Baccalauréat L spécialité 2005

L'intégrale de septembre 2004 à juin 2005

Baccalauréat L Nouvelle-Calédonie novembre 2004

Épreuve facultative novembre 2004

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 HEURES

Le candidat doit traiter les deux premiers exercices et soit l'exercice 3, soit l'exercie 4

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE **7 points**

Rappels :

- La fonction exponentielle se note indifféremment $(x \longmapsto \exp(x))$ ou $(x \longmapsto \mathrm{e}^x)$.
- Si a et b sont des constantes réelles la fonction dérivée de $\left(x \longmapsto \mathrm{e}^{ax+b}\right)$ est : $\left(x \longmapsto a\mathrm{e}^{ax+b}\right)$.

Partie A

Soit la fonction f définie sur l'intervalle I = [1900 ; 2100] par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{0,004x-5}.$$

La fonction f est dérivable sur l'intervalle I et on note f' sa fonction dérivée.

1. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous. Les valeurs de $f(x)$ seront arrondies au dixième.

x	1900	1950	2000	2050	2100
$f(x)$					

2. Calculer, pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, le nombre $f'(x)$.
   En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle I.
3. Tracer la courbe représentative de f sur le graphique donné en annexe 1.

Partie B

On considère que, pour tout entier naturel n appartenant à l'intervalle I, le nombre $f(n)$ donne la population d'une ville V, exprimée en centaines de milliers d'habitants, au 1er janvier de l'année n.

1. **a.** Déterminer graphiquement la population de la ville V au 1er janvier 1990.
   (On fera apparaître les constructions nécessaires sur le graphique de l'annexe 1 et on donnera une réponse arrondie à la centaine de milliers d'habitants).

   b. Déterminer par le calcul la population de la ville V au 1er janvier 1990.
   (On arrondira le résultat à la dizaine de milliers d'habitants.)

2. On cherche à déterminer à partir du 1er janvier de quelle année la population de la ville V dépassera les 2 600 000 habitants,

   a. Déterminer graphiquement un encadrement de cette année.
   (On fera apparaître les constructions nécessaires sur le graphique de l'annexe 1.)

   b. Déterminer cette année par le calcul.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **7 points**

Le but de cet exercice est de construire un carré d'aire égale à l'aire d'un rectangle donné.

Partie A : Étude d'un exemple

La figure 1 de l'annexe 2 représente dans un repère orthonormal d'origine O, les points A, B et C de coordonnées respectives (0 ; 3), (−5 ; 3) et (−5 ; 0) et le rectangle OABC.
L'unité graphique est le centimètre.
Le cercle de centre O passant par A, coupe l'axe des abscisses en deux points.
On note E celui de ces points dont l'abscisse est positive et M le milieu du segment [CE].
Le cercle de diamètre [CE] coupe l'axe des ordonnées en deux points.
On note F celui de ces points dont l'ordonnée est négative.

1. Construire E, M et F sur la figure 1. Donner les coordonnées de M.
2. Calculer la valeur exacte de la distance OF.
3. Calculer l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en cm^2, du rectangle OABC et vérifier que : $\mathscr{A} = \text{OF}^2$.
4. Construire sur la figure 1 un carré d'aire égale à celle du rectangle OABC.

Partie B : Cas général

La figure 2 de l'annexe 2 représente un rectangle quelconque OABC de largeur OA et de longueur AB.On note a = OA et b = AB. On a donc : $b \geqslant a$. L'unité graphique est le centimètre.

On ne cherchera pas à mesurer a et b qui peuvent prendre toutes valeurs positives vérifiant $b \geqslant a$.

1. Construire sur la figure 2, en utilisant uniquement le compas et la règle non graduée, les points suivants (on laissera apparents les traits de construction) :
   a. le point E de la droite (CO) qui vérifie 0E = a et n'appartient pas au segment [CO].
   b. le point M milieu du segment [CE].
   c. le point F, point d'intersection du cercle de diamètre [CE] et de la droite (AO) qui vérifie : O est entre A et E.
2. Montrer que CE = $a + b$. En déduire ME puis montrer que MO = $\dfrac{b-a}{2}$.
3. Préciser la valeur de la distance MF puis montrer que : OF = $\sqrt{ab}$.
4. Construire sur la figure 2 un carré de côté [OF].
   Vérifier que ce carré et le rectangle OABC ont la même aire.

Votre choix : Exercice 3 ou exercice 4. Indiquer clairement votre choix sur la copie.

EXERCICE 3 **6 points**

Tous les ouvrages publiés sont identifiés par un numéro ISBN (International Standard Book Number) qui indique la langue de publication, l'éditeur et la référence de l'ouvrage chez cet éditeur. Un numéro ISBN est constitué de neuf chiffres (c'est-à-dire neuf entiers compris entre 0 et 9) suivis d'un espace et d'une clé. Cette clé est un chiffre ou la lettre X (le 10 en numération romaine).
Pour déterminer la clé d'un numéro ISBN dont les neuf premiers chiffres sont $abcdefghi$, on calcule le nombre $N = a+2b+3c+4d+5e+6f+7g+8h+9i$, puis on détermine le nombre r compris entre 0 et 10 qui est congru à N modulo 11. Si le nombre r est strictement inférieur à 10, la clé est égale à r ; si le nombre r est égal à 10, la clé est X.

1. Vérifier que la clé du numéro ISBN 190190340 0 est correcte.
2. Calculer la clé du numéro ISBN dont les 9 premiers chiffres sont : 103241052.
3. Le quatrième chiffre du numéro ISBN d'un ouvrage est illisible. On le note d. La clé de ce numéro est 4 et le numéro se présente ainsi : $329d12560\ 4$.

   a. Montrer que : $4d \equiv 2 \quad (\text{modulo } 11)$.
   b. En déduire le chiffre d.

4. Le premier chiffre et le neuvième chiffre du numéro ISBN d'un autre ouvrage sont illisibles. On les note a et i. La clé de ce numéro est 9 et le numéro se présente ainsi : $a32100501i$.

   a. Montrer que $a \equiv 2 - 9i \quad (\text{modulo } 11)$.
   b. Donner deux valeurs possibles du couple $(a\,;\,i)$.

Votre choix : Exercice 3 ou exercice 4. Indiquer clairement votre choix sur la copie.

