Baccalauréat L 2003

L'intégrale de septembre 2002 à juin 2003

Durée : 3 heures

Baccalauréat L Antilles septembre 2002

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE **(7 points)**

On considère un segment [AB] de longueur 10 centimètres et un point M de ce segment, différent de A et B. Les points N et P sont tels que AMNP est un carré.
L'objectif de l'exercice est de déterminer le point M du segment [AB] pour lequel la distance BN est minimale. Les distances sont exprimées en centimètres.

I. On pose A$M = x$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer l'intervalle des valeurs possibles pour x.
3. Déterminer en fonction de x la distance BM.
4. Déterminer en fonction de x la distance BN.
   (On rappelle le théorème de Pythagore : dans un triangle ABC rectangle en A on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$)

II. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}.$$

La fonction dérivée f' de f est définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par

$$f'(x) = \frac{2x - 10}{\sqrt{2x^2 - 20x + 100}}.$$

1. **a.** étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 10]$.
   b. Montrer que la fonction f admet un minimum sur l'intervalle $[0 ; 10]$ que l'on précisera.
2. **a.** Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité un centimètre.
   b. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 8$. On fera apparaître les traits de construction utiles et on donnera des valeurs approchées des solutions lues.

III. En utilisant les résultats précédents, déterminer le point M du segment [AB] pour lequel la distance BN est minimale.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **(6 points)**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 5$.

1. **a.** Calculer les termes u_1 et u_2.
   b. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? On justifiera les réponses.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$v_n = u_n + 10.$$

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et calculer le premier terme v_0.
   b. Exprimer le terme général v_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

AU CHOIX exercice 3 ou exercice 4

EXERCICE 3 **7 points**

Une urne contient trois boules vertes, une boule bleue et cinq boules rouges.
On tire au hasard simultanément trois boules de cette urne.

1. Déterminer le nombre de choix possibles pour ce tirage.
2. On considère les évènements A, B, C et D suivants :
   A : « Tirer trois boules rouges ».
   B : « Tirer trois boules de la même couleur ».
   C : « Ne tirer aucune boule verte ».
   D : « Tirer au moins une boule verte ».
   a. Montrer que la probabilité $p(\text{A})$ de l'évènement A est égale à $\frac{5}{42}$.
   b. Déterminer la probabilité de chacun des événements B, C et D. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
3. Un tirage est gagnant si l'on tire trois boules rouges.
   On effectue quatre tirages successifs en remettant à chaque fois les trois boules tirées dans l'urne. Tous les tirages sont indépendants.
   Déterminer la probabilité d'obtenir exactement trois tirages gagnants. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.

EXERCICE 4 **7 points**

On considère les nombres A= 8387592115 et B = 9276312516.

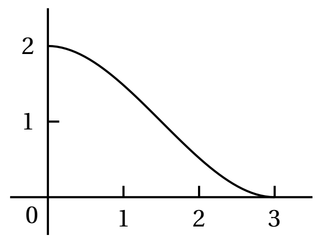
1. **a.** Montrer que 1 000 est divisible par 8.
   b. Montrer que A est congru à 3 modulo 8.
   c. Donner l'entier naturel b strictement inférieur à 8 tel que B soit congru à b modulo 8.
2. Déterminer les entiers naturels strictement inférieurs à 8 qui sont congrus respectivement à A+B et à AB.
3. **a.** Montrer que B^2 est divisible par 8.
   b. Montrer que A^2 n'est pas divisible par 8.
   c. Montrer que A^{100} n'est pas divisible par 8.

Baccalauréat L France septembre 2002

Durée de l'épreuve : 3 heures

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE **8 points**

Une entreprise souhaite fabriquer, pour de jeunes enfants, des toboggans dont le profil a l'allure de la courbe ci-contre.



Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On prendra 3 cm pour unité graphique.
L'objet de l'exercice est de modéliser ce profil à l'aide de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 3]$ vérifiant les conditions suivantes :
(1) La courbe $\mathcal{C}$ passe par les points $A(0 ; 2)$ et $B(3 ; 0)$;
(2) La courbe $\mathcal{C}$ admet en chacun des points A et B une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Partie I

1. **a.** Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 2.$$

étudier les variations de la fonction f (on ne demande pas l'étude des limites).

b. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3.$$

étudier les variations de la fonction g (on ne demande pas l'étude des limites).

2. On note respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.

a. Démontrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ passent par le point $K\left(1 ; \frac{4}{3}\right)$ et ont la même tangente T en ce point.

b. Tracer sur un même graphique, la droite T, la partie de $\mathcal{C}_f$ correspondant aux points d'abscisses comprises entre 0 et 1, et la partie de $\mathcal{C}_g$ correspondant aux points d'abscisses comprises entre 1 et 3.

emphLa courbe obtenue en réunissant les deux parties de courbes est une réponse au problème posé.

Partie II

Le bureau d'études a établi que l'on pouvait également modéliser le profil du toboggan à l'aide d'une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}_h$ de la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par :

1. Démontrer que la fonction h vérifie les conditions (1) et (2).
2. Déterminer les coordonnées du point de $\mathscr{C}_h$ d'abscisse 1 et le c ?fficient directeur de la tangente en ce point.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **7 points**

Alice et Carole comparent leurs salaires. Elles débutent chacune avec un salaire de 1500 euros.
Chaque mois, à partir du deuxième mois :
• Le salaire d'Alice augmente de 8 euros.
• Le salaire de Carole augmente de 0,2 % et on y ajoute 4 euros.
Pour tout entier naturel n, on désigne par a_n, le salaire mensuel en euros que perçoit Alice à la fin du $(n+1)$-ième mois, et par c_n, celui perçu par Carole. Ainsi :
$a_0 = c_0 = 1500$; a_1, et c_1 représentent les salaires perçus à la fin du deuxième mois.

1. Calculer a_1 et c_1, a_2 et c_2.
2. **a.** Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

   b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de a_n, en fonction de n.
3. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n :

$$c_{n+1} = 1,002c_n + 4.$$

   b. On considère la suite (v_n) telle que, pour tout entier naturel n, $v_n = c_n + 2000$.
   Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,002. Calculer v_0 et, pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n. En déduire que :

$$c_n = 3500 \times 1,002^n - 2000.$$

4. Calculer, puis comparer les salaires annuels qu'Alice et Carole ont perçus au cours de leur première année de travail.

Rappel

Si q est un réel différent de 1 et n un entier naturel supérieur à 2,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

$$\text{et} \qquad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Le candidat traitera au choix l'exercice 3 ou l'exercice 4

EXERCICE 3 AU CHOIX **5 points**

Une agence de voyages de Paris organise des circuits touristiques comprenant les sites suivants : le musée d'Orsay, le musée du Louvre, le musée Grévin, l'Arc de Triomphe, la tour Eiffel, l'Assemblée nationale.

1. L'agence propose à ses clients un forfait pour la visite de quatre sites parmi les six cités.

   a. Quel est le nombre de choix possibles si on ne tient pas compte de l'ordre des visites ?

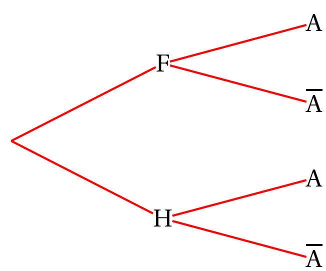
b. Combien de ces choix comprennent à la fois la visite de la tour Eiffel et celle du musée d'Orsay ?

2. Une étude statistique a permis d'observer que 55 % des clients de l'agence sont des femmes et 45 % des hommes. De plus, parmi ces clients, 30 % des hommes et 20 % des femmes visitent l'Assemblée nationale.

On choisit au hasard un client. On note F l'évènement « le client est une femme », H l'évènement « le client est un homme », A l'évènement « le client visite l'Assemblée nationale » et $\overline{\text{A}}$ l'évènement contraire de A : « le client ne visite pas l'Assemblée nationale ».

a. D'après les informations de l'énoncé, préciser les probabilités $p(\text{F})$, $p(\text{H})$, $p_{\text{H}}(\text{A})$, $p_{\text{F}}(\text{A})$.

b. Reproduire et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.
En déduire la valeur de $p(\text{A})$.



c. Quelle est la probabilité que le client soit un homme sachant qu'il ne visite pas l'Assemblée nationale ?

EXERCICE 4 AU CHOIX **5 points**

Le 1er août 2002 sera un jeudi. Le but du problème est de déterminer les années comprises entre 2003 et 2029 pour lesquelles le 1er août tombera aussi un jeudi.
Pour ces années, une année bissextile est une année dont le millésime est divisible par 4. On rappelle qu'une année non bissextile compte 365 jours et une année bissextile 366 jours.

1. Donner la liste des années bissextiles comprises entre 2003 et 2029.

2. **a.** Démontrer que l'on a : $365 \equiv 1$ (modulo 7) et $366 \equiv 2$ (modulo 7).

b. Prouver que le 1er août 2003 sera un vendredi et le 1er août 2004 un dimanche.

c. Préciser le jour de la semaine correspondant au 1er août de chacune des années de 2005 à 2013.

