∾ Baccalauréat S 2011 ∾

L'intégrale de septembre 2010 à juin 2011

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat S (obligatoire) Antilles-Guyane septembre 2010

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A - Restitution organisée des connaissances

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.
On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et que pour tout x de $]0~;~+\infty[$ on a : $\exp(\ln x) = x$.
À partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ qui à x associe $\dfrac{1}{x}$.

PARTIE B - Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{x}.$$

Le but du problème est l'étude de cette fonction et le calcul d'une aire.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 3 cm.

I - Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 1 - \ln x.$$

1. Étudier les variations de g sur $]0~;~+\infty[$.
2. En déduire le signe de g sur $]0~;~+\infty[$.

II - Étude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative $\mathcal{C}$

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?
2. Déterminer la limite en $+\infty$ de f puis montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0~;~+\infty[$.
4. En déduire le sens de variation de f sur $]0~;~+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Déterminer le point A de la courbe $\mathcal{C}$ en lequel la tangente $\mathcal{T}$ est parallèle à la droite $\mathcal{D}$.
6. Dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ tracer les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$ et la courbe $\mathcal{C}$.

III - Calcul d'une aire

1. Montrer que $\displaystyle\int_1^{\text{e}} \frac{\ln x}{x}\,\text{d}x = \frac{1}{2}$.
2. En déduire l'aire de la région du plan délimitée par les droites d'équation $x = 1$,
$x = \text{e}$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$. On exprimera cette aire en cm^2. Hachurer cette région sur le graphique.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'exercice comporte quatre propositions indépendantes.
Indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse choisie.

1. L'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, vérifiant $|z-2| = |z-2\text{i}|$ est la droite d'équation $y = x$.
2. Si A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes $a,\ b$ et c vérifiant $\dfrac{b-a}{c-a} = -3$ alors A, B et C sont alignés.
3. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.
   La droite de l'espace passant par le point B de coordonnées $(2\,;3\,;4)$ et admettant le vecteur $\overrightarrow{u}\,(1\,;2\,;3)$ comme vecteur directeur a pour représentation paramétrique :
   $$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& t+1\\ y &=& 2t+1\\ z &=& 3t+1\end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}.$$
4. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.
   La sphère de centre A$(1\,;1\,;1)$ et de rayon 10 est tangente au plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+y+z-1=0$.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :
   $$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$
   a. Calculer v_0.
   b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   c. En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
   d. Exprimer v_n en fonction de n.
3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :
   $$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$
   a. Calculer w_0.
   b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
   c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

d. Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Exercice 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,000 1 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.
On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note :

M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;

T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2. Un animal est choisi au hasard.

a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?

b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est $0,058$.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?

5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.

b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

Baccalauréat S La Réunion septembre 2010

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les plans P et Q d'équations respectives :

$$x+y+z=0 \quad \text{et} \quad 2x+3y+z-4=0.$$

1. Montrer que l'intersection des plans P et Q est la droite D dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -4-2t \\ y & = & 4+t \\ z & = & t \end{array}\right. \text{ où } t \text{ est un nombre réel.}$$

2. Soit λ un nombre réel.
On considère le plan P_λ d'équation : $(1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4)=0$.

a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}\,(1+\lambda\,;\,1+2\lambda\,;\,1)$ est un vecteur normal du plan P_λ.

b. Donner une valeur du nombre réel λ pour laquelle les plans P et P_λ sont confondus.

c. Existe-t-il un nombre réel λ pour lequel les plans P et P_λ sont perpendiculaires ?

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D', intersection des plans P et P_{-1}.
Montrer que les droites D et D'sont confondues.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
On considère le point A(1 ; 1 ; 1).
Déterminer la distance du point A à la droite D, c'est-à-dire la distance entre le point A et son projeté orthogonal sur la droite D.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question et la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

Dans une fête foraine, Luc décide de participer à un jeu qui se déroule de la manière suivante :
Luc tire au hasard un jeton dans une urne contenant quatre jetons rouges et deux jetons bleus.

- Si le jeton tiré est bleu. Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, sans remettre dans l'urne le premier jeton tiré, il tire au hasard un deuxième jeton dans l'urne.
- Si le deuxième jeton tiré est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, sans remettre dans l'urne les deux jetons précédents, il tire au hasard un troisième jeton dans l'urne.

- Si le troisième jeton est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, le jeu s'arrête et Luc a perdu.

1. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du deuxième tirage est :

- $\dfrac{19}{15}$ • $\dfrac{2}{5}$ • $\dfrac{11}{15}$ • $\dfrac{4}{15}$

2. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du troisième tirage est :

- $\dfrac{1}{5}$ • $\dfrac{1}{2}$ • $\dfrac{2}{15}$ • $\dfrac{1}{9}$

3. La probabilité que Luc gagne à ce jeu après avoir effectué au moins deux tirages est :

- $\dfrac{3}{5}$ • $\dfrac{4}{15}$ • $\dfrac{7}{15}$ • $\dfrac{1}{3}$

4. La probabilité que Luc gagne à ce jeu, sachant qu'il a obtenu un jeton rouge au premier tirage est :

- $\dfrac{7}{10}$ • $\dfrac{7}{15}$ • $\dfrac{11}{15}$ • $\dfrac{5}{9}$

EXERCICE 3 — 6 points

Commun à tous les candidats

Pour tout nombre réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f_k(x) = \ln(x) - kx^2 + 1.$$

Partie A

1. Déterminer la limite de la fonction f_k en 0.

2. On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$.

En déduire la limite de la fonction f_k en $+\infty$.

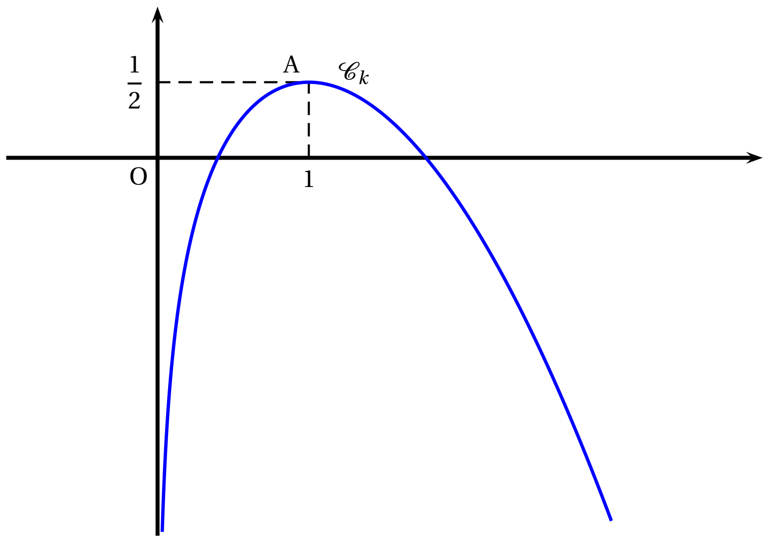
3. Montrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $f_k'(x) = \dfrac{1-2kx^2}{x}$.

4. Pour un nombre réel k strictement positif : on donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f_k.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2k}}$		$+\infty$
$f_k(x)$	‖	$\nearrow$	$\frac{1-\ln(2k)}{2}$	$\searrow$	

Justifier les renseignements sur les variations de la fonction f_k figurant dans ce tableau.