Exercice 4 — 6 points

Rappels

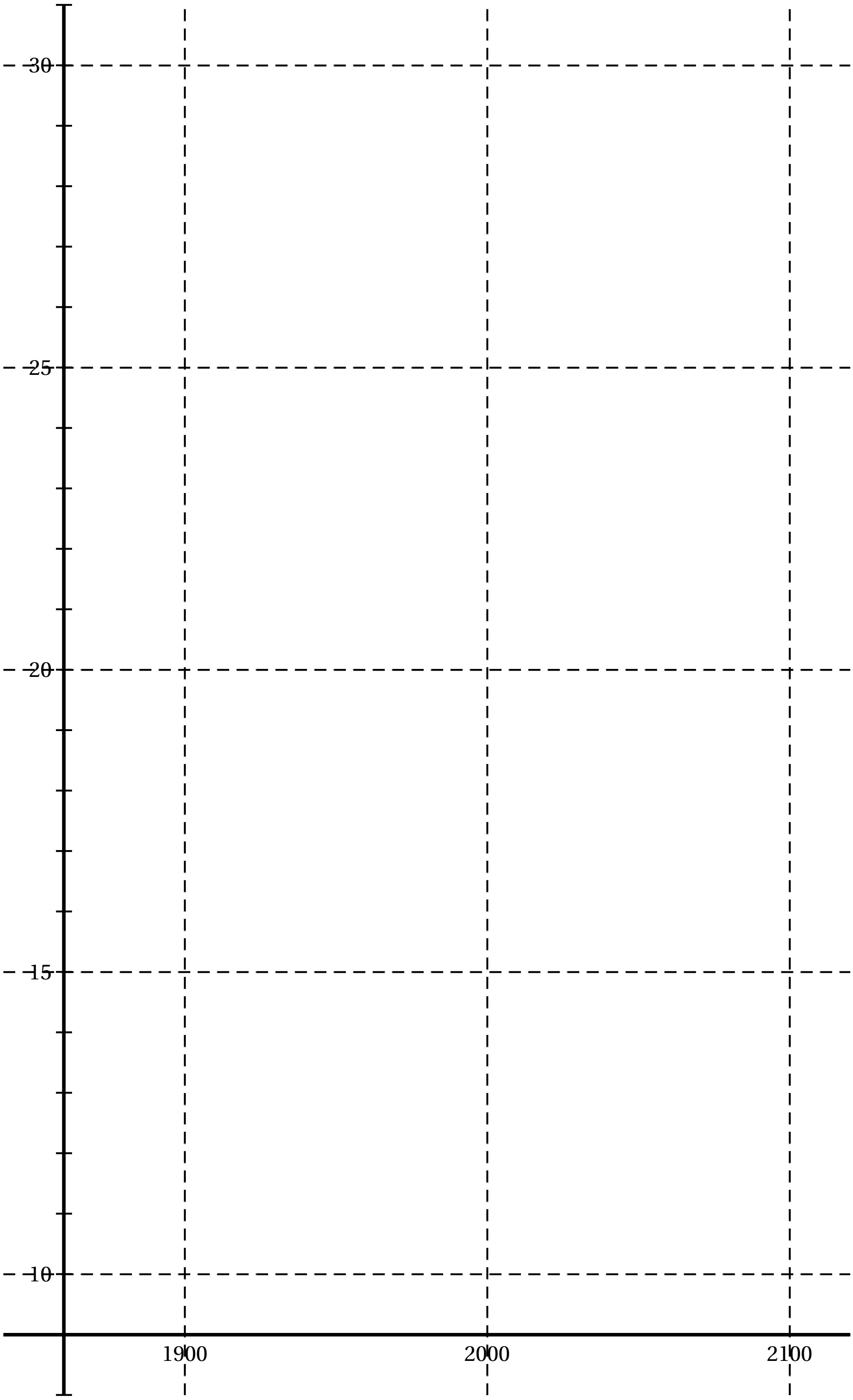
On note $\overline{A}$ l'évènement contraire d'un évènement A, $p(A)$ la probabilité d'un évènement A,
« A et B » ou « $A \cap B$ » l'intersection de deux évènements A et B,
« A ou B » ou « $A \cup B$ » la réunion de deux évènements A et B.
On note $p_B(A)$ la probabilité qu'un évènement A se réalise, sachant qu'un évènement B (de probabilité non nulle) est déjà réalisé. On a : $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(A \text{ et } B)}{p(B)}$.

Dans un pays européen, 12 % des moutons sont atteints par une maladie.
Un test de dépistage de cette maladie vient d'être mis sur le marché mais il n'est pas totalement fiable.
Une étude a montré que quand le mouton est malade le test est positif dans 93% des cas ; quand le mouton est sain, le test est négatif dans 97 % des cas.
On choisit un le mouton au hasard et on le soumet au test de dépistage de la maladie.
On note M l'évènement « le mouton est malade ».
On note Po l'évènement « le test est positif ».

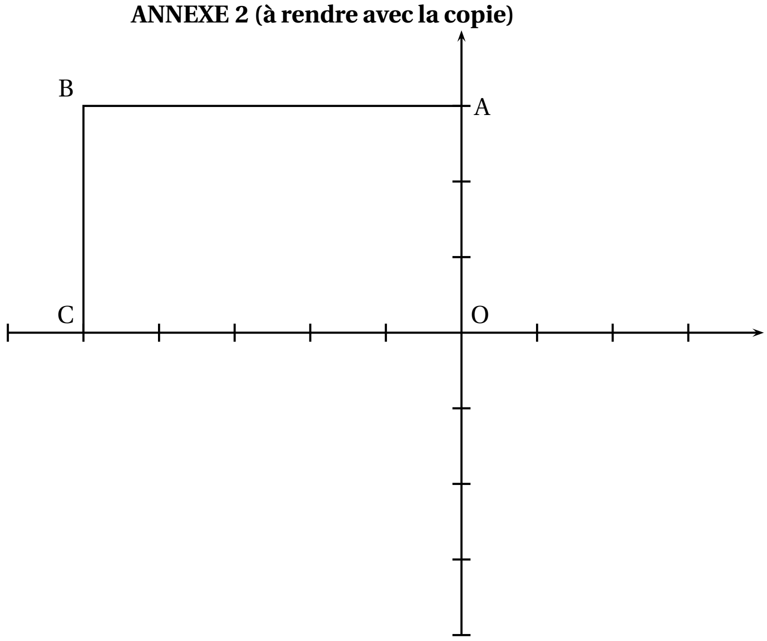
1. Compléter l'arbre de probabilité donné en annexe 3.
2. Calculer les probabilités des évènements A, B, C suivants :
   A : « Le mouton est malade et le test est positif ».
   B : « Le mouton est sain et le test est positif ».
   C : « Le mouton est malade et le test est négatif ».
3. En déduire que la probabilité de l'évènement Po est égale 0,138.
   Quelle est la probabilité que le test soit négatif ?
4. Dans cette question les résultats seront arrondis au millième.

   a. Sachant qu'un mouton a un test positif, quelle est la probabilité qu'il ne soit pas malade ?
   b. Sachant qu'un mouton a un test négatif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)
Exercice 1, questions A. 3., B. 1. a. et B.2. a.

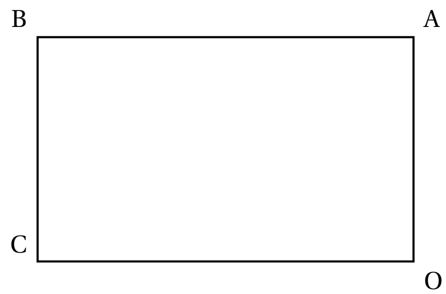


ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)

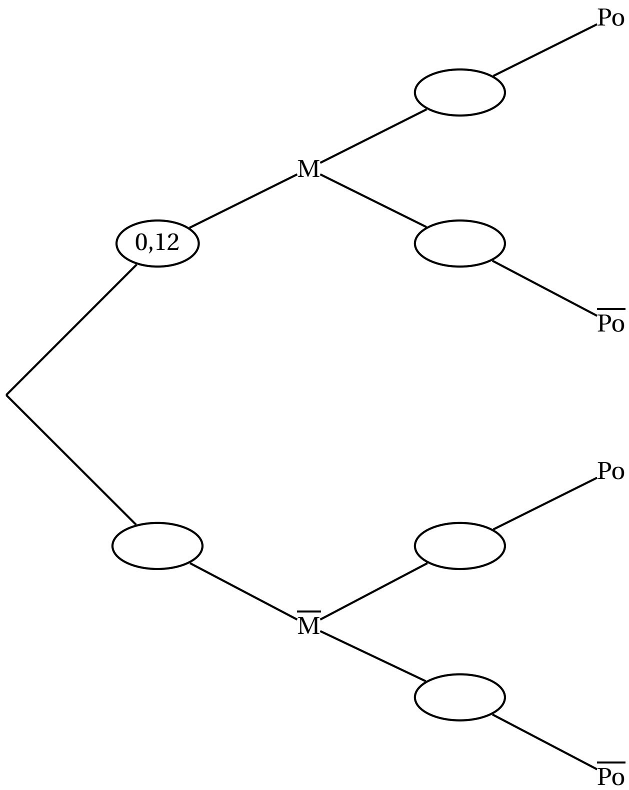


Exercice 2

Figure 2



ANNEXE 3 (à rendre avec la copie si vous avez choisi l'exercice 4)
Exercice 4, question 1.