3. Donner la liste des années de 2003 à 2029 pour lesquelles le 1er août sera un jeudi.

Durée : 3 heures

Baccalauréat L Amérique du Sud novembre 2002

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT L'EXERCICE 1 ET L'EXERCICE 2 ET AU CHOIX SOIT L'EXERCICE 3 SOIT L'EXERCICE 4.

L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve. L'attention des candidats est attirée sur le fait que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE — 6 points

à « La ferme de la poule pondeuse », chaque jour on produit des œufs de deux tailles différentes :
60 % des œufs sont moyens et 40 % des œufs sont gros.
Les œufs sont classés en deux catégories : ceux de qualité ordinaire et ceux de qualité supérieure.
On a remarqué que :
50 % des œufs moyens sont de qualité ordinaire,
20 % des gros œufs sont de qualité ordinaire.
On choisit un œuf au hasard. Le choix au hasard d'un œuf dans la production du jour signifie qu'on se place dans un modèle avec équiprobabilité. On définit les évènements suivants :
M : « l'œuf est moyen »,
G : « l'œuf est gros »,
O : « l'œuf est de qualité ordinaire »,
S : « l'œuf est de qualité supérieure ».

1. Donner les probabilités suivantes :
   $P(\text{G})$, probabilité que l'œuf soit gros,
   $\text{P}_{\text{G}}(\text{S})$, probabilité que l'œuf soit de qualité supérieure sachant qu'il est gros.
2. Démontrer que la probabilité de prendre un œuf gros et de qualité supérieure est égale à 0,32.
3. Calculer la probabilité $P(\text{M} \cap \text{S})$ que l'œuf soit moyen et de qualité supérieure puis la probabilité $P(\text{S})$ de l'évènement S.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE — 8 points

On veut résoudre, dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ l'équation :

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = 0.$$

A – Méthode graphique :

1. a. Vérifier que le nombre 2 n'est pas solution de l'équation.
   b. Montrer que, pour x?2, l'équation $x^2 = \dfrac{4x-5}{x-2}$ est équivalente à l'équation $x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = 0$.
2. Soit f la fonction définie pour tout réel x différent de 2 par $f(x) = \dfrac{4x-5}{x-2}$. Sa courbe représentative $\mathscr{H}$ dans un repère orthonormé est donnée en annexe à

a. Par lecture graphique, indiquer le sens de variations de f sur chacun des intervalles $]-\infty\,;\,2[$ et $]2\,;\,+\infty[$.

b. Déterminer la dérivée f' de f puis justifier le résultat lu dans la question précédente.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$. Tracer sa courbe représentative $\mathscr{P}$ dans le repère utilisé pour utilisé pour $\mathscr{H}$.

4. Par lecture graphique, déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = 0$. Donner la valeur exacte ou une valeur approchée à 10^{-1} près de chacune de ces solutions.

B - Méthode algébrique

1. Vérifier que, pour tout réel x : $(x-1)(x^2 - x - 5) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 - x - 5$.

a. étudier le sens de variation de h.

b. Montrer que $h\left(\dfrac{1}{2}\right)$ est la valeur minimum prise par h.

c. On pose $x = \dfrac{1}{2} + u$. Exprimer $h\left(\dfrac{1}{2} + u\right)$ en fonction de u ; factoriser l'expression obtenue.

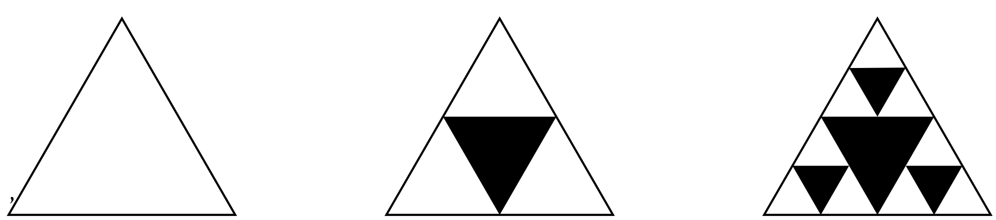
d. En déduire les valeurs du réel x pour lesquelles $h(x) = 0$.

3. Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = 0$.

LE CANDIDAT TRAITERA L'UN DES DEUX EXERCICES SUIVANTS

EXERCICE 3 AU CHOIX **6 points**

On divise un triangle équilatéral en quatre triangles équilatéraux obtenus en traçant les segments joignant les milieux des côtés et on noircit le triangle central. Chaque triangle non noirci est alors divisé en quatre triangles équilatéraux selon le même procédé et on noircit le triangle central comme précédemment.



$1^{\text{ère}}$ étape 2^{e} étape

1. **a.** Réaliser la 3^{e} étape en partant d'un triangle équilatéral de côté 16 cm. Combien de triangles noircis ont-ils été rajoutés ?

b. Combien de triangles noircis seront-ils rajoutés à la quatrième étape ?

2. On note T_n le nombre de triangles noircis rajoutés à la n-ième étape où n est un entier supérieur ou égal à 1.

La suite (T_n), ainsi définie, est une suite géométrique de raison 3.

a. Donner la valeur de $T_1,\ T_2,\ T_3$.

b. Exprimer T_n en fonction de n. Vérifier les résultats trouvés à la question

3. Calculer le nombre total de triangles noircis après la dixième étape.

EXERCICE 4 AU CHOIX **6 points**

Une urne contient 11 jetons (indiscernables au toucher) numérotés de 1 à 11.
On tire simultanément trois jetons de l'urne.

1. Démontrer que le nombre de tirages possibles est égal à 165.
2. a. Déterminer le nombre de tirages ne comportant que des jetons ayant un numéro impair.
   b. En déduire le nombre de tirages ayant au moins un jeton dont le numéro est pair.
3. a. Déterminer le nombre de tirages comportant trois jetons ayant un numéro pair.
   b. Déterminer le nombre de tirages comportant le jeton numéroté 2 et aucun autre jeton ayant un numéro pair. En déduire le nombre de tirages avec un seul jeton portant un numéro pair.
   c. Justifier que le nombre de tirages ayant seulement deux jetons avec un numéro pair est égal à 60.

Baccalauréat L facultatif Amérique du Nord juin 2003

Durée de l'épreuve : 3 heures
L'usage d'une calculatrice est autorisé (circulaire n° 99-186 du 16-11-1999)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les graphiques demandés seront réalisés sur une feuille de papier millimétré mise à votre disposition.

Le candidat doit traiter TROIS exercices :
Obligatoirement : l'exercice 1 et l'exercice 2,
Au choix : l'exercice 3 ou l'exercice 4.

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE **7 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle I = [0,25 ; 10] par

$$f(x) = \ln(x) + \frac{2}{x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, l'unité de longueur étant 2 cm.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de cette fonction f et dresser le tableau de variations de la fonction f sur I.
2. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$ et en déduire l'équation réduite de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse 1.
3. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ ainsi que la tangente (T).
4. **a.** Développer $(x-3)(x-6)$.

   b. Résoudre dans l'intervalle I l'équation $f'(x) = \frac{1}{9}$.

   c. Justifier alors que la courbe $(\mathscr{C})$ admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = \frac{x}{9}$.

Dérivées de fonctions usuelles :

$F(x)$	x	x^2	x^3	$\frac{1}{x}$	$\ln x$	e^x
$F'(x)$	1	$2x$	$3x^2$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	e^x
conditions				$x \neq 0$	$x > 0$	

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **7 points**

Un jeu consiste à cocher 8 cases sur une grille A (n upo 1 à 20) et 1 case sur une grille B (n° 1 à 4)

GRILLE A

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

GRILLE B

1	2	3	4

« *Les résultats des calculs de probabilité seront donnés à* 0,000 1 près »

1. Déterminer le nombre de façons possibles de cocher 8 cases dans la grille A.
   Un tirage détermine 8 « bons numéros » dans la grille A et 1 « bon numéro » dans la grille B.
2. Cas 1 : le joueur récupère sa mise lorsqu'il a coché 4 « bons numéros » dans la grille A et 1 « bon numéro » dans la grille B.
   a. Combien de grilles cochées A comportent 4 « bons numéros » et 4 « mauvais numéros » ? En déduire la probabilité de cocher 4 « bons numéros » dans la grille A.
   b. Déterminer la probabilité de cocher le « bon numéro » dans la grille B.
   c. En déduire que la probabilité que le joueur récupère sa mise est de 0,0688.
3. Cas 2 : le joueur gagne s'il a coché 5, 6, 7 et 8 « bons numéros » dans la grille A (avec ou sans le numéro gagnant de la grille B).
   a. Combien de grilles cochées A comportent 5 « bons numéros » et 3 « mauvais numéros » ?
   b. En déduire la probabilité de cocher 5 « bons numéros » dans la grille A.
4. On admet que la probabilité d'être gagnant est de $\frac{2}{11}$. Un joueur décide de jouer les mêmes numéros sur 4 tirages consécutifs. Déterminer la probabilité que ce joueur soit gagnant 2 fois sur les 4 tirages.

