∽ Baccalauréat L 2001 ∾

L'intégrale de septembre 2000 à juin 2001

Baccalauréat L France septembre 2000

EXERCICE 1 **4 points**

Pour les questions 1 *et* 2 *ci-dessous, une seule des quatre réponses proposées est exacte. On demande à chaque fois d'indiquer laquelle, sans donner de justification.*

1. **a.** On lance une pièce de monnaie six fois de suite et on note, à chaque lancer, le nom du côté visible (Pile ou Face).
   Le nombre de résultats possibles est :

$$2^6 \qquad 6! \qquad 6^2 \qquad C_6^2.$$

   b. On prend simultanément deux cartes au hasard parmi six cartes distinctes et on note l'ensemble de deux cartes obtenu. Le nombre de tirages possibles est :

$$2^6 \qquad 6! \qquad 6^2 \qquad C_6^2.$$

   c. Six personnes s'installent sur une rangée de six sièges. Le nombre de dispositions possibles est :

$$2^6 \qquad 6! \qquad 6^2 \qquad C_6^2.$$

2. Une urne contient six boules indiscernables au toucher : trois blanches, deux noires et une rouge. On tire simultanément trois boules de l'urne au hasard.

   a. La probabilité d'obtenir trois boules blanches est :

$$\frac{1}{20} \qquad \frac{3}{20} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{2}.$$

   b. La probabilité d'obtenir exactement une boule blanche est :

$$\frac{1}{6} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{9}{20} \qquad \frac{1}{20}.$$

   c. La probabilité d'obtenir au moins une boule blanche est :

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{2}{3} \qquad \frac{17}{20} \qquad \frac{19}{20}.$$

Dans la question **3.** *ci-dessous, toutes les réponses devront être justifiées.*

3. Un élève a répondu au hasard et de façon indépendante aux six questions précédentes.

   a. Quelle est la probabilité qu'il ait au moins une réponse exacte ?

   b. Quelle est la probabilité qu'il ait exactement cinq réponses exactes.

EXERCICE 2 **5 points**

La courbe tracée sur la feuille annexe a été tracée à l'aide d'un ordinateur. Elle représente, dans un plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, une fonction f :

- définie et dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$,
- monotone sur $]-2\,;\,0]$ et sur $[0\,;\,+\infty[$,
- ayant pour limite $-\infty$ quand x tend vers -2 et quand x tend vers $+\infty$.

On admet que :

- A, B et C sont des points de cette courbe,
- la tangente au point A passe par le point E,

- la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Dans cette question, on donnera les résultats sans justification, en s'appuyant sur l'observation du graphique et les indications fournies par le texte.

 a. Déterminer $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$, $f'(-1)$ et $f'(0)$.

 b. Donner le signe de $f'(x)$, puis celui de $f(x)$.

2. On définit sur $]-2\ ;\ +\infty[$ la fonction g par $g(x) = \left[f(x)\right]^2$.

 a. Calculer $g(-1)$, $g(0)$, $g(2)$.

 b. Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} g(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

 c. Sachant que $g'(x) = 2f'(x)f(x)$, étudier le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de g en indiquant les limites.

3. Tracer sur la feuille annexe, qui sera remise avec la copie, une courbe représentative d'une fonction satisfaisant aux résultats obtenus précédemment pour la fonction g.

PROBLÈME **11 points**

On prendra soin de faire figurer sur la copie les calculs intermédiaires conduisant aux résultats présentés.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \frac{3}{\mathrm{e}^x} - \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}} = x + 3\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - 3\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-2x}.$$

1. Montrer que, pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - 2)}{\mathrm{e}^{2x}}$.

2. Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : étude de la fonction f

1. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = g(x)$. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

 b. En écrivant $f(x)$ sous la forme $f(x) = x + \mathrm{e}^{-2x}(3\mathrm{e}^x - 1)$, déduire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

3. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x]$. Interpréter graphiquement ce résultat.

 b. On note $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

4. Montrer que, sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ sur une feuille de papier millimétré (on prendra comme unité graphique 1 cm sur chaque axe et on se limitera à l'intervalle $[-1,5\ ;\ 4]$).