∾ Baccalauréat L Amérique du Sud novembre 2004 ∾

Épreuve facultative

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 HEURES

Le candidat doit traiter les deux premiers exercices et soit l'exercice 3, soit l'exercie 4

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE **6 points**

Rappels

– On note Φ le nombre d'or dont la valeur exacte est $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$;
– Φ est l'unique nombre positif qui vérifie : $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$.
– On dit que deux triangles PQR et STU sont « semblables » ou « de même forme » si les angles en P, Q, R dans le triangle PQR sont respectivement égaux aux angles en S, T, U dans le triangle STU, ce qui revient a dire que : $\dfrac{\text{PQ}}{\text{ST}} = \dfrac{\text{PR}}{\text{SU}} = \dfrac{\text{QR}}{\text{TU}}$.

On donne un triangle ABC tel que : BC = 1 , $\widehat{\text{ABC}} = 72^{\text{o}}$ et $\widehat{\text{BCA}} = 72^{\text{o}}$. (Voir l'annexe 1.)

On pose AB = AC = x. Le but des questions suivantes est de montrer que $x = \Phi$.

1. **a.** Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{CAB}}$.
   b. Construire à la règle et au compas la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$. On explicitera la méthode utilisée.
   Cette bissectrice coupe [AC] en M.
2. **a.** Calculer les mesures en degrés des angles $\widehat{\text{CBM}}$ et $\widehat{\text{CMB}}$.
   En déduire que le triangle BCM est isocèle et que BM = 1.
   b. Justifier que les triangles ABC et BCM sont semblables.
   c. En déduire trois rapports de distances égaux.
3. **a.** Montrer que le triangle BAM est isocèle.
   b. En déduire que : CM = $x - 1$.
4. D'après les résultats de la question **2. c.** : $\dfrac{\text{AB}}{\text{BC}} = \dfrac{\text{BC}}{\text{CM}}$.
   En déduire que x vérifie $x^2 - x - 1 = 0$ puis que $x = \Phi$.

On appelle triangle d'or tout triangle dont les angles mesurent 36^{o}, 72^{o} et 72^{o}, c'est-à-dire tout triangle semblable au triangle ABC étudié dans cet exercice, c'est-à-dire tout triangle dont les longueurs des côtés sont proportionnelles à 1, Φ et Φ.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **7 points**

Rappels

- a étant une constante réelle, la fonction $x \longmapsto \ln(ax)$ a pour fonction dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.
- x et y étant deux reels strictement positifs : $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ et $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$.
- x étant un réel strictement positif : $\exp(\ln x) = x$.

Le son se manifeste par des variations de pression de l'air. L'unité de mesure de la pression de l'air est le Pascal.

La pression de l'air s'exerce sur le tympan de l'oreille humaine. Pour une pression supérieure ou égale à 20×10^{-6} Pascals s'exerçant sur son tympan, l'oreille humaine perçoit un son dont le niveau se mesure en décibels.
On note $p_0 = 20 \times 10^{-6}$.
Pour une pression de p Pascals s'exerçant sur le tympan, avec $p \geqslant p_0$, le niveau sonore perçu est de $f(p)$ décibels où :

$$f(p) = \frac{20}{\ln(10)}\ln\left(\frac{p}{p_0}\right), \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(p) = \frac{20}{\ln(10)}\ln(50\,000p).$$

1. Quel est le niveau sonore perçu pour une pression de 2 Pascals ? de 0,2 Pascals ? de 0,02 Pascals ?

2. On note $k = \dfrac{20}{\ln 10}$ et $\mathrm{I} = [p_0\ ;\ +\infty[$.
Donc f est la fonction définie sur l'intervalle I par : $f(x) = k\ \ln(50\,000x)$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.

- **a.** Préciser la valeur de $f\left(p_0\right)$.
- **b.** Pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle I.
- **c.** Interpréter les résultats du **a.** et du **b.** en termes de pression s'exerçant sur le tympan et de niveau sonore perçu.

3. À partir d'un niveau sonore de 120 décibels, on ressent une douleur.
Déterminer la pression p correspondant à ce niveau sonore.

4. **a.** Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle I :

$$f(10x) = k\ln(10) + f(x).$$

On en déduit que : $f(10x) = 20 + f(x)$ *et on dit que :* « *le niveau sonore augmente de 20 décibels quand la pression s'exerçant sur le tympan est multipliée par* 10 ».

b. Exprimer, pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, $f(100x)$ en fonction de $f(x)$ et énoncer la propriété du niveau sonore correspondante.

Votre choix : Exercice 3 ou exercice 4. Indiquer clairement votre choix sur la copie.

EXERCICE 3 **7 points**

Rappels

On note $p(\mathrm{A})$ la probabilité d'un évènement A, « A et B » ou « A $\cap$ B » l'intersection de deux évènements A et B.

On note $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ la probabilité qu'un évènement A se réalise, sachant qu'un évènement B (de probabilité non nulle) est déjà réalisé. On a : $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \dfrac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{B})} = \dfrac{p(\mathrm{A\ et\ B})}{p(\mathrm{B})}$.

On dispose de deux urnes numérotées 1 et 2.
L'urne 1 contient une boule blanche et une boule noire.
L'urne 2 contient deux boules noires et une boule blanche.
On réalise l'expérience aléatoire suivante : on tire au hasard une boule dans l'urne 1 et on la met dans l'urne 2, puis on tire au hasard une boule dans l'urne 2.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
On note :

N_1 l'évènement : « La boule tirée de l'urne 1 est noire » ;

B_1 l'évènement : « La boule tirée de l'urne I est blanche » ;
N_2 l'évènement : « La boule tirée de l'urne 2 est noire » ;
B_2 l'évènement : « La boule tirée de l'urne 2 est blanche ».

1. Donner les valeurs de $p(B_1)$ et $p(N_1)$.

2. Montrer que $p_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2}$.
De la même façon donner les valeurs de $p_{B_1}(N_2)$, $p_{N_1}(B_2)$ et $p_{N_1}(N_2)$.

3. Compléter l'arbre de probabilités donné en **annexe 2**.

4. Calculer $p(B_1 \text{ et } B_2)$.

5. Montrer que $p(B_2) = \frac{3}{8}$ puis calculer $p(N_2)$.

6. Sachant qu'on vient de tirer une boule blanche dans l'urne 2, quelle est la probabilité qu'on ait tiré auparavant une boule blanche dans l'urne 1 ?

Votre choix : Exercice 3 ou exercice 4. Indiquer clairement votre choix sur la copie.

EXERCICE 4 — 7 points

Une année bissextile compte 366 *jours et une année non bissextile* 365 *jours. Une année est bissextile si son « numéro » est divisible par 4 sauf s'il s'agit d'un siècle. Les siècles, années dont le « numéro » se termine par deux zéros, ne sont, en général, pas bissextiles sauf si leur « numéro » est divisible par* 400.
Quelque exemples : 1996 *était bissextile,* 1997 *ne l'était pas,* 1900 *non plus mais* 2400 *le sera.*

1. Trouver les deux entiers naturels a et b inférieurs ou égaux à 6 tels que : $365 \equiv a \pmod 7$ et $366 \equiv b \pmod 7$.

2. **a.** En supposant que le premier janvier d'une année non bissextile soit un lundi, expliquer pourquoi le premier janvier de l'année suivante sera un mardi.

b. Si le premier janvier d'une année bissextile est un lundi, quel jour de la semaine sera le premier janvier de l'année suivante ?

3. Une période de quatre années consécutives compte $N = 3 \times 365 + 1 \times 366$ jours.
Sans calculer N, justifier que $N \equiv 5 \pmod 7$.