EXERCICE 3 AU CHOIX **6 points**

Rappel : un rectangle est un « rectangle d'or » si le quotient de sa longueur par sa largeur est égal au nombre d'or : $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

ABCD est un rectangle tel que AD > AB. On considère les points K ∈ [BC] et H ∈[AD] tel que ABKH soit un carré et I le milieu du segment [AH].

1. Justifier que $\text{ID} = \text{AD} - \frac{1}{2}\text{AB}$.
2. Montrer que $\text{IB} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ \text{AB}$.
3. Dans cette question on suppose que le rectangle ABCD est un rectangle d'or.
   a. Exprimer ID en fonction de AB.
   b. En déduire que si ABCD est un rectangle d'or alors ID = IB.
4. Dans cette question, **on suppose que ID = IB**.
   a. Exprimer AD en fonction de AB.
   b. En déduire que ABCD est un rectangle d'or.
5. On considère un segment [AB] de longueur 6 cm.
   Construire à la règle et au compas un rectangle d'or ABCD (AD > AB) en justifiant la construction de chaque élément et en laissant apparaître les tracés.

EXERCICE 4 AU CHOIX **6 points**

Dans une entreprise de vente par correspondance, les références des articles sont composées de 6 chiffres et d'une lettre de contrôle afin d'éviter les erreurs de saisie.
La position de la lettre dans l'alphabet correspondant au reste de la division de la référence numérique par 26.
Exemple : la référence numérique $123456 = 4748 \times 26 + 8$ et la 8^{e} lettre de l'alphabet est H donc la référence de l'article avec sa clé de contrôle est 123456 H.

1. La référence numérique d'un article est 784503, déterminer la lettre de contrôle correspondant à cette référence.
2. On considère la référence ·37254 H où le 1^{er} chiffre a été effacé.

   a. On note n le chiffre manquant. Vérifier que le nombre $n37\,254 = n \times 100000 + 37\,254$.

   b. Déterminer le reste de la division de 100000 par 26, puis de 37254 par 26.

   c. En déduire que $4n + 22 \equiv 8 \quad (\text{modulo } 26)$.

   d. Sachant que $1 \leqslant n \leqslant 9$, déterminer le chiffre manquant de la référence.

∽ Baccalauréat L Antilles-Guyane juin 2003 ∽

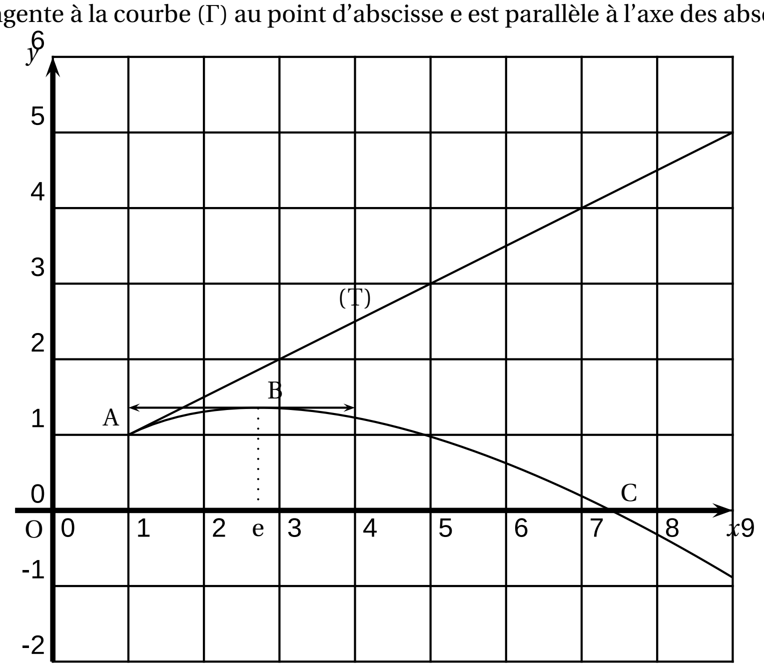
EXERCICE 1 **7 points**

La courbe (Γ) ci-dessous représente dans un repère orthonormal une fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$.

On note f' la fonction dérivée de f sur cet intervalle.

La droite (T) est tangente à la courbe (Γ) au point A(1 ; 1).

La tangente à la courbe (Γ) au point d'abscisse e est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Par lecture graphique
   - **a.** Donner le coefficient directeur de la droite (T)
   - **b.** Donner $f(1)$ et $f'(\mathrm{e})$
   - **c.** Déterminer les réels x de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ qui vérifient $f'(x) \leqslant 0$.
   - **d.** En traçant le plus précisément possible la tangente à la courbe (Γ) au point C, lire le coefficient directeur de cette tangente.
2. On admet que la fonction f est définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{2}[2 - \ln(x)].$$

   - **a.** Calculer l'ordonnée du point B d'abscisse e
   - **b.** Déterminer l'abscisse du point C, intersection de la courbe (Γ) avec l'axe des abscisses.
3. La dérivée f' de f est définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $f'(x) = k\ln\left(\frac{\mathrm{e}}{x}\right)$ où k est un nombre réel donné.
   - **a.** Vérifier le résultat donné pour $f'(\mathrm{e})$ à la question 1.
   - **b.** Déterminer le réel k sachant que $f'\left(\mathrm{e}^2\right) = -\frac{1}{2}$.
   - **c.** Donner une équation de la tangente à la courbe (Γ) au point C.
   - **d.** Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (T) et

EXERCICE 2 **7 points**

Le numéro I.N.S.E.E est constitué de 15 chiffres. En lisant de gauche à droite :
- le premier chiffre est 1 s'il s'agit d'un homme et 2 s'il s'agit d'une femme ;
- les deux chiffres suivants désignent les deux derniers chiffres de l'année de naissance ;
- les deux chiffres suivants désignent le mois de naissance ;
- les deux chiffres suivants désignent le département de naissance ;
- les trois chiffres suivants désignent la commune de naissance ;
- les trois chiffres suivants désignent le numéro d'inscription sur le registre d'état-civil ;
- les deux chiffres suivants désignent la clé K, calculée de la manière suivante :
  - soit A le nombre entier constitué par les 13 chiffres de gauche ;
  - soit r le reste de la division euclidienne de A par 97 ;
  - alors $K = 97 - r$.

Les 13 premiers chiffres (sans la clé) du numéro I.N.S.E.E de Sophie sont 2 85 07 86 183 048.

On note A ce nombre et r le reste de la division euclidienne de A par 97.

1. Donner le mois de l'année de naissance de Sophie.
2. a. Déterminer les deux entiers a et b tels que $A = a \times 10^6 + b$ avec $0 \leqslant b < 10^6$.

   b. En utilisant le reste de 100 dans sa division euclidienne par 97, montrer que $10^6 \equiv 27 \quad (\text{modulo} \quad 97)$.

   c. En déduire le reste r de la division euclidienne de A par 97.
3. Déterminer la clé K du numéro I.N.S.E.E de Sophie.
4. Sophie, à qui l'on demande les treize premiers de son numéro I.N.S.E.E, inverse les deux derniers chiffres et répond 2 85 07 86 183 084 à la place de 2 85 07 86 183 048.

   On note B la réponse de Sophie.

   a. Calculer la différence $B - A$ et en déduire que le reste de la division euclidienne de B par 97 est égal à 21.

   b. L'erreur faite par Sophie peut-elle être détectée ?

EXERCICE 3 **6 points**

On donnera les résultats sous forme irréductible.

On dispose d'un damier dont chacune des neuf cases est marquée d'un des trois nombres 1, 2 et 3 selon le schéma ci-contre :

1	2	3
2	3	1
3	1	2

On répartit au hasard trois pions indiscernables sur le damier (un pion par case) et on appelle S la somme des trois nombres marqués sur les trois cases occupés par les pions.

Les répartitions sont toutes équiprobables.

1. écrire le triangle de Pascal jusqu'à la dixième ligne et en déduire $\binom{9}{3}$.

n/p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					

2. On considère les évènements E, F et G suivants :
E : « La somme S est égale à 3 » ;
F : « La somme S est égale à 9 » ;
G : « La somme S est égale à 6 ».

a. Déterminer les probabilités $p(\text{E})$ et $p(\text{F})$ des évènements E et F.

b. Montrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\dfrac{1}{3}$.

3. Soit A l'évènement : « La somme S est divisible par 3 » et B l'évènement : « Les trois pions sont alignés en colonne, en ligne ou en diagonale ».

a. Déterminer les probabilités $p(\text{A})$ et $p(\text{B})$ des évènements A et B.

b. Calculer la probabilité $p_{\text{A}}(\text{B})$ de l'évènement B sachant que A est réalisé.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

EXERCICE 4 — 6 points

La population d'une ville augmente régulièrement de 10 % par an. En l'an 2000, elle était de 8000 habitants.

1. On désigne par u_n le nombre théorique d'habitants estimé pour l'année $(2000+n)$. On a donc $u_0 = 8000$.

a. Calculer les termes u_1 et u_2.

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire l'expression du terme u_n en fonction de n.

c. Calculer le nombre d'habitants prévu pour l'année 2006.

d. Déterminer en quelle année la population aura doublé.