5. On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_k$ représentative d'une fonction f_k pour une certaine valeur du nombre réel k strictement positif. Le point $A\left(1\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_k$.
Quelle est la valeur du nombre réel k correspondant ? Justifier la démarche.



Partie B

Dans cette partie on pose $k = \dfrac{1}{2}$.

1. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x$. On pourra utiliser une intégration par parties.
2. Calculer, en unité d'aire, la mesure de l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 1$.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$; unité graphique : 8 centimètres.
On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1+\mathrm{i})z.$$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.
2. On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.
   a. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $z_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$
   b. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative meme non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Soient n et p deux entiers naturels. À quelle condition sur n et p les points M_n et M_p sont-ils alignés avec l'origine O du repère ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique : 4 centimètres.

On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\text{i})z.$$

1. Montrer que la transformation f est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.
2. On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

   a. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $z_n = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$.

   b. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

   c. Montrer que pour tout nombre entier naturel n, les points M_n et M_{n+8} sont confondus.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Prouver que les triangles $M_0M_1M_2$ et $M_7M_0M_1$ ont la même aire. Préciser la valeur exacte de cette aire.

Baccalauréat S Métropole 16 septembre 2010

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x(1 - \ln x).$$

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

Partie 1 : Étude de la fonction f

1. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.
2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
4. Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_a) au point A de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse a.
   a. Déterminer, en fonction du nombre réel a, les coordonnées du point A$'$, point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées.
   b. Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_a). Sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie) construire la tangente (T_a) au point A placé sur la figure.

Partie II : Un calcul d'aire

Soit a un nombre réel strictement positif. On note $\mathscr{A}(a)$ la mesure, en unité d'aire, de l'aire de la région du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = \text{e}$.

1. Justifier que $\mathscr{A}(a) = \displaystyle\int_a^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x$, en distinguant le cas $a < \text{e}$ et le cas $a > \text{e}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\mathscr{A}(a)$ en fonction de a.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2~;~+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On donne en annexe 2 (à rendre avec la copie) une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. **a.** Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
   b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n - 1 > 0$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. b.

3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.
Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b. Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Soit $(\mathscr{P})$ le plan d'équation : $3x + y - z - 1 = 0$ et $(\mathscr{D})$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -t+1 \\ y & = & 2t \\ z & = & -t+2 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ désigne un nombre réel.}$$

1. **a.** Le point C(1 ; 3 ; 2) appartient-il au plan $(\mathscr{P})$? Justifier.

b. Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ est incluse dans le plan $(\mathscr{P})$.

2. Soit $(\mathscr{Q})$ le plan passant par le point C et orthogonal à la droite $(\mathscr{D})$.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{Q})$.

b. Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan $(\mathscr{Q})$ et de la droite $(\mathscr{D})$.

c. Montrer que $\text{CI} = \sqrt{3}$.

3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite $(\mathscr{D})$ de coordonnées $(-t+1\,;\,2t\,;\,-t+2)$.

a. Vérifier que pour tout nombre réel t, $\text{C}M_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.

b. Montrer que CI est la valeur minimale de $\text{C}M_t$ lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. On considère le point I d'affixe i et le point A d'affixe $z_\text{A} = \sqrt{3} + 2\text{i}$.

a. Montrer que le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2.
Sur une figure (unité graphique 1 cm), qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice, placer le point I, tracer le cercle Γ, puis construire le point A.

b. On considère la rotation r de centre le point I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Démontrer que le point B image du point A par la rotation r a pour affixe $z_\text{B} = -1 + \text{i}\left(\sqrt{3} + 1\right)$.
Justifier que le point B appartient au cercle Γ.

c. Calculer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I.

d. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère les points E et F tels que : $\overrightarrow{\text{AE}} = \overrightarrow{\text{IB}}$ et $\overrightarrow{\text{AF}} = \overrightarrow{\text{BI}}$.

Que peut-on conjecturer pour les droites (BF) et (CE) ?

Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les deux rectangles OABC et DEFG où les points A, B, C, D, E, F, G ont pour affixes respectives

$$z_{\text{A}} = -2,\ z_{\text{B}} = -2+\text{i},\ z_{\text{C}} = \text{i},\ z_{\text{D}} = 1,\ z_{\text{E}} = 1+3\text{i},\ z_{\text{F}} = \frac{5}{2}+3\text{i}, z_{\text{G}} = \frac{5}{2}.$$

Voir la figure donnée en annexe 3.

1. On considère la similitude directe s transformant O en D et A en E.

a. Justifier que l'écriture complexe de la similitude s est : $z' = -\frac{3}{2}\text{i}z+1$.

b. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.

c. Quelle est l'image du rectangle OABC par la similitude s ?

2. On considère la similitude indirecte s' d'écriture complexe $z' = -\frac{2}{3}\text{i}\overline{z}+\frac{5}{3}\text{i}$.

a. Déterminer l'image du rectangle DEFG par la similitude s'.

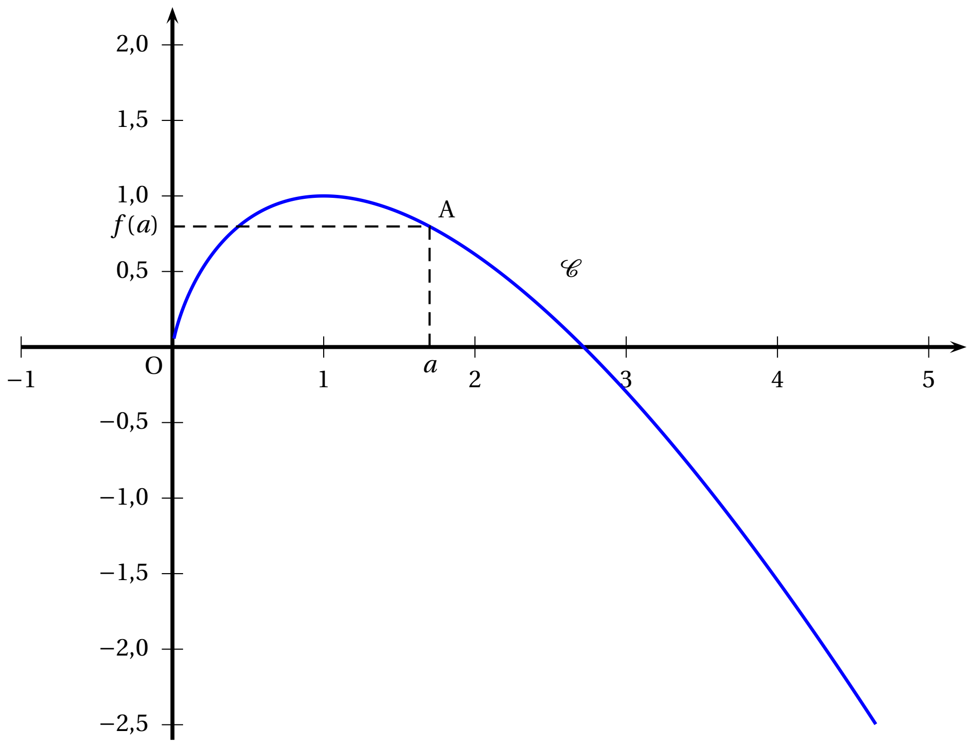
b. On considère la similitude $g = s' \circ s$.