6. On note $\mathscr{A}_1$ l'aire, en cm^2, de la partie du plan délimitée par la courbe l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$. On note $\mathscr{A}_2$ l'aire, en cm^2, du triangle de sommets O(0 ; 0), M (4 ; 0), N (4 ; 4).

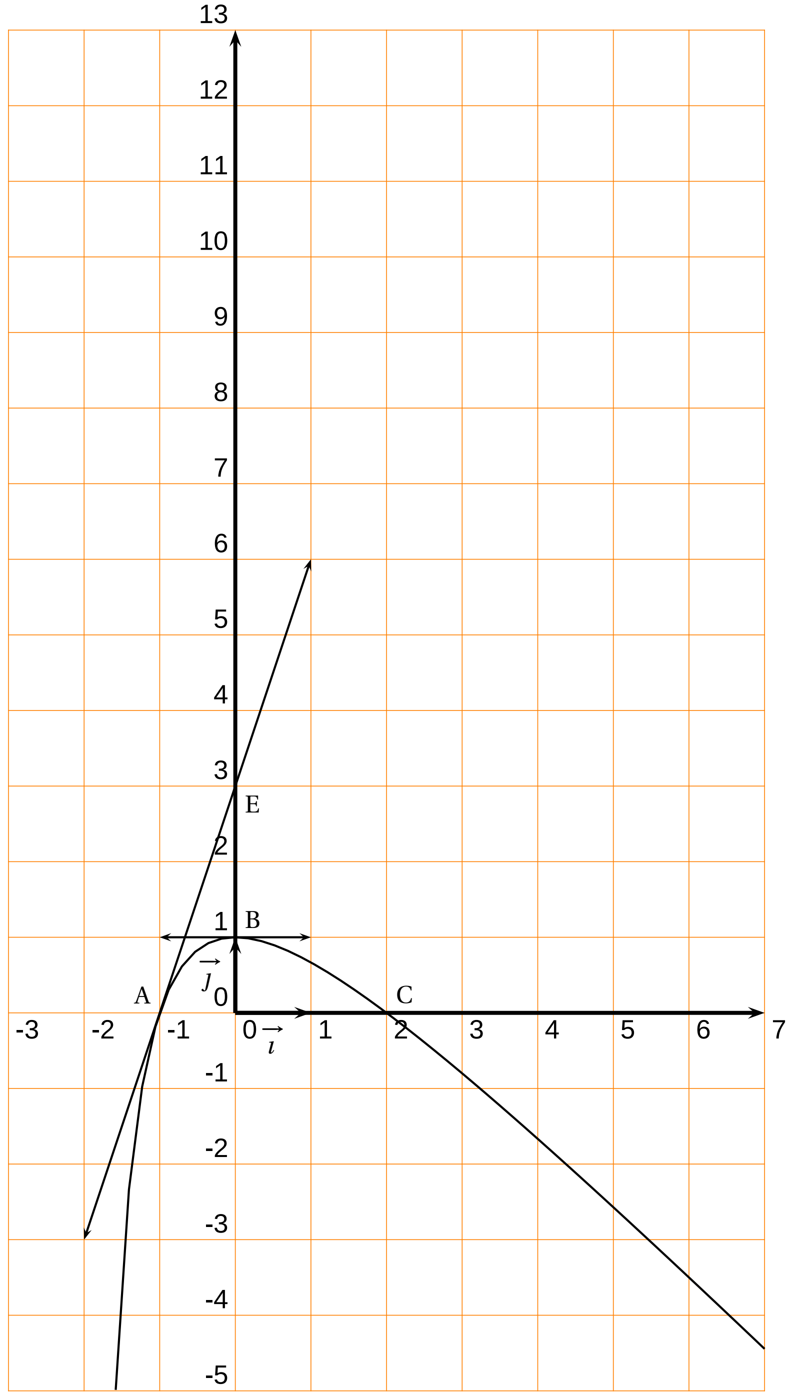
   a. Vérifier que $\mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_0^4 x\,\text{d}x$ et en déduire que $\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_0^4 [f(x) - x]\,\text{d}x$.

   b. Déterminer $\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2$ (on donnera la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au centième).