2. On note v_n l'augmentation par rapport à l'année précédente du nombre d'habitants constatée l'année $(2000+n)$. On a donc, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = u_n - u_{n-1}$.

a. Calculer les termes v_1 et v_2.

b. Exprimer le terme général v_n en fonction de n.

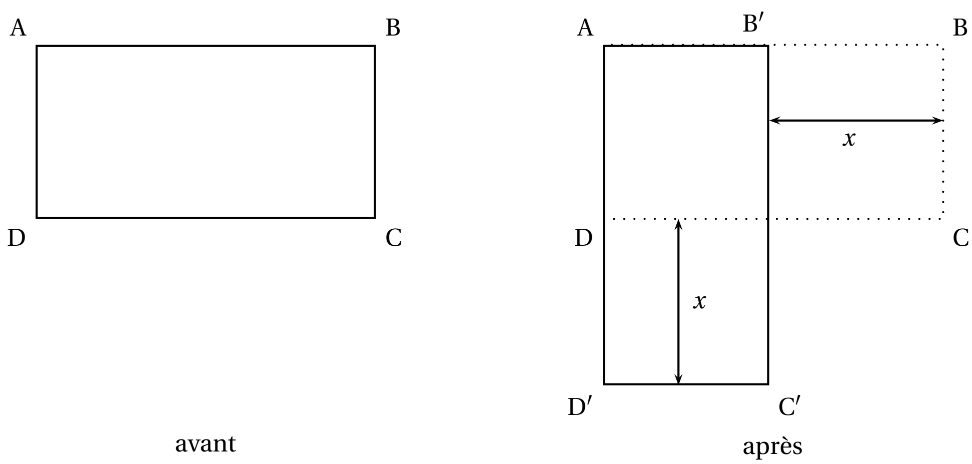
c. Calculer la somme $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ en fonction de n. Vérifier, pour le cas particulier $n = 6$, le résultat obtenu en **1. c.**

Baccalauréat L Centres étrangers juin 2003

Le candidat traitera obligatoirement TROIS exercices
OBLIGATOIREMENT : l'exercice 1 et l'exercice 2
AU CHOIX : l'exercice 3 **ou** l'exercice 4.
L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.
L'attention des candidats est attirée sur le fait que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE **8 points**

Pour réduire la circulation des véhicules dans le centre d'une petite ville, la municipalité envisage de construire une déviation. Les propriétaires des terrains situés dans la zone où passera la déviation sont prévenus de ce projet.
On propose au propriétaire d'un terrain rectangulaire ABCD d'une longueur de 20 mètres et d'une largeur de 10 mètres, de modifier son terrain en retirant x mètres à la longueur et en ajoutant x mètres à la largeur comme l'indiquent les figures ci-dessous.
Il deviendrait alors propriétaire d'un nouveau terrain rectangulaire.



Le but de l'exercice est de connaître pour quelles valeurs de x le propriétaire obtient un nouveau terrain d'aire supérieure à l'aire de l'ancien terrain.

1. **a.** Préciser dans quel intervalle I peut varier x, afin que la modification soit réalisable.
   b. Exprimer, en m^2, l'aire du nouveau terrain en fonction de x. On notera $f(x)$ le résultat.
   c. Vérifier que, pour tout nombre réel x de I, $f(x) = 200 + 10x - x^2$.
2. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 20]$
   b. étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0 ; 20]$ et dresser le tableau de variation de f.
3. **a.** Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	0	2	4	5	6	8
$f(x)$						
x	10	12	14	16	18	20
$f(x)$						

   b. Le plan est rapporté à un repère orthogonal (unités : 0,5 cm pour 1 m en abscisse ; 0,5 cm pour 10 m^2 en ordonnée). On note $(\mathscr{C})$ la représentation

4. à l'aide de la représentation graphique, représenter sur l'axe des abscisses l'intervalle des valeurs de x telles que le nouveau terrain ait une aire plus grande que celle de l'ancien.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **7 points**

Dans une maison nouvellement construite, on veut carreler les sols de certaines pièces.

1. Le sol de la salle à manger est un rectangle de longueur $4,54$ m et de largeur $3,75$ m. On veut carreler cette pièce avec des carreaux carrés de 33 cm de côté.

   On commence la pose par un coin de la pièce comme le suggère la figure 1.

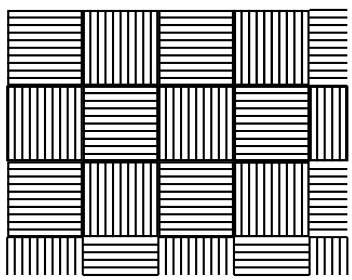


Figure 1

   Calculer le nombre de carreaux non découpés qui auront été posés.

2. Le sol de la cuisine est un rectangle de longueur 4,55 m et de largeur 3,85 m.

   On veut carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe.

   a. Donner la liste des diviseurs de 455 puis la liste des diviseurs de 385.

   b. Donner la liste des diviseurs communs à 455 et 385.

   c. Quel est alors le plus grand côté possible des dalles carrées à utiliser pour carreler cette cuisine ?

3. On dispose de dalles rectangulaires de longueur 24 cm et de largeur 15 cm.

   a. Donner la liste des multiples de 24 inférieurs à 400, puis la liste des multiples de 15 inférieurs à 400.

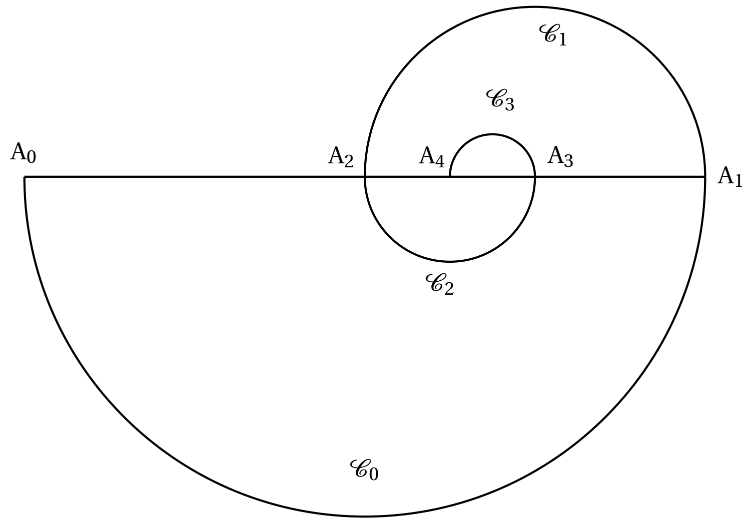
   b. Donner la liste des multiples communs à 24 et 15, inférieurs à 400.

   c. Quelle serait la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe ?

EXERCICE 3 AU CHOIX **6 points**

Un paysagiste doit créer dans un jardin une spirale plantée d'arbustes. Il veut connaître la longueur de cette spirale pour évaluer le nombre d'arbustes à planter.

Voici le schéma qu'il dresse :



Cette spirale est constituée de demi-cercles construits de la manière suivante
- le diamètre $[A_0A_1]$ du demi-cercle $\mathscr{C}_0$ a pour milieu A_2 ;
- le diamètre $[A_1A_2]$ du demi-cercle $\mathscr{C}_1$ a pour milieu A_3 ;

Ainsi de suite on construit les demi-cercles $\mathscr{C}_n$ (n est un entier naturel).
L'unité de longueur est le mètre. On donne $A_0A_1 = 100$.
On note l_n la longueur du demi-cercle $\mathscr{C}_n$.

1. **a.** Calculer $l_0,\ l_1,\ l_2$ et l_3.

   b. Exprimer l_{n+1} en fonction de l_n. Indiquer la nature de la suite (l_n) en précisant sa raison.

   c. Montrer que, pour tout entier n, $l_n = 50\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

2. Le paysagiste décide de ne tracer que les huit demi-cercles $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\cdots$, $\mathscr{C}_7$.
   On appelle $\mathscr{L}$ la longueur de la spirale obtenue avec ces huit demi-cercles.

   a. Calculer $\mathscr{L} = l_0 + l_1 + l_2 + \cdots + l_7$. Donner l'arrondi de $\mathscr{L}$ à 10^{-1}.

   b. Sachant que le paysagiste doit planter un arbuste tous les cinquante centimètres à partir de A_0, en déduire le nombre d'arbustes à planter.

   Formule : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} + \quad (q \neq 1)$.

EXERCICE 4 AU CHOIX **6 points**

Une entreprise de jouets est spécialisée dans la fabrication de poupées qui parlent et qui marchent. Chaque poupée peut présenter deux défauts et deux seulement : un défaut mécanique, un défaut électrique. Une étude statistique montre que :
8 % des poupées présentent le défaut mécanique ;
5 % des poupées présentent le défaut électrique ;
2 % des poupées présentent ces deux défauts.
La production journalière est de 1000 poupées.

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui décrit la production journalière :

	poupées avec défaut mécanique	poupées sans défaut mécanique	total
poupées avec défaut électrique			
poupées sans défaut électrique			
total	80		1 000

Dans la suite de l'exercice, chaque résultat numérique sera donné sous forme décimale.