Déterminer l'image du rectangle OABC par la similitude g.

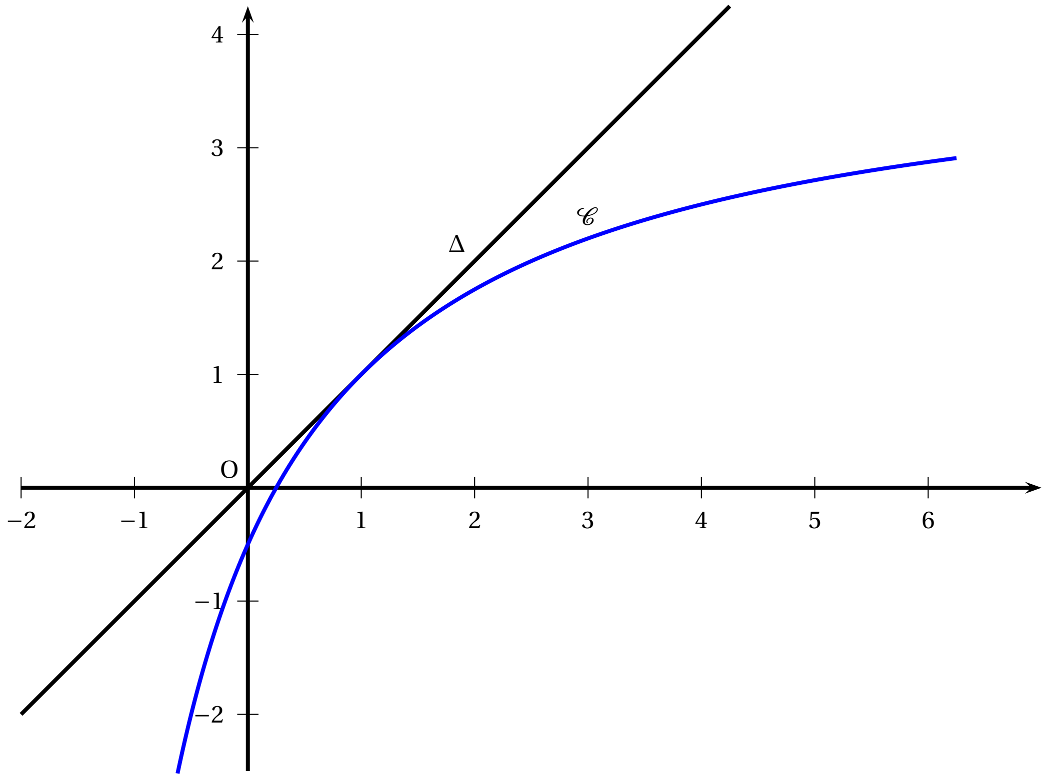
c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La similitude g a-t-elle des points fixes ? Que peut-on en conclure pour g ?

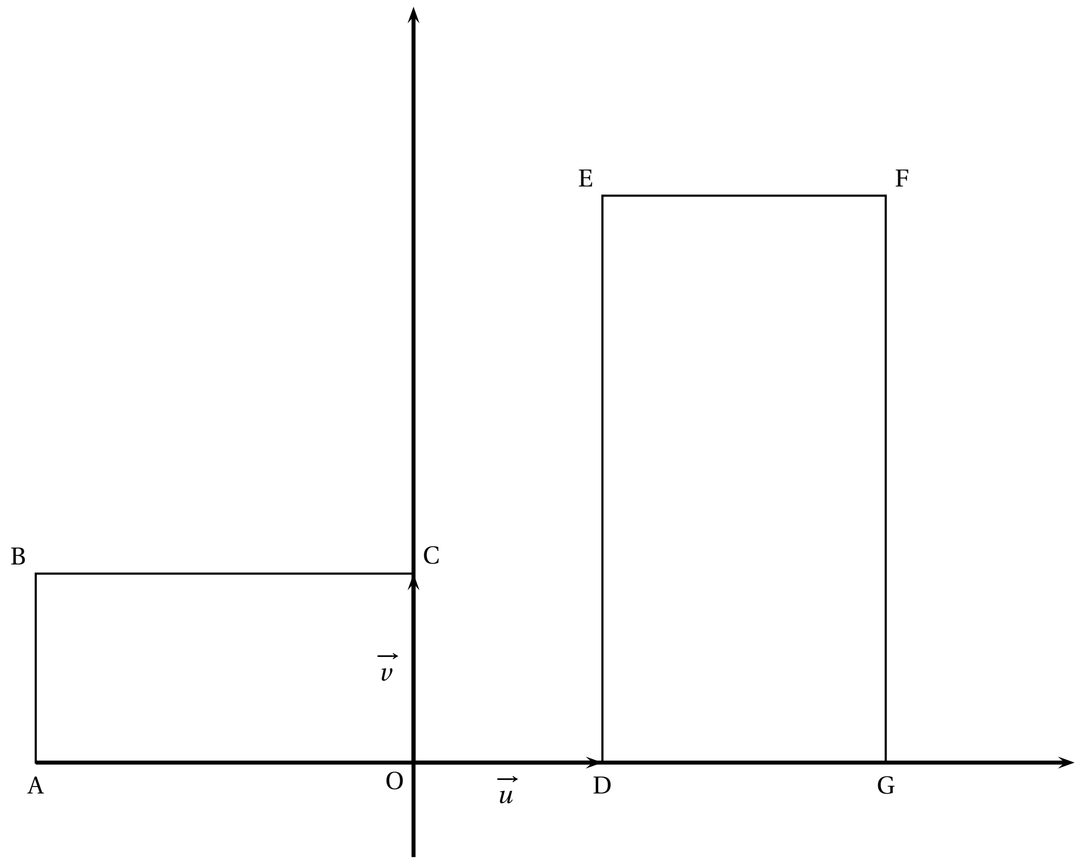
ANNEXE 1 (Exercice 1)
(à rendre avec la copie)



ANNEXE 2 (Exercice 2)
(à rendre avec la copie)



ANNEXE 3 (Exercice 4)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



∽ Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie ∾ septembre 2010

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$t_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

   Proposition 1 : Pour tout entier naturel n, $t_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \leqslant w_n \leqslant v_n.$$

   Proposition 2 : Si les suites (u_n)et (v_n) sont adjacentes alors la suite (w_n) est convergente.

3. Soient f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   Proposition 3 : Si $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ alors $f = g$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité : 1 cm).
On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B, S et Ω d'affixes respectives $a = -2+4\mathrm{i}$, $b = -4+2\mathrm{i}$, $s = -5+5\mathrm{i}$ et $\omega = -2+2\mathrm{i}$.

Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 3.
On appelle C l'image du point A par h et D l'image du point B par h.

1. **a.** Déterminer l'écriture complexe de h.

   b. Démontrer que le point C a pour affixe $c = 4+2\mathrm{i}$ et que le point D a pour affixe $d = -2-4\mathrm{i}$.

2. Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Démontrer que la droite (SΩ) est la médiatrice du segment [AB].
4. Soit P le milieu du segment [AC].

   a. Déterminer l'affixe p du point P.

   b. Démontrer que $\dfrac{\omega - p}{d - b} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{BD}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{P\Omega}}\right)$.

5. Soit Q le milieu du segment [BD].
   Que représente le point Ω pour le triangle PQS ?

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner. Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.
On appelle N l'évènement « la boule noire figure parmi les boules tirées » et G l'évènement « le joueur gagne ».

1. **a.** Déterminer la probabilité de l'évènement N.

   b. Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\dfrac{3}{10}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

   c. Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?

2. Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de m euros est demandée, où m est un réel strictement positif.

   Si le joueur gagne, il reçoit 4 euros.

   S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.

   S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.

   On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de m.

   c. On dit que le jeu est équitable si l'espérance mathématique de X est nulle.
   Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

3. Soit n un entier naturel non nul.
   On joue n fois à ce jeu sachant qu'après chaque partie les boules sont remises dans le sac.
   Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une fois est supérieure à $0,999$.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \text{e}^x - x\text{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.
4. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\,;\,+\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

   c. Démontrer que $\text{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$.
On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
La figure est donnée en annexe.
Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathscr{C})$ de coordonnées $(x\,;\,f(x))$,

P le point de coordonnées $(x\,;\,0)$,

Q le point de coordonnées $(0\,;\,f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.

   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.
2. Le point M a pour abscisse α.

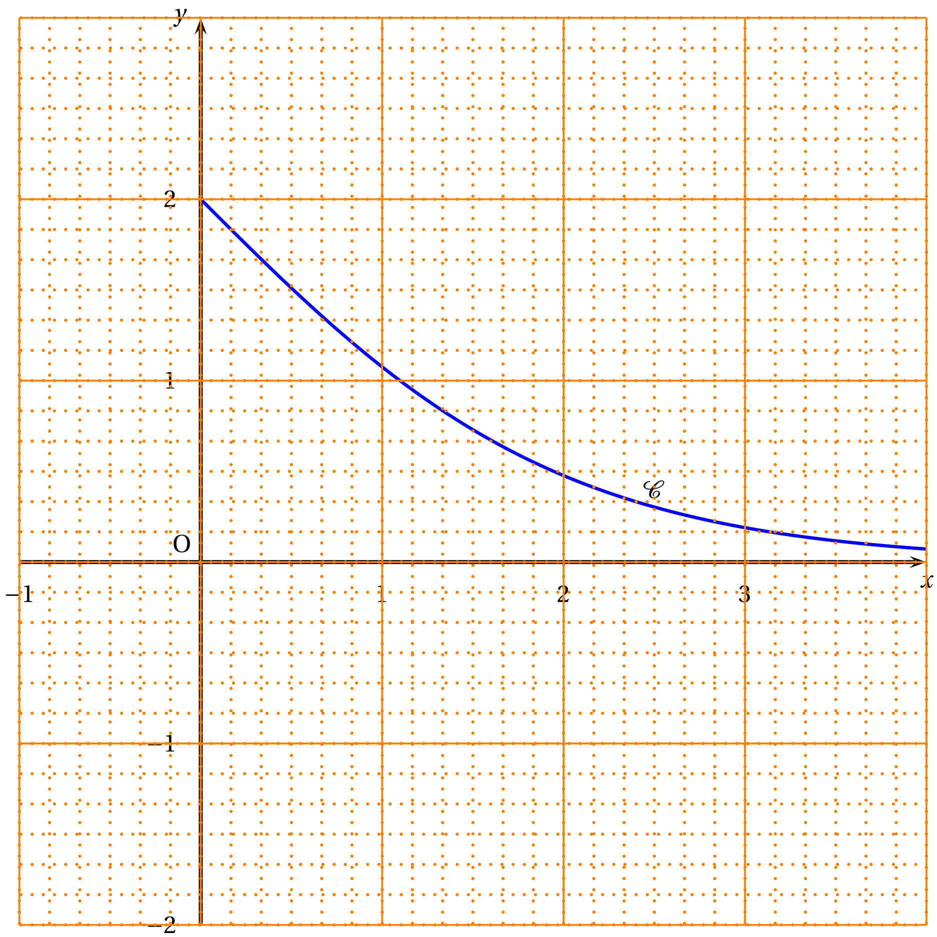
   La tangente (T) en M à la courbe $(\mathscr{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

ANNEXE

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie.

Exercice 4



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Sud Novembre 2010

Exercice 1 5 points

Commun à tous les candidats

On admet que si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites non coplanaires, il existe une unique droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Si Δ coupe $\mathscr{D}$ en le point I et $\mathscr{D}'$ en le point J, la distance IJ est appelée distance de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{D}'$.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.

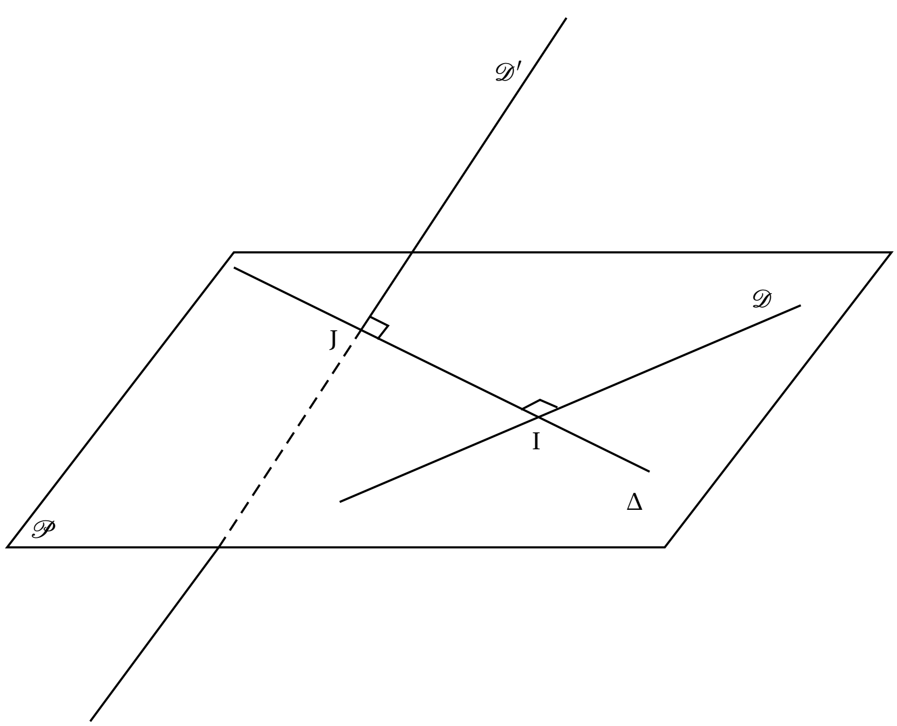
On note $\mathscr{D}$ la droite des abscisses et $\mathscr{D}'$, la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& -t\\ y &=& 3+3t\\ z &=& 1-t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.
2. On considère la droite Δ perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Prouver qu'il existe deux réels b et c tels que le vecteur $\overrightarrow{w} = b\overrightarrow{\jmath} + c\overrightarrow{k}$ soit un vecteur directeur de Δ.
3. **a.** Vérifier que le plan $\mathscr{P}$ d'équation : $-3y + z = 0$ est un plan contenant la droite $\mathscr{D}$.