4. En supposant que le premier janvier d'une année soit un lundi, quel jour de la semaine sera le premier janvier quatre ans plus tard ? Expliquer la réponse.
Plus généralement, pour une date donnée, (par exemple le 1^{er} janvier), *chaque période de* 4 *années produit un décalage de cinq jours dans le cycle des jours de la semaine.*

5. Compléter le tableau donné en **annexe 3**. Aucune justification n'est demandée.

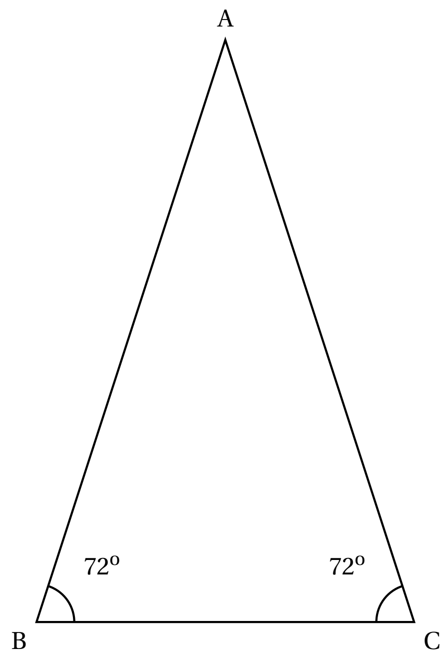
6. **a.** Expliquer pourquoi l'année 2004 est bissextile.

b. Sachant que le 29 février 2004 était un dimanche, quel jour de la semaine sera le 29 février 2008 ?
Quel jour de la semaine sera le 29 février 2012 ? Expliquer les réponses.

c. Quelle sera la prochaine année où le 29 février sera un dimanche ? Expliquer la réponse.

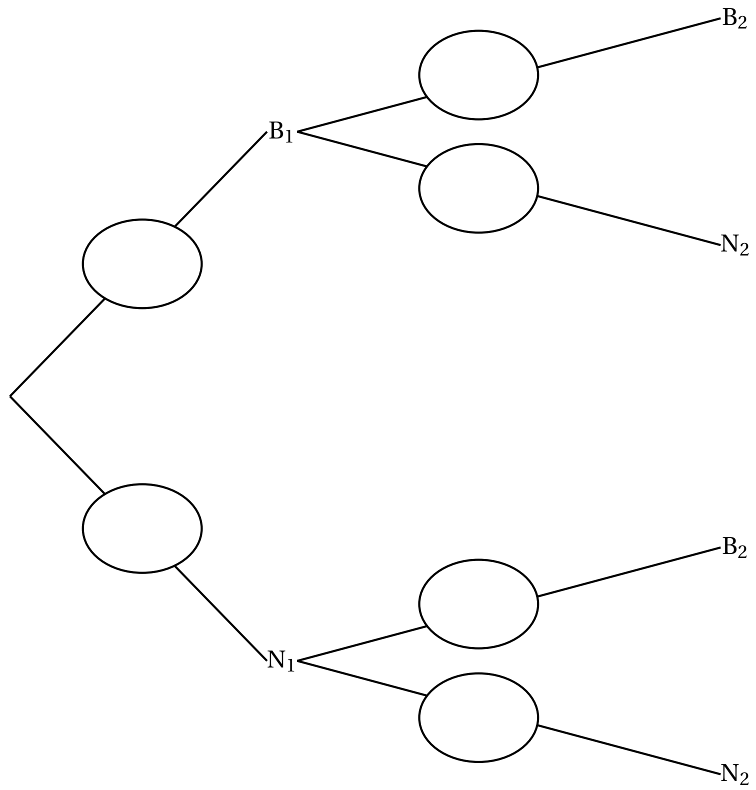
Annexe 1 (à rendre avec la copie)

Exercice 1
Unité : 5 cm



Annexe 2 (à rendre avec la copie si vous avez choisi l'exercice 3)

Exercice 3, question 3



Annexe 3 (à rendre avec la copie si vous avez choisi l'exercice 4)

Exercice 4, question 5

Nombre de périodes de quatre années	J = nombre de jours de décalage dans le cycle des jours de la semaine	Reste de la division de J par 7
0	0	0
1	5	5
2	10	3
3		
4		
5		
6		
7		

Baccalauréat L Pondichéry avril 2005

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 HEURES

EXERCICE 1 **5 points**

Sophie et Marc s'envoient régulièrement des messages qu'ils codent afin de ne pas en révéler la teneur à n'importe qui. Sophie utilise le procédé suivant :

- Tout d'abord, à chaque lettre de l'alphabet, elle associe son rang dans l'alphabet (ainsi 1 est associé à A, 2 à B, etc.). À chaque lettre, elle associe donc un nombre entier x.
- Elle associe ensuite à x un nouveau nombre entier y, en posant :

$$y \equiv 3x + 5 \quad \text{(modulo 26) avec } 0 \leqslant y \leqslant 25.$$

- Elle envoie enfin le message crypté sous forme d'une suite de lettres en associant de nouveau au nombre y la lettre qui lui correspond dans l'alphabet (à zéro elle associera la lettre Z, à 1 la lettre A, à 2 la lettre B, etc. et à 25 la lettre Y).

1. Vérifier qu'avec la méthode de Sophie :
   a. le nombre y associé à la lettre E est 20,
   b. la lettre P est codée par la lettre A.
2. Compléter le tableau de la feuille annexe n°1 à rendre avec la copie (aucune justification n'est demandée).
3. Décrypter ensuite à l'aide de cette méthode le message :

S F S T O T J R H M C T R H M F D P T J.

EXERCICE 2 **7 points**

Partie I

Sur la feuille annexe n°2 à rendre avec la copie, la figure 1 représente un triangle ABD rectangle isocèle en A. Construire sur cette figure le point C tel que ABCD soit un carré, le point E symétrique de C par rapport à D et le point J milieu du segment [AD].

Partie II Sur la figure 2 de la feuille annexe n°2, sont représentés le tracé en perspective à points de fuite du triangle ABD rectangle isocèle en A et la ligne d'horizon Δ du plan de ce triangle.

Toutes les constructions demandées devront être effectuées sur cette feuille et justifiées sur la copie.

1. Placer le point de fuite F_1, de la direction de la droite (AB), le point de fuite F_2 de la direction de (BD) et F_3, celui de la direction de (AD).
2. Construire le point C tel que ABCD soit un carré.
3. Construire le point E, symétrique du point C par rapport au point D.
4. Construire le point J, milieu du segment [AD].

EXERCICE 3 **8 points**

Le but de cet exercice est l'étude du comportement d'une balle de golf en fonction de sa vitesse, de la résistance de l'air, de la texture de la balle. Les mesures ont été faites avec un champion, d'où la nature exceptionnelle des réponses.

Partie A

On appelle t le temps (en secondes) écoulé depuis la frappe de la balle par le joueur, et $h(t)$ la hauteur (en mètres) de la balle par rapport au sol à l'instant t, avant qu'elle ne retombe. Dans un premier temps, on considère que la fonction h est définie pour t réel positif ou nul, de la manière suivante

$$h(t) = -0,008t^2 + t.$$

1. À quel instant t la balle retombera-t-elle sur le sol ?
2. Sur quel intervalle est-il utile d'étudier la fonction h ? Justifier la réponse.
3. Calculer la fonction dérivée de la fonction h.
4. En déduire le tableau de variations de h sur l'intervalle $[0 ; 125]$.
5. À quel instant la balle atteint-elle sa hauteur maximale ? Quelle est cette hauteur ?

Partie B

Si on tient compte de la résistance de l'air et de la nature de la balle, la hauteur de la balle en fonction du temps est exprimée plus précisément par la fonction g définie pour t réel positif ou nul, par :

$$g(t) = -0,008t^2 + t - \ln(t+1).$$

1. Calculer $g(0)$. Donner la signification du résultat.
2. En utilisant le fait que la dérivée de la fonction $t \longmapsto \ln(t+1)$ est la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t+1}$, montrer que la dérivée de g est donnée par :

$$g'(t) = \frac{-0,016t^2 - 0,016t + t}{t+1}.$$

3. **a.** Étudier les variations de la fonction g.

   b. À quel instant t la balle atteint-elle sa hauteur maximale ? Donner une valeur approchée de la hauteur atteinte, arrondie au mètre.
4. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée, arrondie à la seconde, de l'instant où la balle retombe sur le sol.