2. On prélève au hasard une poupée dans la production d'une journée.

a. Soit A l'évènement « la poupée prélevée est sans défaut » . Calculer la probabilité de A.

b. Soit B l'évènement « la poupée prélevée a au moins un défaut ». Montrer que la probabilité de B est 0,11.

c. Soit C l'évènement « la poupée prélevée n'a qu'un seul défaut ». Quelle est la probabilité de C ?

d. Quelle est la probabilité que la poupée prélevée présente le défaut mécanique sachant qu'elle présente le défaut électrique ?

∽ Baccalauréat L Clermont juin 2003 ∾

Le candidat traitera obligatoirement TROIS exercices
OBLIGATOIREMENT : l'exercice 1 **et** l'exercice 2
AU CHOIX : l'exercice 3 **ou** l'exercice 4.
L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.
L'attention des candidats est attirée sur le fait que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE **7 points**

La feuille fournie en annexe sera rendue avec la copie.

à partir d'un demi-cercle de diamètre AB = 16, voir figure donnée en annexe 1, on a effectué (à la règle et au compas) les constructions suivantes :

1re étape : on construit deux demi-cercles de diamètre $\frac{1}{2}\text{AB} = 8$;

2e étape : on construit quatre demi-cercles de diamètre $\frac{1}{4}\text{AB} = 4$.

1. On poursuit les constructions selon le même procédé.
   a. Construire à la règle et au compas, la 3e étape sur la figure donnée en annexe 1 en indiquant les étapes de la construction. Combien de demi-cercles doit-on construire ? Quel est leur diamètre ?
   b. Soit n un entier, $n \geqslant 1$. On admet qu'au cours de l'étape n, il faut tracer 2^n demi-cercles supplémentaires.
   Montrer que leur diamètre est égal à 2^{-n+4}.
2. On désigne par p_n la somme des longueurs des demi-cercles construits à l'étape n. p_0 désigne la longueur du demi-cercle initial, donc $p_0 = 8\pi$.
   Calculer $p_1,\ p_2,\ p_3$, puis p_n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. On désigne par a_n l'aire délimitée par le segment [AB] et les demi-cercles construits à l'étape n. a_0 désigne la longueur du demi-cercle initial, donc $a_0 = 32\pi$.
   a. Calculer $a_1,\ a_2,\ a_3$.
   b. Donner l'expression de a_n en fonction de n.
   Vérifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **7 points**

Partie A : On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,1 ; 6] par

$$x \longmapsto f(x) = 70,228 + 5,104x + 9,222\ln x.$$

1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous en arrondissant le résultat à l'unité la plus proche.

x	0,1	0,3	0,5	1	2	3	4	5	6
$f(x)$									

2. Calculer la dérivée f' de f.
3. Dresser le tableau de variations de f sur [0,1 ; 6].

4. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal : 1 cm représente 0,5 unités sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 10 unités sur l'axe des ordonnées.

Partie B : Une formule empirique permet d'estimer la taille $f(x)$ (en cm) d'un enfant de moins de 6 ans, en fonction de son âge x (en années) par :

$$f(x) = 70,228 + 5,104x + 9,222 \ln x.$$

1. Estimer la taille d'un enfant de deux ans et demi, à 1 cm près.
2. Retrouver le résultat de la question précédente par une construction graphique utilisant la courbe tracée dans la partie **A. 4.**.
3. évaluer l'âge d'un enfant mesurant 1 m par une construction graphique utilisant la courbe tracé dans la partie **A. 4.**.

EXERCICE 3 AU CHOIX **6 points**

Les clients habituels d'une entreprise de vente par internet se voient attribuer un numéro personnel formé de 7 chiffres (a b c d e f g) où chacune des lettres a, b, c, d, e, f, g représente un chiffre de 0 à 9. Les cinq premiers chiffres (a b c d e) sont un numéro d'identification du client, les deux derniers (f g) sont une clé de contrôle, automatiquement calculée à partir de (a b c d e).

1. Combien de clients habituels au maximum la société peut-elle identifier par ce système ?
2. La société emploie, pour calculer la clé de contrôle, la règle suivante : le nombre (f g) est égal au reste de (a b c d e) modulo 87.
   a. Combien y a-t-il de valeurs possibles pour la clé de contrôle ?
   b. Quelle est la clé du client dont le numéro d'identification est (1 2 3 4 5) ?
3. On propose à la société une nouvelle méthode de calcul de la clé de contrôle : le chiffre f est le reste de (a b c d e) modulo 9 le chiffre g est le reste de (a b c d e) modulo 8.
   a. Combien y a-t-il de valeurs possibles pour la clé de contrôle ?
   b. Quelle est la clé du client dont le numéro est (1 2 3 4 5) ?
4. Quel avantage voyez-vous, pour la société, à conserver le premier mode de calcul de la clé de contrôle ?

EXERCICE 4 AU CHOIX **6 points**

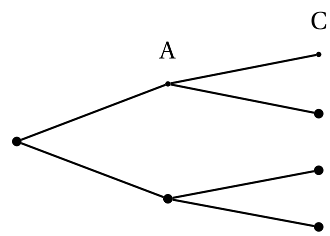
Amélie et Béatrice projettent une sortie soit au cinéma soit en randonnée. Amélie ou Béatrice décide du choix de l'activité. On désigne par A l'évènement « Amélie décide » et par B l'évènement « Béatrice décide », B est donc l'évènement contraire de A.

On suppose que la probabilité pour qu'Amélie décide est $p(\text{A}) = \dfrac{7}{12}$.

Tous les résultats seront donnés sous la forme de fractions irréductibles.

1. Déterminer $p(\text{B})$, probabilité pour que Béatrice décide.
2. Lorsque Amélie décide, 3 fois sur 10 elle choisit le cinéma. Lorsque Béatrice décide, 4 fois sur 10 elle choisit la randonnée. On désigne par C, l'évènement « elles vont au cinéma » et par R, l'évènement « elles font une randonnée ».
   a. Déterminer les probabilités conditionnelles $p_{\text{A}}(\text{C})$ et $p_{\text{B}}(\text{C})$ où $p_{\text{A}}(\text{C})$ est

b. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



3. **a.** Calculer les probabilités $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$ et $p(\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$.

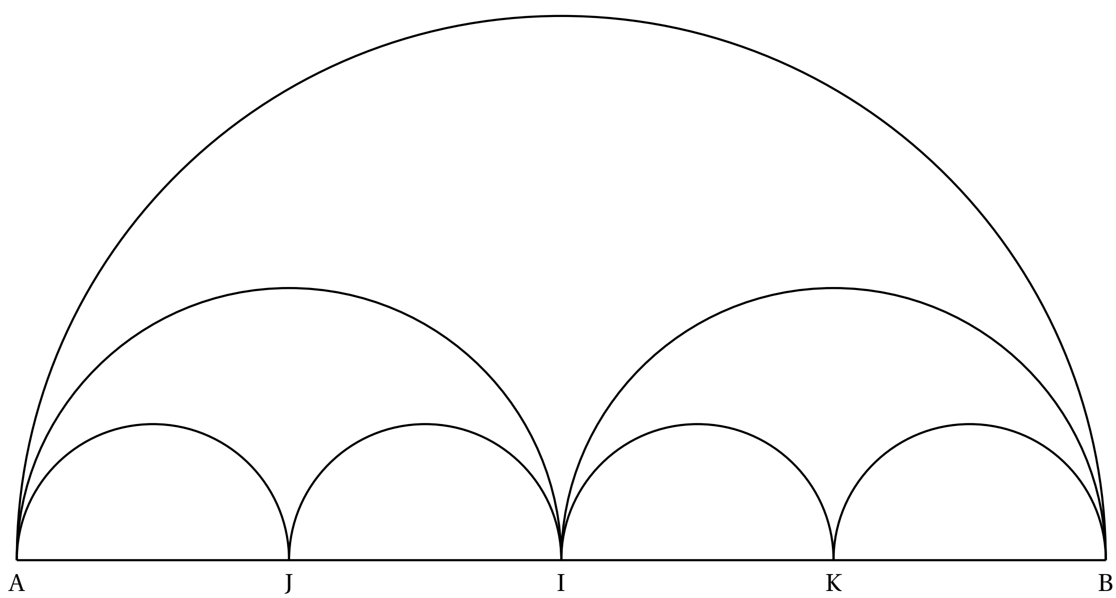
b. Montrer que $p(\mathrm{C}) = \dfrac{17}{40}$.

c. En déduire $p(\mathrm{R})$.

4. Sachant qu'Amélie et Béatrice sont allées en randonnée, quelle est la probabilité pour que ce soit Béatrice qui ait décidé ?