   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$.

   c. Justifier que la droite passant par J, de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ est sécante à $\mathscr{D}$ en un point I et qu'elle est la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

   d. En déduire la distance de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{D}'$.



Exercice 2 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit A, B et P les points d'affixes respectives $a = 5+5i$, $b = 5-5i$ et $p = 10$.
On considère un point M, distinct de O, d'affixe z.
On note U le point d'affixe u, image du point M par la rotation R_A de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.
On note T le point d'affixe t, image du point M par la rotation R_B de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.
Soit D le symétrique du point M par rapport à O.

1. Démontrer que l'affixe du point U est $u = i(10-z)$; exprimer en fonction de z l'affixe du point T puis justifier que le quadrilatère $MUDT$ est un parallélogramme de centre O.
2. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que : $z\overline{z} - 5z - 5\overline{z} = 0$.
   Justifier que le quadrilatère OAPB est inscrit dans Γ.
3. On suppose que le point M est distinct de O, A et P. Les points O, M et U sont donc distincts deux à deux.
   a. Démontrer que les points O, M et U sont alignés si et seulement si $\frac{u}{z} = \frac{\overline{u}}{\overline{z}}$.
   b. Démontrer que les points O, M et U sont alignés si et seulement si M appartient à Γ.
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que OMU soit un triangle isocèle en O. Quelle est dans ce cas la nature du quadrilatère $MUDT$?
5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\frac{u}{z}$ soit un imaginaire pur. En déduire la nature du quadrilatère $MUDT$ dans le cas où M est un point de la droite (OP) privée de O et P.
   Prouver finalement qu'il existe une unique position du point M tel que $MUDT$ soit un carré.

Exercice 2 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A(n) = n^4 + 1$.
L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers de $A(n)$.

1. Quelques résultats
   a. Étudier la parité de l'entier $A(n)$.
   b. Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
   c. Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n.
   d. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:
   $$n^8 \equiv 1 \pmod d.$$
2. Recherche de critères
   Soit d un diviseur de $A(n)$. On note s le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que $n^k \equiv 1 \pmod d$.

a. Soit k un tel entier. En utilisant la division euclidienne de k par s, montrer que s divise k.

b. En déduire que s est un diviseur de 8.

c. Montrer que si, de plus, d est premier, alors s est un diviseur de $d-1$. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.

3. Recherche des diviseurs premiers de $A(n)$ dans le cas où n est un entier pair.

Soit p un diviseur premier de $A(n)$. En examinant successivement les cas $s = 1$, $s = 2$ puis $s = 4$, conclure que p est congru à 1 modulo 8.

4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Appliquer ce qui précède à la recherche des diviseurs premiers de $A(12)$.

Indication : la liste des nombres premiers congrus à 1 modulo 8 débute par 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, ...

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Un internaute souhaite faire un achat par l'intermédiaire d'internet. Quatre sites de vente, un français, un allemand, un canadien et un indien présentent le matériel qu'il souhaite acquérir. L'expérience a montré que la probabilité qu'il utilise chacun de ces sites vérifie les conditions suivantes (les initiales des pays désignent les évènements « l'achat s'effectue dans le pays ») :

$$P(F) = P(A), \quad P(F) = \frac{1}{2}P(C) \quad \text{et} \quad P(C) = P(I).$$

1. Calculer les quatre probabilités $P(F)$, $P(A)$, $P(C)$ et $P(I)$.

2. Sur chacun des quatre sites, l'internaute peut acheter un supplément pour son matériel. Ses expériences précédentes conduisent à formuler ainsi les probabilités conditionnelles de cet évènement, noté S :

$$P_F(S) = 0,2 \quad ; \quad P_A(S) = 0,5 \quad ; \quad P_C(S) = 0,1 \quad ; \quad P_I(S) = 0,4$$

a. Déterminer $P(S \cap A)$.

b. Montrer que $p(S) = \dfrac{17}{60}$.

c. L'internaute a finalement acheté un supplément. Déterminer la probabilité qu'il l'ait acheté sur le site canadien.

3. Sur 1 000 internautes ayant acheté ce matériel, on a établi la statistique suivante :

	Sites européens	Site canadien	Site indien
Effectif d'acheteurs	335	310	355

a. On note respectivement f_1, f_2 et f_3 les fréquences associées aux effectifs précédents. On pose :

$d^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=3}\left(f_k - \frac{1}{3}\right)^2$. Calculer d^2 puis $1000d^2$.

b. On simule 3 000 fois l'expérience consistant à tirer un nombre au hasard parmi {1 ; 2 ; 3} avec équiprobabilité. Pour chacune de ces simulations on obtient une valeur de $1\,000d^2$. Voici les résultats :

Minimum	Premier décile	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Neuvième décile	Maximum
0,000 5	0,076 3	0,211 1	0,488 45	0,940 1	1,510 4	5,925 6

Au risque 10 %, peut-on considérer que le choix d'un site européen, nord-américain ou asiatique se fait de manière équiprobable ?

Exercice 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

Le but de l'exercice est de donner un encadrement du nombre I défini par :

$$I = \int_0^1 \frac{x^2\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$.

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,1]$.

2. On pose, pour tout entier naturel $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{5}\right)$.

a. Justifier que pour tout entier k compris entre 0 et 4, on a :

$$\frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$

Interpréter graphiquement à l'aide de rectangles les inégalités précédentes.

b. En déduire que : $\dfrac{1}{5}S_4 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5}\left(S_5 - 1\right)$.

c. Donner des valeurs approchées à 10^{-4} près de S_4 et de S_5 respectivement.

En déduire l'encadrement : $1,091 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant 1,164$.

3. **a.** Démontrer que pour tout réel x de $[0\,;\,1]$, on a : $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{1+x}$.

b. Justifier l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + I$.

c. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

d. En déduire un encadrement de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ d'amplitude strictement inférieure à 10^{-1}.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ∾ 15 novembre 2010

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A : restitution organisée de connaissances

On suppose connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$

- ⋆ si pour tout $x \in [a\ ;\ b]$ $\quad u(x) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- ⋆ $\displaystyle\int_a^b [u(x)+v(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$
- ⋆ $\displaystyle\int_a^b \alpha u(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$ où α est un nombre réel.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$ et si pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

PARTIE B :

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

1. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction φ sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

   b. Calculer $\varphi(\mathrm{e})$. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

   c. Déterminer le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}.$$

   On note f' la fonction dérivée de f.

   a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \geqslant 1$ on a : $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}$.

   b. Déduire de la question 1. le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

   c. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ on a :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln x}{x^2}.$$

   d. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$.

b. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f, dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

Soit $\mathscr{A}$ l'aire exprimée en cm^2 du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \text{e}$.