FEUILLE ANNEXE N$^{\text{o}}$ 1 À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 1

lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
rang x dans l'alphabet	1	2	3	4	5								
nombre y associé					20								
lettre envoyée													

lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
rang x dans l'alphabet			16	4	5								
nombre y associé													
lettre envoyée			A										

FEUILLE ANNEXE N^{o}2 À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 2

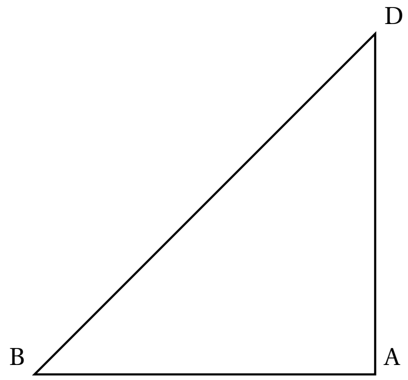


Figure 1

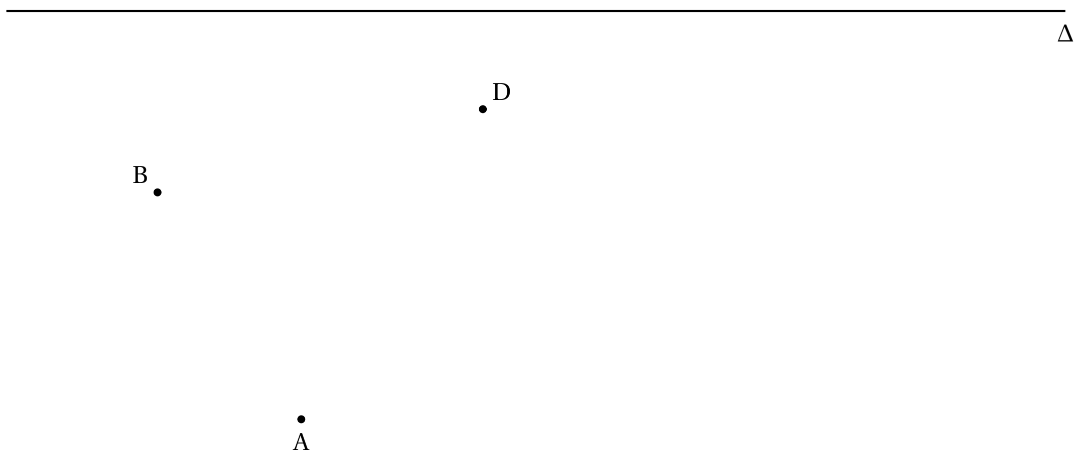


Figure 2

Baccalauréat L spécialité France juin 2005

L'usage d'une calculatrice est autorisé — 3 heures

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE — **3 points**

Arthur et Wilson sont deux jumeaux qui ont l'habitude de communiquer à l'aide de messages codés. Ils réalisent toujours leur cryptage de la façon suivante :
Chaque lettre de l'alphabet munie de son numéro d'ordre n est remplacée par la lettre de l'alphabet munie du numéro d'ordre p $(1 \leqslant p \leqslant 26)$ obtenu à l'aide de la formule

$$p \equiv 3 \times n + 7 \quad (\text{modulo } 26).$$

Par exemple la forme cryptée de L est Q car $3 \times 12 + 7 = 43$ et $43 \equiv 17 \quad (\text{modulo } 26)$.

1. Compléter la table de cryptage donnée sur la feuille annexe à rendre avec la copie (aucune justification n'est demandée).
2. Arthur a envoyé le message suivant à Wilson : MIJUZ CZRI OJ IVRLLHOV.
   Retrouver la forme décryptée du message.
3. Wilson désire lui répondre : MERCI.
   Donner la forme cryptée de ce message.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE — **5 points**

On rappelle que le nombre d'or noté Φ est tel que $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
On appelle rectangle d'or tout rectangle dont le rapport de la longueur sur la largeur est égal au nombre d'or.
Soit ABCD un carré. On considère :

- le milieu I du segment [DC],
- le cercle $\mathscr{C}$ de centre l et de rayon [lA],
- le point d'intersection E de la demi-droite [DC) et du cercle $\mathscr{C}$,
- le point F tel que AFED soit un rectangle.

1. Compléter la figure donnée sur la feuille annexe à rendre avec la copie.
2. Exprimer DI en fonction de AD.
3. Montrer que $\text{IA}^2 = \dfrac{5}{4}\text{AD}^2$, et en déduire l'expression de IE en fonction de AD.
4. Déduire des deux questions précédentes que $\text{DE} = \Phi \cdot \text{AD}$, et que le rectangle AFED est un rectangle d'or.

EXERCICE 3 OBLIGATOIRE — **6 points**

Soit la fonction t définie sur $\mathbb{R}$ par $t(x) = 4x^2 - 5x + 1$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $t(x) = (4x-1)(x-1)$. En déduire le signe de $t(x)$.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = x(2x-5) + \ln x$.

   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et la limite de f en 0.

   b. Déterminer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{t(x)}{x}$.

   c. En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

d. Sur une feuille de papier millimétré, tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

EXERCICE 4 OBLIGATOIRE **6 points**

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats arrondis à 10^{-4}.

Les résultats d'une enquête concernant les véhicules circulant en France montrent que :

- 88 % des véhicules contrôlés ont des freins en bon état ;
- parmi les véhicules contrôlés ayant des freins en bon état, 92 % ont un éclairage en bon état ;
- parmi les véhicules contrôlés ayant des freins défectueux, 80 % ont un éclairage en bon état.

On choisit au hasard un des véhicules concernés par l'enquête. Il y a équiprobabilité des choix.
On note F l'évènement « le véhicule contrôlé a des freins en bon état ».
On note E l'évènement « le véhicule contrôlé a un éclairage en bon état ».
$\overline{\text{E}}$ et $\overline{\text{F}}$ désignent les évènements contraires de E et de F.

1. Décrire cette situation à l'aide d'un arbre.

2. **a.** Déterminer la probabilité $P\left(\overline{\text{F}}\right)$ de l'évènement $\overline{\text{F}}$.

b. Quelle est la probabilité $P_{\overline{\text{F}}}\left(\overline{\text{E}}\right)$, probabilité que l'éclairage ne soit pas en bon état, sachant que les freins ne sont pas en bon état.

c. Montrer que la probabilité $P(\text{E} \cap \text{F})$ de l'évènement $\text{E} \cap \text{F}$ est égale à 0,809 6.

d. Quelle est la probabilité pour que le véhicule ait un éclairage en bon état ?
Tout conducteur d'un véhicule concerné par l'enquête ayant des freins ou un éclairage défectueux, doit faire réparer son véhicule. Calculer la probabilité pour qu'un conducteur ait des réparations à effectuer sur ses freins ou son éclairage.