ANNEXE 1

à RENDRE AVEC LA COPIE

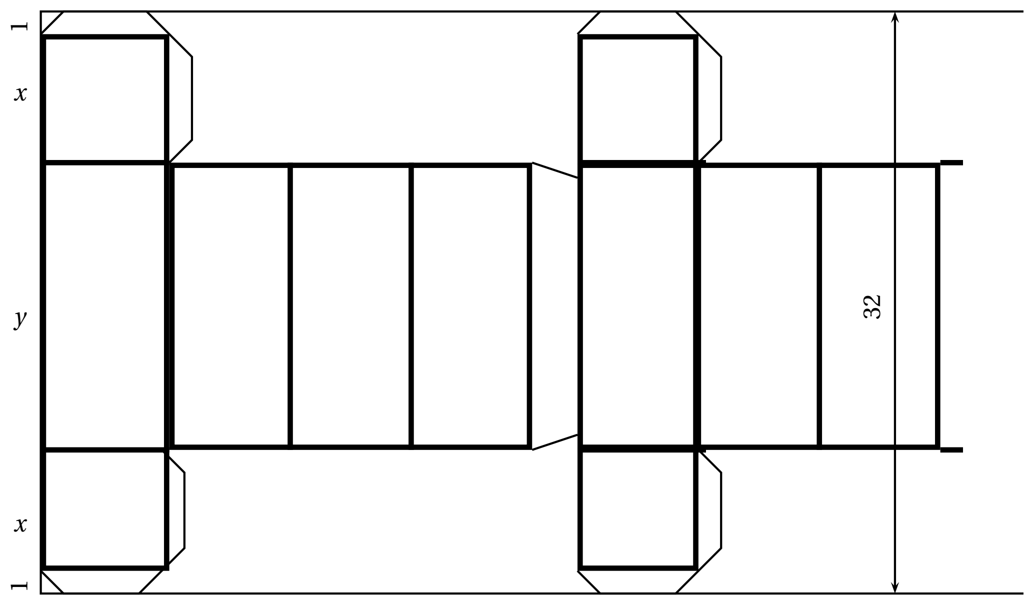


Baccalauréat série L France juin 2003

Durée de l'épreuve : 3 heures
Le candidat doit traiter TROIS exercices : le 1, le 2 et le 3 ou le 4

Exercice 1 obligatoire **7 points**

Un fabricant de boîtes en carton dispose, pour sa fabrication, de rouleaux donnant une bande de carton de 32 cm de large dans laquelle il trace et découpe les patrons des boîtes avant de les coller. Il dispose ses patrons de la manière indiquée dans le dessin ci-dessous :



Les boîtes, en forme de pavés droits, comportent deux faces carrées de x cm de côté, munies de deux languettes de 1 cm de large pour le collage, et quatre autres faces dont les dimensions en cm sont x et y, ainsi qu'un rabat pour la fermeture.

1. Le fabricant utilise toute la largeur de la bande de carton. On a donc $y = 30 - 2x$.

a. Expliquer pourquoi on a nécessairement : $0 < x < 15$.

b. Démontrer que le volume V en cm^3, de la boîte est donné par la formule

$$V = 30x^2 - 2x^3.$$

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 15]$ par : $f(x) = 30x^2 - 2x^3$.

a. Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 15]$.

b. En déduire le tableau des variations de la fonction f sur cet intervalle.

3. **a.** Reproduire et compléter le tableau de valeurs :

x	1	2	4	6	8	10	12	14	15
$f(x)$									

b. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthogonal. On prendra 1 cm comme unité en abscisses et 1 cm pour 100 cm^3 en ordonnées.

4. **a.** Pour quelle valeur de x, le volume V est-il maximum ? Quelle est alors la valeur de ce volume ? Quelle particularité présente la boîte dans ce cas-là ?

b. Le fabricant veut que la boîte obtenue ait un volume de 500 cm^3 et que x soit inférieur à 10.

Déterminer, à l'aide du graphique, la valeur de x qu'il doit choisir.

Vérifier par le calcul puis calculer la valeur de y correspondante.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **6 points**

Le but de l'exercice est l'étude de la désintégration du carbone 14, corps radioactif, et de son utilisation pour la datation des fossiles ou des squelettes.

Partie A

Soit N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$;
Soit N_1 le nombre d'atomes de carbone 14 un siècle après ;
Soit N_k le nombre d'atomes de carbone 14 après k siècles , k entier naturel.
On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps, d'environ 1,24 % par siècle.

1. Justifier que la suite (N_k) est une suite géométrique de raison $0,987\,6$
2. Exprimer N_k en fonction de N_0 et de l'entier k.
3. Quelle est la limite de la suite (N_k) ? Justifier.

Partie B

Les rayons cosmiques produisent continuellement dans l'atmosphère du carbone 14, qui s'y désintègre très lentement, ce qui fait que le taux de carbone 14 dans l'atmosphère de la terre est constant.
Durant leur vie, les tissus animaux et végétaux contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère ; à leur mort, l'assimilation en carbone 14 cesse et celui-ci se désintègre dans les conditions vues dans la **partie A**.

1. Un squelette d'homme préhistorique contient 5 % du carbone 14 initial. Justifier que l'on peut estimer son âge à 24 000 ans.
2. On admet que l'on peut ainsi estimer l'âge des fossiles qui contiennent au moins 1 % du carbone 14 initial. En utilisant des propriétés de la fonction logarithme népérien, déterminer l'âge maximum que l'on peut calculer.

EXERCICE 3 AU CHOIX **7 points**

Toutes les constructions demandées seront effectuées sur la feuille annexe. On laissera apparents les traits de construction
Le segment [AB] a pour longueur l'unité.

1. Construire, à la règle et au compas :

a. le milieu I du segment [AB],

b. la perpendiculaire $\mathscr{D}$ à la droite (AB) passant par B.

2. **a.** Construire un point C de la droite $\mathscr{D}$ tel que BC = BI.

b. Calculer AC.

3. **a.** Construire les points D et M suivants :
   - D est le point d'intersection du segment [AC] avec le cercle de centre C passant par B.
   - M est le point d'intersection du segment [AB] avec le cercle de centre A passant par D.

   b. Calculer AD et vérifier que $\text{AM}^2 = \text{AB} \times \text{MB}$.

   c. Justifier que : $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ce nombre est appelé nombre d'or et noté Φ.

   d. Déduire des questions précédentes que $\dfrac{\text{AB}}{\text{AM}} = \Phi$ puis que $\dfrac{\text{AM}}{\text{AB}} = \Phi$.

4. On rappelle qu'un rectangle d'or est un rectangle dont le rapport $\dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ est égal à Φ.
   En utilisant les questions précédentes, construire, à la règle et au compas, des points E et F tels que ABEF soit un rectangle d'or. Expliquer votre démarche.

EXERCICE 4 AU CHOIX **7 points**

Partie A

1. Déterminer les 20 diviseurs positifs de 240.
2. Dans le tableau ci-dessous, parmi ces 20 entiers rangés dans l'ordre croissant, on a coché les multiples de 10.

diviseurs de 240								10				20		30	40		60	80	120	240
multiples de 10								×				×		×	×		×	×	×	×
multiples de 2																				
multiples de 5																				

Reproduire et compléter le tableau, en cochant les multiples de 2 et de 5.

Partie B

On étudie l'épreuve aléatoire qui consiste à tirer au hasard un nombre parmi les 20 diviseurs de 240.

1. Quelle est la probabilité de tirer le nombre 2 ? le nombre 7 ?
2. On considère les évènements suivants :
   A : « On tire un multiple de 10 »,
   B : « On tire un multiple de 2 »,
   C : « On tire un multiple de 5 ».
   Déterminer les probabilités $p(\text{A})$, $p(\text{B})$ et $p(\text{C})$ des évènements A, B, C.
3. On refait cette épreuve aléatoire quatre fois de suite dans les mêmes conditions.

   a. Quelle est la probabilité de tirer 4 fois de suite un multiple de 10 ?

   b. Quelle est la probabilité de ne jamais tirer un multiple de 10 ?

   c. Quelle est la probabilité de tirer au moins une fois un multiple de 10 ?

   d. Pour tout naturel n compris entre 1 et 4, on note A_n l'évènement :
   « Obtenir un multiple de 10 pour la première fois au n-ième tirage ».

Baccalauréat L Japon juin 2003

Le candidat traitera obligatoirement TROIS exercices
OBLIGATOIREMENT : l'exercice 1 **et** l'exercice 2
AU CHOIX : l'exerccie 3 **ou** l'exercice 4

L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.
L'attention des candidats est attirée sur le fait que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE **8 points**

Partie A : On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[1\,;\,25]$ par :

$$f(x) = 5x - 50 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\text{e}^x}{100}.$$

I.

1. Donner le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,25]$.
2. **a.** Déterminer la dérivée $g'(x)$.

   b. étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;\,25]$.
3. Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal. On prendra pour unité graphique :

   - 2 cm pour 5 unités en abscisse

   - 1 cm pour 20 unités en ordonnée.

   Pour la courbe représentative de la fonction g, on se limitera à représenter les points dont l'abscisse est comprise entre 1 et 10.

II. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[1\,;\,25]$ par

$$h(x) = 30\ln x - 2x + 10.$$

On note h' la dérivée de h.

1. Montrer que $h'(x) = \dfrac{30 - 2x}{x}$.
2. étudier le sens de variations de la fonction h sur l'intervalle $[1\,;\,25]$.
3. Montrer que la fonction h passe par un maximum. On donnera la valeur pour laquelle ce maximum est atteint et la valeur prise alors par la fonction.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction h dans le même repère qu'à la question **I**.