Déterminer un encadrement de $\mathscr{A}$.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_\text{A} = -2\text{i}, \quad z_\text{B} = -\sqrt{3} + \text{i} \ \text{ et } \ z_\text{C} = \sqrt{3} + \text{i}.$$

1. **a.** Écrire z_A, z_B et z_C sous forme exponentielle.
   b. En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.
   c. Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.
2. **a.** Écrire le quotient $\dfrac{z_\text{B} - z_\text{A}}{z_\text{C} - z_\text{A}}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
   b. En déduire la nature du triangle ABC .
3. On note r la rotation de centre A et d'angle mesurant $\dfrac{\pi}{3}$ radians.
   a. Montrer que le point O$'$, image de O par r, a pour affixe $-\sqrt{3} - \text{i}$.
   b. Démontrer que les points C et O$'$ sont diamétralement opposés sur le cercle Γ.
   c. Tracer l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.
   d. Justifier que les cercles Γ et Γ' se coupent en A et B.
4. **a.** Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que

$$|z| = \left|z + \sqrt{3} + \text{i}\right|.$$

   b. Montrer que les points A et B appartiennent à (E).

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère la similitude indirecte f d'écriture complexe

$$z' = \left(1 + \text{i}\sqrt{3}\right)\overline{z}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
Soient les points A et B d'affixes respectives $z_\text{A} = \sqrt{6} + \text{i}\sqrt{2}$ et $z_\text{B} = -\sqrt{2} + \text{i}\sqrt{6}$.
On note A$'$ et B$'$ les images respectives des points A et B par f.

Une figure fournie en ANNEXE du sujet, sera complétée et rendue avec la copie. Les différentes constructions seront faites à la règle et au compas, et les traits de construction devront apparaître clairement.

1. **a.** Écrire les affixes des points A et B sous forme exponentielle.
 b. Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle direct.
 c. En déduire la nature du triangle OA′B′.
 d. Montrer que l'affixe $z_{A'}$ de A′ vérifie l'égalité : $z_{A'} = 2z_A$.
 En déduire la construction de A′ et B′.
2. On note r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, et s la symétrie orthogonale d'axe $\left(O\,;\,\vec{u}\right)$. On pose $g = r \circ s$.
 a. Déterminer l'écriture complexe de la transformation g.
 b. Montrer que les points 0 et A sont invariants par g.
 c. En déduire la nature de la transformation g.
3. **a.** Montrer que l'on peut écrire $f = h \circ g$, où h est une homothétie de centre et de rapport à déterminer.
 b. Sur la figure placée en **ANNEXE**, un point C est placé. Faire la construction de l'image C′ de C par la transformation f.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
 On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
 a. Vérifier que $P(X = 0) = \frac{3}{10}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
 b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
 c. Calculer la probabilité de l'évènement suivant :
 A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».
2. On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante :
 si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte, on ne la remet pas.

 a. En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité des évènements suivants :

 B : « seule la première boule tirée est verte »,

 C : « une seule des deux boules tirées est verte ».

 b. Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?

EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la position relative d'objets de l'espace

$\mathscr{P}$ est le plan passant par A(3 ; 1 ; 2) et de vecteur normal $\vec{n}\,(1\,;\,-4\,;\,1)$;

$\mathscr{D}$ est la droite passant par B(1 ; 4 ; 2) de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(1\ ;\ 1\ ;\ 3)$.

$\mathscr{S}$ est la sphère de centre $\Omega(1\ ;\ 9\ ;\ 0)$ passant par A.

1. Intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

- **a.** Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x - 4y + z - 1 = 0$.
- **b.** Montrer que la droite $\mathscr{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.

2. Intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.

- **a.** Calculer la distance d du point Ω au plan $\mathscr{P}$.
- **b.** Calculer le rayon de la sphère $\mathscr{S}$. En déduire l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.

3. Intersection de la droite $\mathscr{D}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.

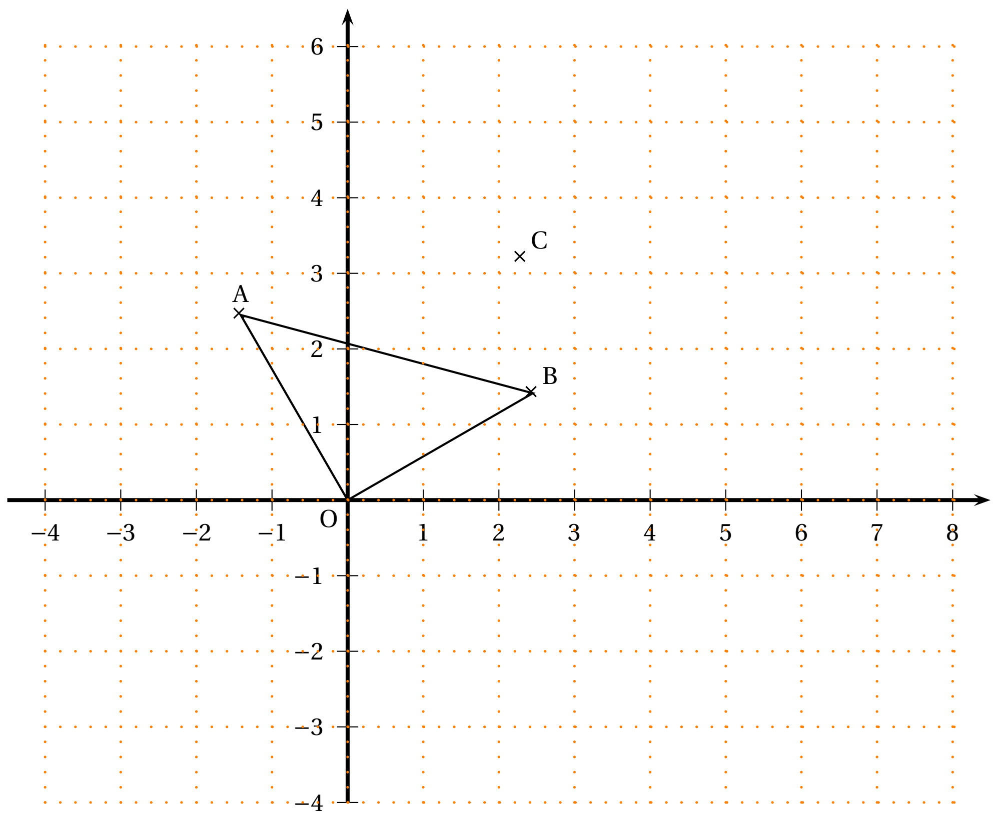
- **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.
- **b.** Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$.
- **c.** En déduire que la droite $\mathscr{D}$ coupe la sphère $\mathscr{S}$ en deux points M et N distincts dont on ne cherchera pas à déterminer les coordonnées.

ANNEXE

EXERCICE 2

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

À rendre avec la copie



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ∾ mars 2011

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On utilisera le résultat suivant : les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = K\text{e}^{ax}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Le but de cette partie est de déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution de (E).
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence suivante : f est solution de (E) $\iff$ $f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

Partie B

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$10v'(t) + v(t) = 30.$$

Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$.

1. Démontrer que $v(t) = 30\left(1 - \text{e}^{-\frac{t}{10}}\right)$.
2. **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
   b. Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.
3. On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à 0,1 m.s^{-2}. Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.
4. La distance d parcourue par ce cycliste entre les instants t_1, et t_2 est donnée par $d = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\text{d}t$.
   Calculer la distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Chaque année, deux villages A et B organisent un concours sportif. Les concurrents tirent au sort un moyen de transport puis doivent relier le village A au village B le plus rapidement possible en utilisant ce moyen de transport et un parcours adapté.