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 1

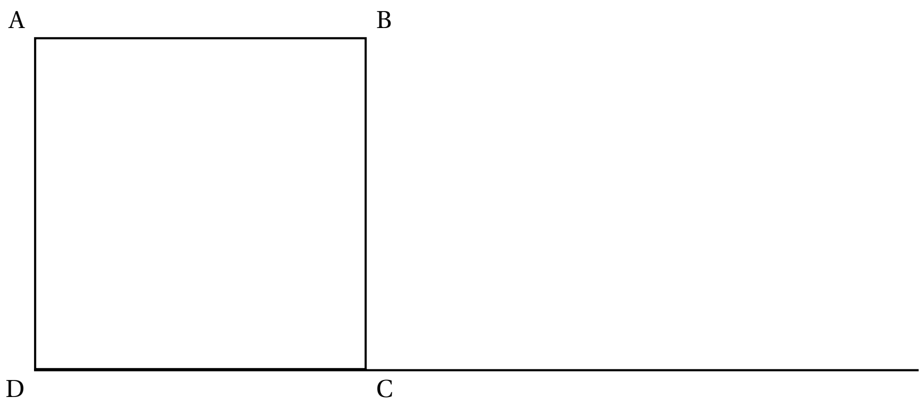
Table de cryptage à compléter :

lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
p	10											17	
forme cryptée	J											Q	

lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
p											1		
forme cryptée											A		

Exercice 2

Figure à compléter :



Baccalaurat L spécialité La Réunion juin 2005

L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Exercice 1 — 5 points

Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée.
Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est exacte.
Une bonne réponse rapporte 1 *point. Une mauvaise réponse enlève* 0,5 *point.*
L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

N°	Questions	A	B	C
1	f est une fonction dérivable en -1 telle que $f(-1) = 3$ et $f'(-1) = -2$. Une équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse -1 est	$y = 2x+3$	$y = 3x+1$	$y = -2x+1$
2	$\ln 54 - 2\ln 3$ est égal à	$\ln 9$	$\ln 3$	$\ln 6$
3	Dire que deux évènements A et B sont indépendants signifie que	$P(\text{A}\cap\text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B})$	$P(\text{A}\cap\text{B}) = 0$	$P(\text{A}\cap\text{B}) = P(\text{A}) \times P(\text{B})$
4	À une tombola, 100 billets sont mis en vente parmi lesquels un billet sur deux est gagnant. Xavier achète 2 billets. La probabilité qu'il achète au moins 1 billet gagnant est	$\dfrac{1}{50}$	$\dfrac{149}{198}$	$\dfrac{4949}{4950}$
5	A et B sont deux évènements tels que $P(\text{A}) \neq 0$. Alors $P(\text{A}\cap\text{B}) =$	$P_{\text{A}}(\text{B}) \times P(\text{A})$	$P_{\text{A}}(\text{B}) \times P(\text{B})$	$P_{\text{B}}(\text{A}) \times P(\text{A})$

Exercice 2 — 7 points

Pierre et Jean collectionnent des cartes postales.
À ce jour Pierre en possède 5 000 et Jean 3 000.
Pierre a remarqué que sa collection augmentait de 500 chaque année, et Jean pense qu'il peut voir sa collection augmenter de 15 % annuellement.

Dans toute la suite de l'exercice, on désigne par n un entier naturel non nul.

1. On note a_n le nombre de cartes postales que possédera Pierre dans n années,

   a. Justifier que la suite (a_n) est une suite arithmétique de premier terme $a_0 = 5000$ et de raison 500.

   b. Exprimer a_n en fonction de n.

   c. Représenter graphiquement cette suite pour $0 \leqslant n \leqslant 10$. On prendra un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ dans lequel 1 cm représente une année sur l'axe (Ox) et 1 cm représente 1 000 cartes postales sur l'axe (Oy).

2. On note b_n le nombre de cartes postales que possédera Jean dans n années.

   a. Démontrer que la suite (b_n) est une suite géométrique de premier terme $b_0 = 3000$ et préciser sa raison.

   b. Exprimer b_n en fonction de n.

   c. Représenter graphiquement cette suite pour $0 \leqslant n \leqslant 10$ sur le graphique précédent.

3. À partir de quelle année, la collection de Jean est-elle plus importante que celle de Pierre ?

EXERCICE 3 **8 points**

Construction du nombre d'or

1. On appelle nombre d'or le réel noté $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Démontrer que ce nombre vérifie la relation (1) : $\Phi^2 = \Phi + 1$.

2. On appelle rectangle d'or, un rectangle dont le quotient de la longueur par la largeur est égal au nombre Φ.

On donne quatre points A, B, C et D tels que le rectangle ABCD soit un rectangle d'or. (voir figure ci-dessous).

On appelle respectivement E et F les point des segments [BC] et [AD] tels que le quadrilatère ABEF soit un carré.

On pose AB = ℓ.

a. Exprimer la longueur AD en fonction de jet de ℓ et de Φ.

b. Montrer que $\dfrac{\text{EF}}{\text{FD}} = \dfrac{1}{\Phi - 1}$.

c. En utilisant la relation (1), montrer que $\Phi(\Phi - 1) = 1$, puis que $\dfrac{1}{\Phi - 1} = \Phi$.

d. Que peut-on en déduire pour le rectangle grisé FDCE ?

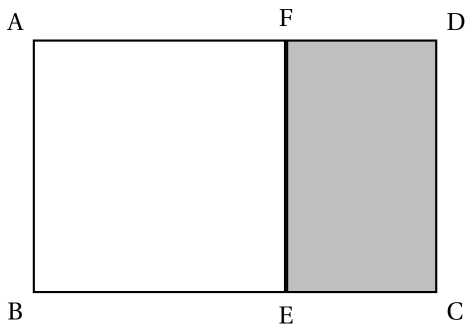
3. Soil K le milieu de [BE].

a. Exprimer KF en fonction de ℓ.

b. Montrer que $\text{KC} = \left(\Phi - \dfrac{1}{2}\right) \times \ell$.

c. En déduire que KF = KC.

d. En déduire une construction géométrique d'un segment dont la longueur est le nombre d'or Φ (faire une figure et expliquer les étapes de la construction).



Baccalauréat L Liban 6 juin 2005

Le candidat doit traiter les trois exercices

EXERCICE 1 **7 points**

Partie A

La production d'une entreprise peut être modélisée par une suite arithmétique (u_n) telle que, pour tout entier naturel non nul n, u_n désigne le nombre d'appareils produits l'année n.
La 1^{re} année, la production est de 7500 appareils ; on a donc $u_1 = 7500$.
La 6^{e} année, la production est de 12000 appareils ; on a donc $u_6 = 12000$.

1. Montrer que la raison de la suite (u_n) est 900.
2. Pour tout entier naturel non nul n, exprimer u_n en fonction de n.
3. Au bout de combien d'années la production aura-t-elle dépassé le triple de la production initiale ?

Partie B

Une autre entreprise produit la 1^{re} année 7500 appareils. On notera, pour tout entier naturel non nul n, v_n, le nombre d'appareils produits l'année n. On a donc $v_1 = 7500$. La production annuelle de cette entreprise augmente de 10 % chaque année.

1. Calculer v_2 et v_3.
2. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Donner sa raison.
3. Pour tout entier naturel non nul n, exprimer v_n en fonction de n.
4. Au bout de combien d'années la production aura-t-elle dépassé le triple de la production initiale ?
5. Combien d'appareils l'entreprise aura-t-elle produit en 13 ans ?

Rappel : pour $q \neq 1$, $\quad 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$

EXERCICE 2 **7 points**

Pour engager du personnel, une entreprise organise des tests de sélection.
Parmi les candidats qui se présentent aux épreuves, il y a 60 % d'hommes.
Une étude statistique montre que l'entreprise engage 70 % des hommes candidats et 80 % des femmes candidates.
RAPPEL : La probabilité conditionnelle de A sachant B est $P_{\text{B}}(\text{A}) = \dfrac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{B})}$.

Partie A

À l'issue des tests, on interroge une personne au hasard parmi tous tes candidats.
On note

- H l'évènement « la personne est un homme » ;
- F l'évènement « la personne est une femme » ;
- E l'évènement « la personne est engagée » ;
- $\overline{\text{E}}$ l'évènement complémentaire (ou contraire) de E.

1. **a.** Quelle est la probabilité $p(\text{F})$ que la personne interrogée soit une femme ?
   b. Quelle est la probabilité que la personne interrogée ne soit pas engagée, sachant que c'est une femme ?