Partie B : Les gains exprimés en milliers d'euros de trois chanteurs sont fonction du nombre x de semaines écoulées depuis la sortie simultanée de leurs albums et sont donnés par $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$.

1. Dans cette question, aucune justification n'est demandée. Il s'agit seulement d'interpréter les données.

   a. Quelle fonction correspond au gain du chanteur A sur lequel les producteurs ont investi près de 100 milliers d'euros et dont le succès est phénoménal après quelques semaines de promotion acharnée ?

   b. Quelle fonction correspond au gain du chanteur B, inconnu, qui obtient un succès très rapide malgré l'absence d'investissement promotionnel avant de s'essouffler au bout de quinze semaines ?

   c. En vous inspirant des questions du **1.** et **2.**, décrire l'évolution du gain du

2. Par lecture graphique :

a. Déterminer le nombre de semaines qui s'écoule avant que le chanteur C gagne plus que le chanteur B.

b. Déterminer le nombre de semaines qui s'écoule avant que le chanteur A gagne plus que le chanteur B.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **7 points**

L'unité est le centimètre.
On considère un triangle $A_0B_0C_0$ rectangle isocèle en A_0 tel que : $A_0B_0 = A_0C_0 = 20$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.

2. Soit A_1 le milieu du segment $[B_0C_0]$, B_1 le milieu du segment $[A_0C_0]$ et C_1 le milieu du segment $[A_0B_0]$.

a. Tracer le triangle $A_1B_1C_1$.

b. Montrer que le triangle $A_1B_1C_1$ est un triangle rectangle isocèle en A_1.

c. Calculer l'aire de $A_1B_1C_1$ notée u_1 et l'aire de $A_0B_0C_0$ notée u_0.

d. Exprimer u_1 en fonction de u_0.

3. Soit A_2 le milieu du segment $[B_1C_1]$, B_2 le milieu du segment $[A_1C_1]$ et C_2 le milieu $[A_1B_1]$.

a. Calculer l'aire du triangle $A_2B_2C_2$ notée u_2.

b. Exprimer u_2 en fonction du u_0.

4. En réitérant cette construction, on définit un triangle $A_nB_nC_n$ rectangle isocèle en A_n. On note u_n, l'aire de ce triangle.

a. Exprimer u_n, en fonction de u_{n-1} et montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \times 200.$$

b. Déterminer le plus petit entier p tel que $u_p < 10^{-3}$.

c. Exprimer en fonction de n la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. En déduire la limite de cette somme quand n tend vers $+\infty$.

Rappel :

Suites arithmétiques de premier terme u_0 et de raison a :	Suites géométriques de premier terme u_0 et de raison b :
$u_{n+1} = u_n + a$;	$u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0b^n$
$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	Si $1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$
	Si $b = 1$ $1 + b + b^2 + \cdots + b^n = n + 1$

EXERCICE 3 AU CHOIX **5 points**

Dans cet exercice on étudie la divisibilité par 11 en exploitant la congruence modulo 11 des puissances de 10.

1. **a.** Vérifier que $100 \equiv 1 \pmod{11}$. En déduire que $10^4 \equiv 1 \pmod{11}$.

b. Vérifier que $10 \equiv -1 \pmod{11}$.

2. a. En utilisant l'égalité $3729 = 37 \times 100 + 29$ et les résultats précédents, montrer que 3 729 est divisible par 11.

   b. En utilisant la méthode précédente, étudier la divisibilité de 9240 par 11.

3. a. En utilisant l'égalité $3\,729 = 3 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 2 \times 10 + 9$ et les résultats précédents, montrer que 3 729 est divisible par 11.

   b. En utilisant cette méthode, étudier la divisibilité de 9 240 par 11.

4. étudier la divisibilité de 197 277 par 11.

EXERCICE 4 AU CHOIX **5 points**

Les constructions demandées sont à faire sur la FEUILLE ANNEXE à RENDRE AVEC LA COPIE.

1. Compléter sur la figure 1 de la feuille annexe, la représentation en perspective cavalière de rapport $\frac{1}{2}$ d'angle de fuite 30° d'un cube ABCDEFGH dont on a donné le plan frontal ABFE.
2. Compléter sur la figure 2 de la feuille annexe, la représentation en perspective à point de fuite d'un cube ABCDEFGH dont on a donné le plan frontal ABFE, le point C et le point de fuite O.
3. Citer une propriété de la représentation en perspective cavalière qui ne soit pas vérifiée en perspective à point de fuite.
4. Compléter sur la figure 3 de la feuille annexe, la représentation en perspective à point de fuite d'un carrelage régulier de quatre rangées de six carreaux.

ANNEXE à RENDRE AVEC LA COPIE (si l'exercice 4 est choisi)

Figure 1

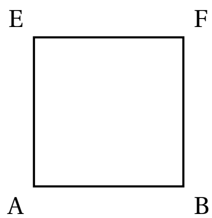


Figure 2

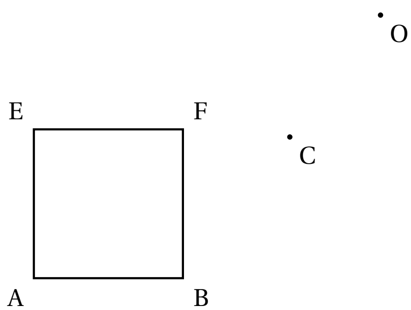


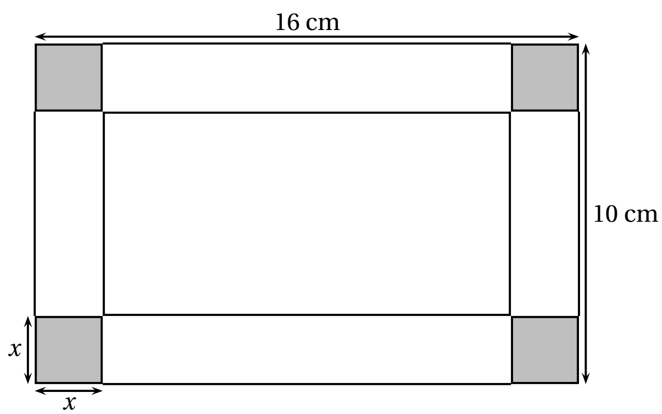
Figure 3

Baccalauréat L facultatif La Réunion juin 2003

Le candidat traitera obligatoirement TROIS exercices
OBLIGATOIREMENT : l'exercice 1 **et** l'exercice 2
AU CHOIX : l'exercice 3 **ou** l'exercice 4.
L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.
L'attention des candidats est attirée sur le fait que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 : OBLIGATOIRE **7 points**

On veut réaliser, dans le patron ci-dessous une boîte rectangulaire sans couvercle. Les longueurs sont exprimées en cm.



1. Quelles sont les valeurs possibles de x ?
2. Vérifier que le volume $V(x)$ de cette boîte est égal à $4x^3 - 52x^2 + 160x$.
3. Vérifier que $V'(x) = 4(x-2)(3x-20)$; étudier son signe sur l'intervalle $[0 ; 5]$.
4. Construire le tableau de variations de la fonction V sur l'intervalle $[0 ; 5]$.
5. En déduire la valeur de x pour laquelle le volume est maximal. Quel est alors ce volume ?

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **7 points**

On considère une grille constituée de 6 lignes numérotées de haut en bas de L_1 à L_6 et de 4 colonnes numérotées de gauche à droite de C_1 à C_4.

	C_1	C_2	C_3	C_4
L_1				
L_2				
L_3				
L_4				
L_5				
L_6				

L'expérience consiste à noircir au hasard six cases dans cette grille.

1. Dénombrer toutes les configurations possibles.
2. On note A l'évènement : « les six cases noires sont dans une même colonne » et B l'évènement « il y a une case noire dans chacune des six lignes ».

   Calculer la probabilité de A sous forme d'une fraction irréductible, puis celle de B à 10^{-4} près.

3. Soient les évènements L et C :
L : « il y a exactement deux cases noires dans la ligne L_1 »
C : « il y a exactement cinq cases noires dans la colonne C_1 ».

   a. Représenter une configuration prouvant que L et C ne sont pas incompatibles.
   b. Calculer sous forme de fraction irréductible la probabilité de l'évènement noté $L \cap C$.
   c. En déduire que la probabilité d'obtenir exactement deux cases noires dans la première ligne, sachant qu'il yen a exactement cinq dans la première colonne, est égale à $\dfrac{5}{36}$.
   (on rappelle que $p_C(L) = \dfrac{p(L\cap C)}{p(C)}$.

EXERCICE 3 AU CHOIX **6 points**

Pierre opère un placement dans sa banque en versant sur un compte 200 euros, chaque premier janvier à partir du 01/01/2003. La banque rémunère ce compte au taux annuel de 4 %. On note u_0 le montant initial du compte, donc $u_0 = 200$ et u_n le montant au 1er janvier de l'année $(2003+n)$, n étant un entier naturel.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 . On arrondira au centime d'euro.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. On définit une nouvelle suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n + 5000$.
   a. Calculer les trois premiers termes de la suite (v_n).
   b. Prouver que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
   c. Exprimer alors v_n en fonction de n, puis en déduire que $u_n = 5200 \times (1,04)^n - 5000$.
4. Combien d'années Pierre devra-t-il attendre, pour disposer d'au moins 3000 euros sur ce compte ?
   Pour cette question, on pourra faire appel à la fonction logarithme népérien notée ln.