Feuille annexe à rendre avec la copie

Exercice 2 : courbe représentative de la fonction f

Les points A, B, C et E ont des coordonnées entières.



Baccalauréat L Antilles juin 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Au 1er janvier 2000, l'abonnement à internet pour un forfait de 20 heures était proposé par une société au tarif de 90 F par mois.
Le tarif est révisé au 1er janvier de chaque année.
On note P_n le prix mensuel (non arrondi) de l'abonnement en francs, au 1er janvier de l'année $(2000+n)$.
P_0 est donc égal à 90.
Une étude de marché envisage 3 scénarii d'évolution de ce prix.
On donnera tous les résultats demandés arrondis au centime.
Question 1 : Premier scénario
Le prix mensuel de l'abonnement subit une diminution de 10 % chaque année.
a. Calculer P_1 et P_2.
b. Exprimer le terme général P_n en fonction de n et calculer P_{10}.
Question 2 : Deuxième scénario
On prend comme hypothèse que la suite (P_n) est arithmétique.
Calculer alors P_{10} sachant que P_1 est égal à 85.
Question 3 : Troisième scénario
On suppose que la suite (P_n) vérifie pour tout entier naturel n la relation suivante

$$P_{n+1} = 0,8P_n + 6.$$

a. Calculer P_1 et P_2.
b. La suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_n = P_n - 30$.
Montrer que (U_n) est une suite géométrique de raison $0,8$.
c. En déduire P_n en fonction de n et calculer P_{10}.
Question 4 :
Quel scénario conduit à l'abonnement mensuel le moins cher en 2010 ?

EXERCICE 2 **5 points**

Une urne contient 4 boules en or et 3 boules en acier indiscernables au toucher.
Un joueur tire au hasard simultanément 3 boules dans cette urne.
Les probabilités demandées seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit O l'évènement : « le candidat tire 3 boules en or ».
   Déterminer la probabilité $p(\mathrm{O})$ de cet évènement.
2. Dans cette question, chaque boule en or rapporte 100 F, chaque boule en acier rapporte 10 F.
   Soit X la variable aléatoire qui désigne le gain d'un tirage.
   a. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$. Donner l'espérance de gain arrondie au franc.
3. **Dans cette question :**
   • Si le joueur tire 3 boules en or, il gagne 1 000 F puis il doit répondre à une question.
   S'il donne la bonne réponse, il double son gain sinon il repart avec 1 000 F.
   On estime que le candidat a 7 chances sur 10 de donner la bonne réponse.
   • Si le joueur ne tire pas 3 boules en or, il ne gagne rien.

a. Calculer la probabilité pour que le candidat gagne 2 000 F.

b. La probabilité pour que le joueur gagne 1 000 F étant égale à $\dfrac{6}{175}$ (on ne demande pas de le vérifier), calculer l'espérance de gain dans cette question. On arrondira le résultat au franc.

PROBLÈME **11 points**

Les deux tracés demandés en partie I question **6.** et en partie II question **4.** seront effectués sur des figures séparées. On prendra un repère orthonormal, l'unité graphique étant 1 cm.

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{8x}{x^2+4}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f.