2. Construire un arbre de probabilité illustrant cette situation.
3. Calculer la probabilité $p\left(\overline{\mathrm{E}} \cap \mathrm{F}\right)$ que la personne interrogée soit une femme et qu'elle ne soit pas engagée.
4. Montrer que $p\left(\overline{\mathrm{E}}\right) = 0,26$.

Partie B

Dans celle partie les résultats seront donnés sous forme de valeurs approchées arrondies au millième.
À l'issue des tests on interroge 4 personnes au hasard. On considérera que ces 4 choix sont deux à deux indépendants.

1. Quelle est la probabilité qu'aucune des 4 personnes ne soit engagée ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins une des 4 personnes ne soit pas engagée ?
3. Quelle est la probabilité que 2 personnes exactement soient engagées ?

EXERCICE 3 — 6 points

1. Quel est le reste de la division euclidienne de 5 par 8 ?
   Quel est le reste de la division euclidienne de 5^2 par 8 ?
2. Quel est. le reste de la division euclidienne de 5^{86} par 8 ?
   Quel est le reste de la division euclidienne de 5^{87} par 8 ?
3. Quel est le reste de la division euclidienne de 965^{87} par 8 ?
4. Soit n un entier naturel.
   Montrer que $5^{2n+1} + 5^{2n} + 2$ est un multiple de 8.

Baccalaurat L Polynésie juin 2005

L'usage d'une calculatrice est autorisée 3 heures

Exercice 1 **3 points**

Pour chacune des questions suivantes, parmi les réponses proposées, ii y a toujours une réponse exacte et une seule.
Le candidat répond sur sa copie en rappelant le numéro de la question et la lettre qui correspond selon lui, à la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte 0,5 point et chaque mauvaise réponse enlève 0,25 point ; la note totale de l'exercice ne pouvant être inférieure à 0.

On rappelle que le nombre d'or, noté φ, est défini par $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Le nombre d'or φ vérifie une des 4 propositions suivantes, laquelle ?

$$\text{A : } \varphi^3 = \varphi^2 + 1 \quad \text{B : } \varphi = \varphi^2 + 1 \quad \text{C : } \varphi^2 = \varphi + 1 \quad \text{D : } \sqrt{\varphi} = \varphi - 1.$$

2. Dans un dessin en perspective **cavalière**.

A : Les droites perpendiculaires sont toujours représentées par des droites perpendiculaires.	B : Les droites parallèles sont toujours représentées par des droites parallèles.	C : Les lignes de fuite se coupent.	D : Les longueurs des segments sont toujours conservées

3. Dans un dessin en perspective à **points de fuite** :

A : Sur les plans frontaux, les parallèles sont concourantes.	B : Les points de fuite sont sur la ligne d'horizon.	C : Sur les lignes de fuite les proportions sont respectées.	D : Un angle droit est toujours représenté par un angle droit.

4. Dans un triangle équilatéral MNP de centre O :
   A : $\widehat{\text{MON}} = 115°$
   B : les médianes sont les bissectrices intérieures
   C : $\widehat{\text{MNP}} = 72°$
5. L'angle de deux côtés consécutifs d'un pentagone régulier vaut
   A : 100° B : 108° C :116° D : 122°
6. Si ABCDE est un pentagone régulier :
   A : $\text{AB}/\text{DE} = \varphi$ B : $\text{AB}/\text{AC} = \varphi$ C : $\text{AD}/\text{BC} = \varphi$ D : $\text{AC}/\text{AD} = \varphi$

Exercice 2 **5 points**

Gaston hésite entre deux contrats d'embauche pour lesquels le salaire du premier mois est de 1600 euros.

Contrat n°1 : chaque mois à partir du deuxième mois le salaire mensuel augmente de 10 euros.

Contrat n°2 : chaque mois à partir du deuxième mois le salaire augmente de 0,6 % par rapport au mois précédent.

1. Pour chacun des deux contrats, déterminer la nature de la suite des salaires mensuels, préciser le premier terme et la raison.
2. Pour chacun des deux contrats, calculer le total des salaires perçus pendant la première année.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quel mois le salaire mensuel correspondant au contrat n°2 devient supérieur à celui du contrat n°1 Justifier correctement la réponse.

On rappelle que :
• La somme S des n premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q ($q \neq 1$) est :

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

• La somme S' des n premiers termes d'une suite arithmétique (v_n) de raison r :

$$S' = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = nv_1 + r\frac{n(n-1)}{2}.$$

EXERCICE 3 **6 points**

Voici les premiers vers d'un poème de Jacques Prévert : « Le cancre ».

Il dit non avec la tête
Mais il dit oui avec le cœur
Il dit oui à ce qu'il aime
Il dit non au professeur

Chacun des 26 mots de ces vers est inscrit sur une carte. On obtient ainsi la répartition suivante :

mots	il	dit	non	avec	la	tête	mais	oui
effectif	5	4	2	2	1	1	1	2
mots	le	cœur	à	ce	qu	aime	au	professeur
effectif	1	1	1	1	1	1	1	1

On a ainsi un jeu de 26 cartes.
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On tire successivement trois cartes au hasard parmi les 26.

a. Les tirages s'effectuent sans remise, calculer la probabilité d'obtenir, dans l'ordre « il dit non ».

b. Les tirages s'effectuent avec remise, calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois le mot « non ».

2. On tire au hasard et simultanément trois cartes au hasard parmi les 26.

a. Calculer la probabilité d'obtenir trois verbes.

b. Calculer la probabilité d'obtenir ensemble les trois mots « il », « dit » et « non ».

c. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois le mot « non ».

EXERCICE 4 **6 points**

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

Pour effectuer un examen médical, on injecte par piqûre intramusculaire une dose de 3 cm^3 d'une substance médicamenteuse dans le sang d'un malade à l'instant $t = 0$ (t est exprimé en heures). Celle-ci passe alors progressivement dans le sang. La diffusion atteint son maximum au bout d'une heure.
La courbe de l'annexe représente la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t.

1. Construire sur la feuille annexe la tangente à la courbe au point d'abscisse 2, sachant que son coefficient directeur est égal à $(-0,9)$.

2. À partir du graphique commenter l'évolution de la quantité de substance médicamenteuse contenue dans le sang.
3. Pour pouvoir effectuer l'examen, il faut que la quantité de substance médicamenteuse présente dans le sang soit supérieure ou égale à 0,5 cm^3. Déterminer graphiquement de combien de temps on dispose pour faire cet examen.

PARTIE B

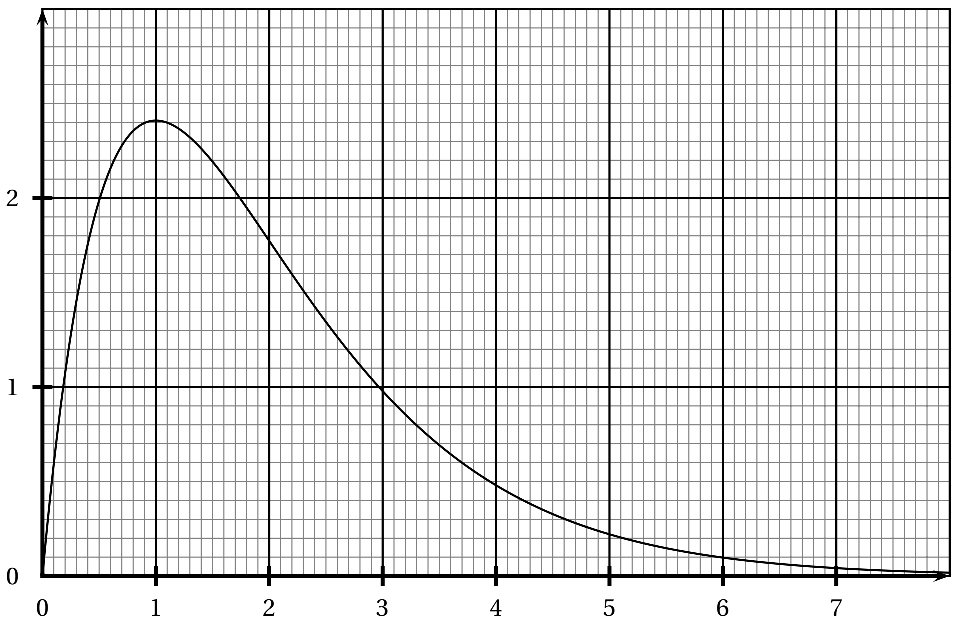
On a injecté par piqûre intraveineuse 1 cm^3 de médicament à un malade à l'instant $t = 0$. La substance se répartit immédiatement dans le sang et elle est ensuite progressivement éliminée. Expérimentalement, on montre que la quantité $q(t)$ de substance présente dans le sang à l'instant t est donnée par la relation $q(t) = \text{e}^{-0,15t}$ où t est exprimée en heures.