EXERCICE 4 AU CHOIX **6 points**

Voir annexe (à rendre avec la copie si l'exercice 4 est choisi).
SABCD est une pyramide de sommet S à base carrée ABCD. La droite (SA) est perpendiculaire au plan de base (ABCD). Sur la figure 1 ci-jointe, seule l'arête (SA) est représentée en vraie grandeur : SA = 9 cm, AB = 6cm.

1. Compléter la figure 1 en perspective cavalière, en représentant toutes les arêtes et le point D en arrière plan.
2. On considère le point M du segment [BD] tel que $BM = 4\sqrt{2}$. Soit N le point de l'arête [SA] tel que $SN = BM$.
   a. évaluer le quotient $\dfrac{BM}{BD}$.
   b. Sur la figure 2 représenter en vraie grandeur le carré ABCD, puis construire le point M à la règle non graduée et au compas (on pourra utiliser **a.**)
   c. Sur la figure 1, construire le point N défini ci-dessus.

Formule qui pourra être utile : La diagonale d d'un carré de coté a et telle que d =

ANNEXE à rendre si l'exercice 4 est choisi

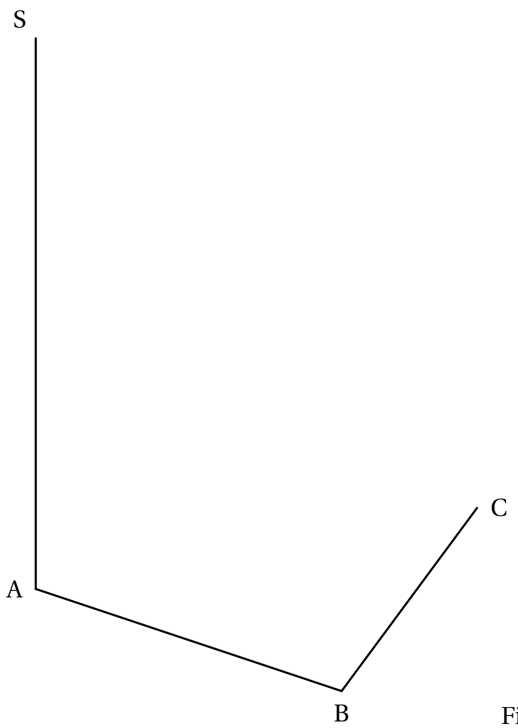


Figure 1

Figure 2

Baccalauréat L facultatif Liban juin 2003

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé (circulaire n° 99-186 du 16-11-1999)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les graphiques demandés seront réalisés sur une feuille de papier millimétré mise à votre disposition.

ANNEXE 1 : à rendre avec la copie si l'exercice 4 est choisi.

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE — 8 points

1. On considère la fonction g définie sur $[-2 ; 2]$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}.$$

   a. Calculer des valeurs approchées à 10^{-2} près de $g(-2)$ et de $g(2)$.

   b. Calculer $g(0)$.

   c. Trouver la fonction dérivée de g et montrer que $g'(x) > 0$ pour tout x dans $[-2 ; 2]$.

   d. En déduire le tableau de variations de la fonction g.

   e. Pour quelles valeurs de x a-t-on $g(x) = 0$?

2. On considère la fonction f définie sur $[-2 ; 2]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}$.
   On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ (unité : 3 cm).

   a. Montrer que $f'(x) = g(x)$.

   b. En déduire le tableau de variations de f.

   c. Tracer la courbe représentative de f.

3. La courbe précédente s'appelle une chaînette parce qu'elle correspond à la forme obtenue lorsque on laisse pendre une chaîne maintenue aux deux extrémités. Galilée pensait que cette courbe devait être une parabole. Nous allons voir que ce n'est pas le cas.
   Soit h la fonction définie sur $[-2 ; 2]$ par $h(x) = ax^2 + b$.

   a. Montrer que l'on a $h(0) = f(0)$ et $h(2) = f(2)$, si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} b &=& 2\\ 4a+b &=& \mathrm{e}^{2}+\mathrm{e}^{-2}\end{array}\right.$$

   b. Donner une valeur approchée de a à 10^{-2} près.

   c. En déduire une valeur approchée de $f(1) - h(1)$ à 10^{-2} près. Conclure.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE — 6 points

Un industriel qui produit des ampoules électriques a effectué une étude statistique pour connaître la durée de vie de ces ampoules. Les résultats sont résumés dans le

Durée de vie en heures	[0 ; 7000[	[7000 ; 8000[	[8000 ; 9000[	[9000 ; 10000[	Plus de 10000
Pourcentage	10	20	40	20	10

1. On choisit une ampoule au hasard parmi la production de l'industriel et on note :

A l'évènement « la durée de vie de l'ampoule est supérieure à 8 000 heures ».

B l'évènement « la durée de vie de l'ampoule est supérieure à 10 000 heures ».

- **a.** Donner les probabilités $p(\text{A})$ et $p(\text{B})$.
- **b.** Justifier que $p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\text{B})$.
- **c.** En déduire la probabilité conditionnelle $p_{\text{A}}(\text{B})$.

2. On choisit maintenant deux ampoules au hasard parmi la production de l'industriel et on note :

C l'évènement « la durée de vie de la première ampoule est supérieure à 10000 heures ».

D l'évènement « la durée de vie de la deuxième ampoule est supérieure à 10000 heures ».

- **a.** Les évènements C et D sont indépendants. En déduire $p(\text{C} \cap \text{D})$.
- **b.** Calculer $p(\text{C} \cup \text{D})$.
- **c.** On place ces deux ampoules sur un plafonnier dans un bureau. Quelle est la probabilité que l'on puisse éclairer ce bureau plus de 10000 heures sans changer d'ampoule ?

Rappel :

$$p(\text{A} \cup \text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A} \cap \text{B}) \qquad p_{\text{A}}(\text{B}) = \frac{p(\text{A} \cap \text{B})}{p(\text{A})}.$$

EXERCICE 3 (AU CHOIX) 6 points

On note $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$ l'écriture d'un nombre en base dix dont les chiffres sont a, b, c et d.

1. **a.** Déterminer le reste de la division euclidienne de 100 par 11, puis de 1000 par 11.

- **b.** Montrer que si un nombre entier n vérifie $n \equiv 10 \pmod{11}$ alors on peut aussi écrire
$$n \equiv -1 \pmod{11}.$$
- **c.** En déduire que si $\overline{abcd}$ est divisible par 11 alors $-a + b - c + d$ est aussi divisible par 11.

2. **a.** Les nombres du type $\overline{abba}$ sont-ils divisibles par 11 ?

- **b.** Pour quelle valeur de a, le nombre $\overline{11a}$ est-il divisible par 11 ?
- **c.** Pour quelle valeur de a, le nombre $\overline{99a}$ est- il divisible par 11 ?

3. à quelles conditions les nombres du type $\overline{aab}$ sont-ils divisibles par 11 ?

EXERCICE 4 (AU CHOIX) 6 points

1. Soit ABC un triangle quelconque et I, J et K les milieux des côtés [BC], [AC] et [AB].

- **a.** Faire une figure.
- **b.** Démontrer que AJIK est un parallélogramme. Donner deux autres paral-

c. Sur la figure 1 de l'annexe 1, construire à la règle et au compas le triangle dont les points I, J et K sont les milieux des côtés.

2. Soit ABC un triangle quelconque et P, Q et R les pieds des hauteurs passant par A, B et C.

a. Faire une figure.

On admet que les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices du triangle PQR.

b. Expliquer comment on peut construire à la règle et au compas un triangle ABC dont on connaît les pieds des hauteurs P, Q et R.

c. Effectuer la construction sur la figure 2 de l'annexe 1 (à rendre avec la copie).

ANNEXE 1 : à rendre avec la copie si l'exercice 4 est choisi

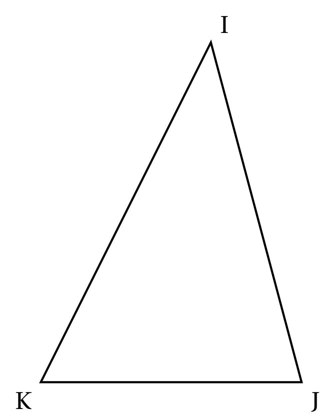


Figure 1

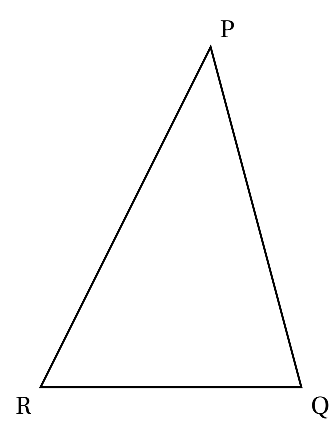


Figure 2