Pour le tirage, on utilise une urne contenant 4 jetons indiscernables au toucher. Sur un premier jeton figure la lettre V , sur le second la lettre R, sur le troisième la lettre P et sur le dernier la lettre L.

Un concurrent tire au hasard un jeton :
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre V, il effectuera le trajet à vélo,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre R, Il effectuera le trajet en roller,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre P, il effectuera le trajet à pied,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisira librement son mode de transport parmi les trois précédents.

On observe que lorsqu'un concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisit le vélo dans 70 % des cas, il choisit le roller dans 20 % des cas el il décide de faire le parcours à pied dans 10 % des cas.

1. Construire un arbre pondéré correspondant à la situation.
   Pour les questions suivantes, on donnera les résultats arrondis au millième.
2. Calculer la probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à vélo.
3. Sachant qu'un concurrent a effectué le trajet à vélo, quelle est la probabilité qu'il ait tiré le jeton sur lequel figure la lettre L ?
4. On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres.
   L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\frac{2}{3}$.
   Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste ».

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie par $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \end{array}\right.$ pour tout entier naturel n.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
   En déduire que si $x \in [0\ ;\ 1]$ alors $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.

Partie B

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0\ ;\ 1]$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A$(-2\ ;\ 0\ ;\ 1)$, B$(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et C$(-2\ ;\ 2\ ;\ 2)$.

1. **a.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}}$ puis les longueurs AB et AC.

b. En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$.

c. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 2z + 2 = 0$.

3. Soient $\mathcal{P}_1$, et $\mathcal{P}_2$ les plans d'équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.

Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations

paramétriques est $\left\{\begin{array}{ccl} x &=& -2 \\ y &=& -1+3t \\ z &=& t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

4. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

5. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega(1~;~-3~;~1)$ et de rayon $r = 3$.

a. Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.

Dans les deux questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

b. Étudier l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

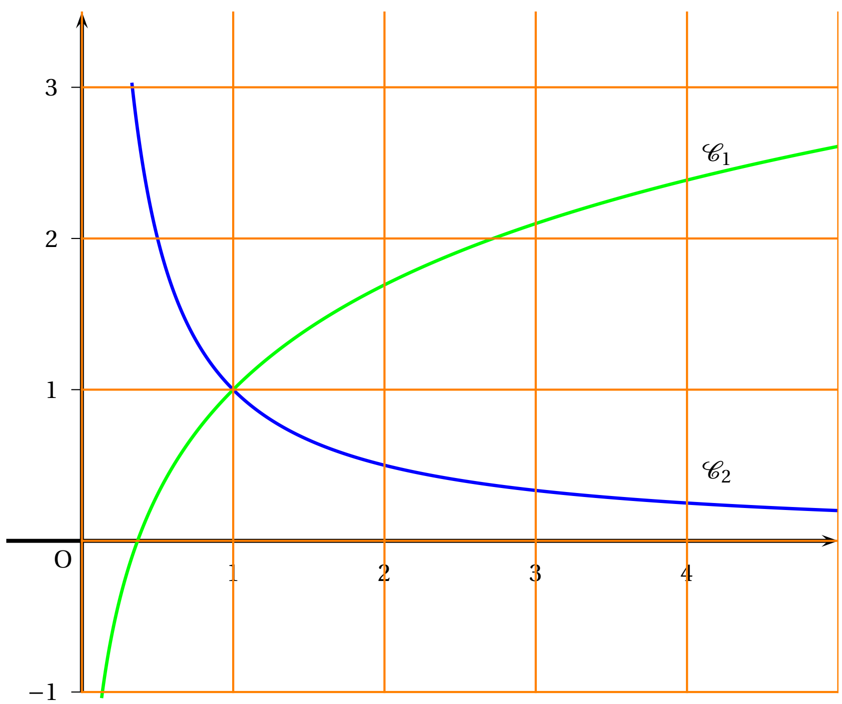
c. Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère $\mathcal{S}$.

∾ Baccalauréat S Pondichéry 13 avril 2011 ∾

Le sujet est composé de 3 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.

EXERCICE 1 **10 points**
Commun à tous les candidats

Partie I
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 définies sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.



On sait que :

– l'axe des ordonnées est asymptote aux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$
– l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_2$
– la fonction f_2 est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$
– la fonction f_1 est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$
– la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$ est $+\infty$.

Pour chacune des quatre questions de cette partie, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse juste rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'est pas sanctionnée.

1. La limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est :

• 0 • $+\infty$ • On ne peut pas conclure

2. La limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est :

• 0 • $0,2$ • On ne peut pas conclure

3. En $+\infty$, $\mathscr{C}_1$ admet une asymptote oblique :

• Oui • Non • On ne peut pas conclure

4. Le tableau de signes de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

x	$0 \qquad +\infty$	x	$0 \qquad +\infty$	x	$0 \qquad +\infty$
• $f_2(x) - f_1(x)$	$\Vert \quad +$	• $f_2(x) - f_1(x)$	$\Vert \quad -$	• $f_2(x) - f_1(x)$	$\Vert \quad + \; 0 \; -$

Partie II

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x}.$$

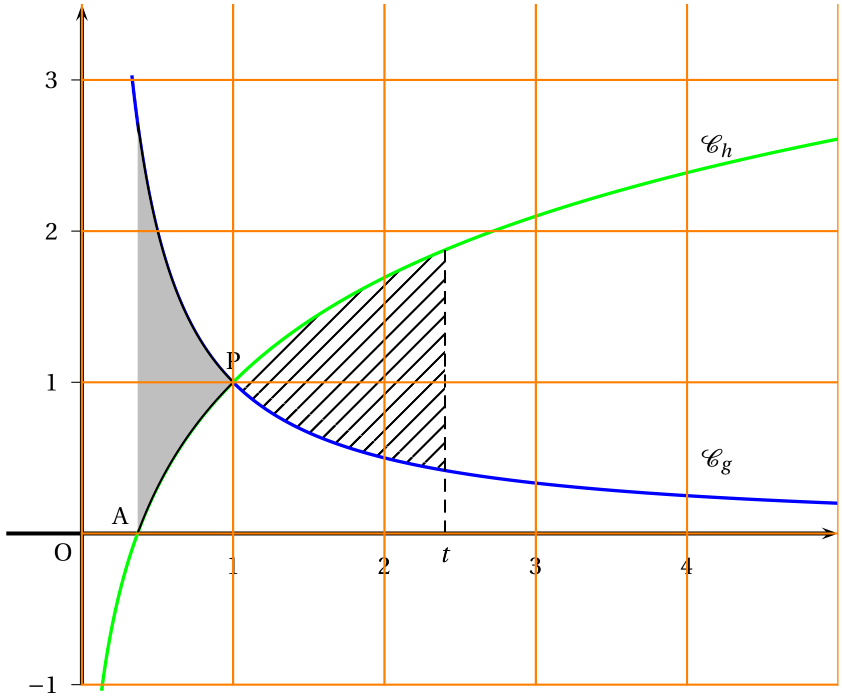
1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = x\ln x - \ln x$ est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.
5. Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.
6. Montrer que l'équation $F(x) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ qu'on note α.
7. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Partie III

Soit g et h les fonctions définies sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(x) + 1.$$

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ représentatives des fonctions g et h.

