;\,-1)$.
   a. Prouver que les plans (P) et (Q) sont sécants.
   b. Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q).
   Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :
   $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & t \\ y & = & 12-5t \\ z & = & 4-3t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.
   c. Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite (D)
   d. On appelle (R) le plan défini par le point A et la droite (D).
   L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
   « Tout point du plan (R ) est équidistant des points B et C ».
   Justifier votre réponse.

## Exercice 3 5 points

*Enseignement de spécialité*

*Les parties A et B sont indépendantes*

### Partie A

On considère l'équation (E) : $7x-6y=1$ où $x$ et $y$ sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E)
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

### Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples $(n,\ m)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $7^n-3\times 2^m=1$ (F).

1. On suppose $m \leqslant 4$.
   Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant que $m \geqslant 5$.
   a. Montrer que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors
   $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.
   b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors $n$ est divisible par 4.
   c. En déduire que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors
   $7^n \equiv 1 \pmod{5}$.
   d. Pour $m \geqslant 5$, existe-t-il des couples $(n,\ m)$ d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?
3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

## Exercice 4 7 points

*Commun à tous les candidats.*

*L'annexe qui suit sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve*

### Partie A

**1.** On considère la fonction $g$ définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(2x) + 1 - x$$

**a.** *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la rédaction.*

Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1\ ;\ +\infty[$ une unique solution notée $\alpha$.

**b.** Démontrer que $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

**2.** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$, par $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$.

On désigne par $(\Gamma)$ la courbe d'équation $y = \ln(2x) + 1$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

**a.** En utilisant la courbe $(\Gamma)$ ,construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.

**b.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

**c.** Démontrer que la suite $(u_n)$ converge vers $\alpha$.

### Partie B

On considère la fonction $f$ définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{1-x}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

**1.** Pour tout nombre réel $x$ supérieur ou égal à 1, on pose :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x (t-1)\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t$$

**a.** Démontrer que la fonction $F$ est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

**b.** Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel $x$ appartenant à $[1\ ;\ +\infty[$, $F(x) = -x\mathrm{e}^{1-x} + 1$.

**c.** Démontrer que sur $[1\ ;\ +\infty[$, l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ est équivalente à l'équation $\ln(2x) + 1 = x$.

**2.** Soit un réel $a$ supérieur ou égal à 1. On considère la partie $\mathscr{D}_a$ du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$.

Déterminer $a$ tel que l'aire, en unités d'aires, de $\mathscr{D}_a$, soit égale à $\dfrac{1}{2}$ et hachurer $\mathscr{D}_a$ sur le graphique.

**ANNEXE**

**Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve**

**EXERCICE 4**