1. Montrer que l'origine du repère est centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C})$.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$.

   c. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à cette asymptote pour les points d'abscisses positives.
3. **a.** Montrer que pour tout réel x on a $f'(x) = \dfrac{8(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$.

   b. Étudier le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
4. **a.** Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

   b. Montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $f(x) < 2x$.

   c. En déduire la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (T) pour les points d'abscisse positives.
5. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite d'équation $y = 1$ puis en donner les valeurs arrondies au centième.
6. Tracer la droite (T) et la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie II

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = 4\ln\left(\frac{x^2+4}{4}\right).$$

1. Calculer la limite de F en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Montrer que F est la primitive de f qui s'annule en 0.
   En déduire les variations de la fonction F sur $[0~;~+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $F(x) = 1$ admet une solution unique α dont on donnera une approximation au centième près.
4. Construire la représentation graphique de la fonction F sur $\mathbb{R}$ et placer le réel α.
5. Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la surface limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'xe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.
   Calculer $\mathscr{A}$, puis en donner une valeur approchée au centième près.

∽ Baccalauréat L France juin 2001 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Lors d'une fête foraine, une loterie est organisée toutes les heures. À chaque fois, trente billets sont vendus parmi lesquels dix sont gagnants (on admet que tous les billets ont la même probabilité d'être achetés).
On donnera pour chaque résultat la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au millième.

1. Luc achète un billet. Quelle est la probabilité que ce billet soit gagnant ?
2. Marc participe à trois loteries consécutives pour lesquelles il prend à chaque fois un billet (on admet que les loteries sont indépendantes).
   Quelle est la probabilité que Marc ait au moins un billet gagnant ?
3. Pierre participe à une loterie, il achète simultanément trois billets.
   a. Quelle est la probabilité que Pierre n'ait pas de billet gagnant ?
   b. Quelle est la probabilité que Pierre ait au moins un billet gagnant ?
4. Qui de Pierre ou de Marc a le plus de chances d'avoir au moins un billet gagnant ?
5. La publicité annonce « *Un billet sur trois est gagnant ! Achetez trois billets !* » Ce texte suggère que, en achetant trois billets, on est sûr de gagner.
   Que pensez-vous de l'énoncé de la publicité ?

Exercice 2 **5 points**

On considère la suite définie pour tout entier naturel n par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & -\dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{2}{3}u_n - 1 \end{array}\right.$$

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.
   b. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. On pose $v_n = u_n + 3$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique ; déterminer sa raison et son premier terme.
3. Dormer l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
4. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. On pose $s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.
   Exprimer s_n en fonction de n et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.

PROBLÈME **11 points**

On prendra soin de faire figurer sur la copie les calculs intermédiaires conduisant aux résultats présentés.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe $\mathscr{C}$ tracée sur la feuille annexe représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^{-2x} - 4\text{e}^{-x} - 2x + 4.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on pourra factoriser e^{-x} et utiliser la propriété $\lim\limits_{x\to-\infty} x\text{e}^{x} = 0$).

2. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

 b. Soit la droite Δ d'équation $y = -2x+4$. Tracer la droite Δ sur la feuille annexe, qui sera remise avec la copie, et montrer que Δ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

 c. Calculer les coordonnées de A, point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de Δ.
 Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et de Δ.

3. Montrer que $f'(x) = -2\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)^2$. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[1 ; 2]$ une unique solution α.
 Soit K le point de la courbe qui a pour abscisse α ; placer ce point sur la figure.

5. **a.** Déterminer une équation de la tangente D au point B d'abscisse 0.

 b. Déterminer les coordonnées du point E de $\mathscr{C}$ où la tangente D$'$ à la courbe est parallèle à la droite Δ.

 c. Placer les points B et E sur la feuille annexe et construire les droites D et D$'$.

6. Soit g la fonction définie pour tout réel x par

$$g(x) = -2x+4 - f(x).$$

 Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\ln 4}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x$. Donner une interprétation graphique de ce résultat en illustrant la réponse à l'aide de la feuille annexe.

Feuille annexe à rendre avec la feuille

Problème : courbe représentative de la fonction f.