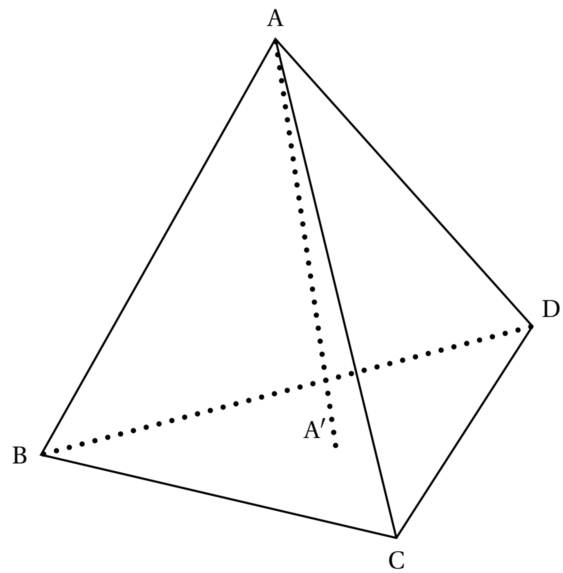


1. A est le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_h$ et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées du point A.
2. P est le point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$. Justifier que les coordonnées du point P sont $(1\,;\,1)$.
3. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = 1$ (domaine grisé sur le graphique).
   a. Exprimer l'aire $\mathscr{A}$ à l'aide de la fonction f définie dans la partie II.
   b. Montrer que $\mathscr{A} = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
4. Soit t un nombre réel de l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$. On note $\mathscr{B}_t$ l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = t$ et les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ (domaine hachuré sur le graphique).
   On souhaite déterminer une valeur de t telle que $\mathscr{A} = \mathscr{B}_t$.
   a. Montrer que $\mathscr{B}_t = t\ln(t) - \ln(t)$.
   b. Conclure.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie 1

Dans cette partie, ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un solide dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.



A′ est le centre de gravité du triangle BCD.
Dans un tétraèdre, le segment joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée est appelé médiane. Ainsi, le segment [AA′] est une médiane du tétraèdre ABCD.

1. On souhaite démontrer la propriété suivante :

   ($\mathscr{P}_1$) : *Dans un tétraèdre régulier, chaque médiane est orthogonale à la face opposée.*

   a. Montrer que $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ et que $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. (On pourra utiliser le milieu I du segment [BD] et le milieu J du segment [BC]).

   b. En déduire que la médiane (AA′) est orthogonale à la face BCD.
   Un raisonnement analogue montre que les autres médianes du tétraèdre régulier ABCD sont également orthogonales à leur face opposée.

2. G est l'isobarycentre des points A, B, C et D.
   On souhaite démontrer la propriété suivante :
   ($\mathscr{P}_2$) : *Les médianes d'un tétraèdre régulier sont concourantes en* G.
   En utilisant l'associativité du barycentre, montrer que G appartient à la droite (AA′), puis conclure.

Partie II

On munit l'espace d'un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère les points P(1 ; 2 ; 3), Q(4 ; 2 ; −1) et R(−2 ; 3 ; 0).

1. Montrer que le tétraèdre OPQR n'est pas régulier.
2. Calculer les coordonnées de P′, centre de gravité du triangle OQR.
3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (OQR) est : $3x + 2y + 16z = 0$.
4. La propriété ($\mathscr{P}_1$) de la partie 1 est-elle vraie dans un tétraèdre quelconque ?

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère, dans un repère $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ de l'espace, la surface $\mathscr{S}$ d'équation :

$$z = (x - y)^2.$$

1. On note $\mathscr{E}_1$ l'intersection de $\mathscr{S}$ avec le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation $z = 0$.
   Déterminer la nature de $\mathscr{E}_1$. On note $\mathscr{E}_2$ l'intersection de $\mathscr{S}$ avec le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation $x = 1$.
   Déterminer la nature de $\mathscr{E}_2$.

Partie B

On considère, dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, la surface $\mathscr{S}'$ d'équation :

$$z = xy.$$

1. On note $\mathscr{E}_3$ l'intersection de $\mathscr{S}'$ avec le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation $z = 0$.
   Déterminer la nature de $\mathscr{E}_3$
2. On note $\mathscr{E}_4$ l'intersection de $\mathscr{S}'$ avec le plan $\mathscr{P}_3$ d'équation $z = 1$.
   Déterminer la nature de $\mathscr{E}_4$.

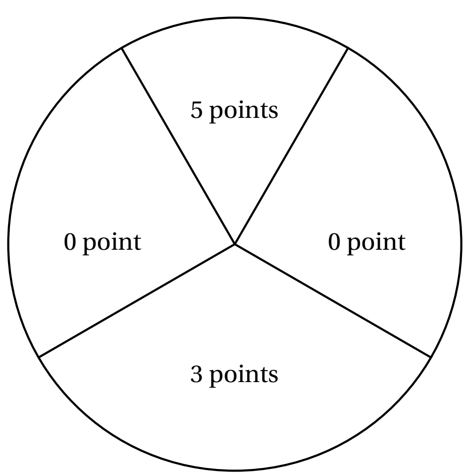
Partie C

On note $\mathscr{E}_5$ l'intersection de $\mathscr{S}$ et de $\mathscr{S}'$.
Dans cette partie, on souhaite démontrer que le seul point appartenant à $\mathscr{E}_5$ dont les coordonnées sont des entiers naturels est le point O(0 ; 0 ; 0).
On suppose qu'il existe un point M appartenant à $\mathscr{E}_5$ et dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

1. Montrer que si $x = 0$, alors le point M est le point O.
2. On suppose dorénavant que l'entier x n'est pas nul.
   a. Montrer que les entiers x, y et z vérifient $x^2 - 3xy + y^2 = 0$.
   En déduire qu'il existe alors des entiers naturels x' et y' premiers entre eux tels que $x'^2 - 3x'y' + y'^2 = 0$.
   b. Montrer que x' divise y'^2, puis que x' divise y'.
   c. Établir que y' vérifie la relation $1 - 3y' + y'^2 = 0$.
   d. Conclure.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

1. Le joueur lance une fléchette.

On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.

On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.

On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.

On a donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1$. Sachant que $p_5 = \frac{1}{2}p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3}p_0$ déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.

2. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.

On note G_2 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».

On note G_3 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».

On note P l'évènement : « le joueur perd la partie ».

On note $p(A)$ la probabilité d'un évènement A.

a. Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p(G_2) = \frac{5}{36}$.

On admettra dans la suite que $p(G_3) = \frac{7}{36}$

b. En déduire $p(P)$.

3. Un joueur joue six parties avec les règles données à la question 2.

Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?

4. Pour une partie, la mise est fixée à 2 €.

Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5 €. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 3 €. S'il perd, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie. Les valeurs possibles pour X sont donc : -2, 1 et 3.

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?