1. Quel volume de ce produit reste-t-il au bout de 90 minutes ?
2. Quel volume de ce produit le malade a-t-il éliminé au bout d'une demi-heure ? d'une heure ?
3. On donne $q'(t) = -0,15e^{-0,15t}$ où q' désigne la fonction dérivée de la fonction q.

   Étudier les variations de la fonction q sur l'intervalle $[0 ; 9]$ puis tracer sa représentation graphique dans un repère orthogonal en prenant pour unités 2 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées.

FEUILLE ANNEXE à rendre avec la copie

Quantité présente dans le sang (en cm^3)



Instant t en heures

∽ Baccalauréat L spécialité Centresétrangers ∽ juin 2005

L'usage d'une calculatrice est autorisé 3 heures

EXERCICE 1 4 points

Pour chaque question de cet exercice, il s'agit d'indiquer sur votre copie la lettre correspondant à l'unique bonne réponse : aucune justification n'est à rédiger.
Chaque bonne réponse rapporte 0,3 *point. Chaque mauvaise réponse enlève* 0,25 *point.*
En cas de total négatif, la note de l'exercice est ramenée à zéro.

1. 49 359 est congru à :	**a.**	1 modulo 11
	b.	2 modulo 11
	c.	3 modulo 11
2. Si x est congru à 4 modulo 5 et si y est congru à 6 modulo 5 alors $x + y$ est congru à	**a.**	0 modulo 5
	b.	4 modulo 5
	c.	10 modulo 10
3. $6^{19} + 4$	**a.**	est divisible par3
	b.	n'est pas un multiple de 5
	c.	est divisible par 5
4. 10^{11} est congru à :	**a.**	1 modulo 9
	b.	9 modulo 10
	c.	11 modulo 9
5. Si $U_1 = 2$ et si pour tout n $U_{n+1} = U_n + 3$, alors :	**a.**	$U_{16} = 50$
	b.	$U_{16} = 86\ 093\ 442$
	c.	$U_{16} = 47$
6. La limite de la suite définie par $U_n = 0,9^n + 2$ est égale à :	**a.**	0
	b.	2
	c.	$+\infty$
7. La suite définie par $U_0 = 5$ et $U_{n+1} = 3U_n + 2$ est :	**a.**	arithmétique
	b.	géométrique
	c.	ni géométrique nii arithmétique
8. La population d'un pays augmente de 3 % par an, cette progression est :	**a.**	géométrique de raison 0,03
	b.	arithmétique de raison 3
	c.	géométrique de raison supérieure à 1.

EXERCICE 2 6 points

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x + 5 - \mathrm{e}^x.$$

On note f' la fonction dérivée de f.
On appelle Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x :

$$2 - \mathrm{e}^x > 0.$$

2. **a.** Calculer la valeur exacte de $f(\ln 2)$.
   b. Determiner les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

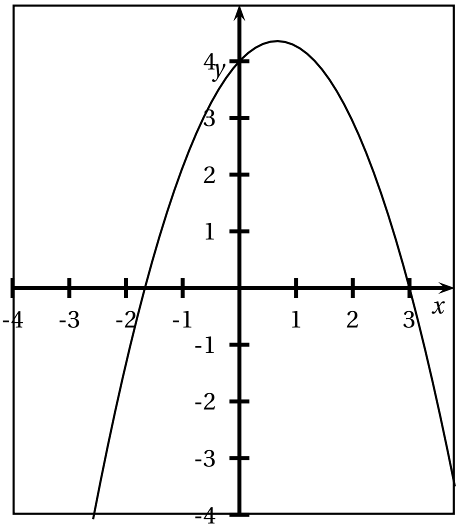
c. Calculer $f'(x)$.

d. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

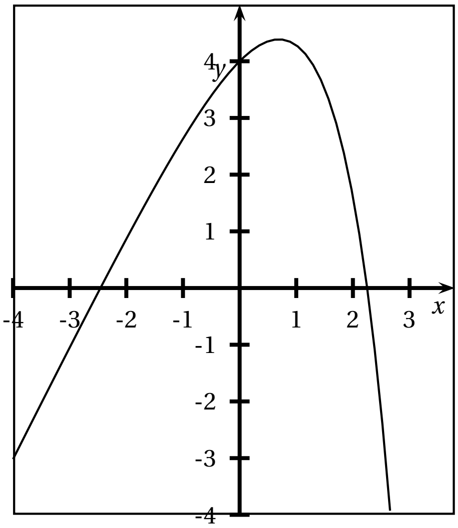
e. Montrer que la courbe Γ admet pour asymptote en $-\infty$ la droite Δ d'équation $y = 2x + 5$.

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe Γ au point d'abscisse 0.

4. Parmi les deux courbes tracées ci-dessous, une seule représente la fonction f. Indiquer laquelle en justifiant votre choix.



Courbe 1



Courbe 2

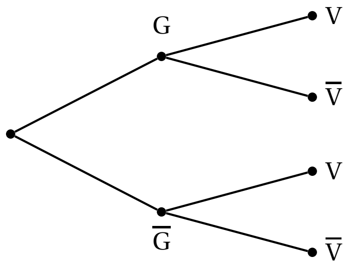
EXERCICE 3 — 6 points

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} *près.*

58 % des élèves d'une école sont des garçons.
Parmi les garçons, 25 % viennent à l'école à vélo.
Cette proportion tombe à 15 % chez les filles.

1. On choisit au hasard un élève de l'école, on considère les évènements :
G : « l'élève choisi est un garçon » ;
V : « l'élève choisi vient à vélo ».
L'évènement contraire de l'évènement A est noté $\overline{\text{A}}$.

a. Reproduire et compléter l'arbre probabiliste :



b. Montrer que P(V) = 0,208.

c. Calculer la probabilité conditionnelle $P_V(G)$.

2. On choit trois élèves au hasard dans l'école. On suppose que le nombre d'élèves est suffisamment grand pour que ce choix soit assimilable à trois tirages indépendants avec remise.

a. Calculer la probabilité que les trois élèves soient des garçons.

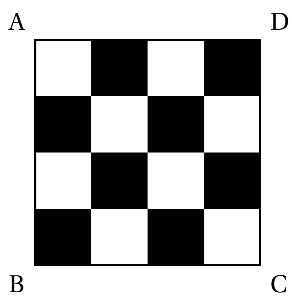
b. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une fille parmi les trois élèves.

c. Calculer la probabilité qu'au moins deux élèves soient venus à vélo.

EXERCICE 4 **4 points**

Une plaque carrée AI3CD a été dessinée en perspective à deux points de fuites sur l'annexe jointe.

1. Faire apparaitre sur le dessin de l'annexe la ligne d'horizon de cette perspective.
2. Dessiner sur cette plaque un damier de huit cases carrées comme indiqué sur la figure suivante (on pourra s'aider du point d'intersection des diagonales du carré ABCD et des deux points de fuite).



ANNEXE DE L'EXERCICE 4 (à rendre avec la copie)