Baccalauréat L spécialité 2006

L'intégrale de septembre 2005 à juin 2006

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat L spécialité France septembre 2005

L'usage d'une calculatrice est autorisé 3 heures

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré

EXERCICE 1 **6 points**

Hector a participé de très nombreuses fois à une compétition qui se déroule en deux manches. Il a enregistré sur cassette vidéo chacune des compétitions auxquelles il a participé, et il a constaté les faits suivants :

- il a gagné la première manche dans 95 % des cas ;
- quand il a perdu la première manche, il a aussi perdu la deuxième 3 fois sur 10 ;
- quand il a gagné la première manche, il a aussi gagné la deuxième dans 90 % des cas.

On choisit au hasard une des cassettes vidéo enregistrées par Hector et on la visionne. Il y a équiprobabilité des choix. On note :

- M_1 l'évènement « sur cette cassette, on voit Hector gagner la première manche » ;
- M_2 l'évènement « sur cette cassette, on voit Hector gagner la deuxième manche ».

On notera $\overline{M_1}$ l'évènement contraire de M_1 et $\overline{M_2}$ l'évènement contraire de M_2.

1. À l'aide de l'énoncé donner :
   a. $P(M_1)$ la probabilité de l'évènement M_1,
   b. $P_{M_1}(M_2)$ la probabilité de l'évènement M_2 sachant que M_1 est réalisé.
2. Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilité et compléter cet arbre.
3. a. Montrer que la probabilité de voir Hector gagner les deux manches est de 0,855.
   b. Quelle est la probabilité de l'évènement M_2 sachant que M_1 n'est pas réalisé ?
4. a. Calculer la probabilité de l'évènement M_2.
   b. Achille, arrivé en retard, voit Hector gagner la deuxième manche. Calculer à 10^{-2} près la probabilité que sur cette cassette, Hector ait aussi gagné la première manche.

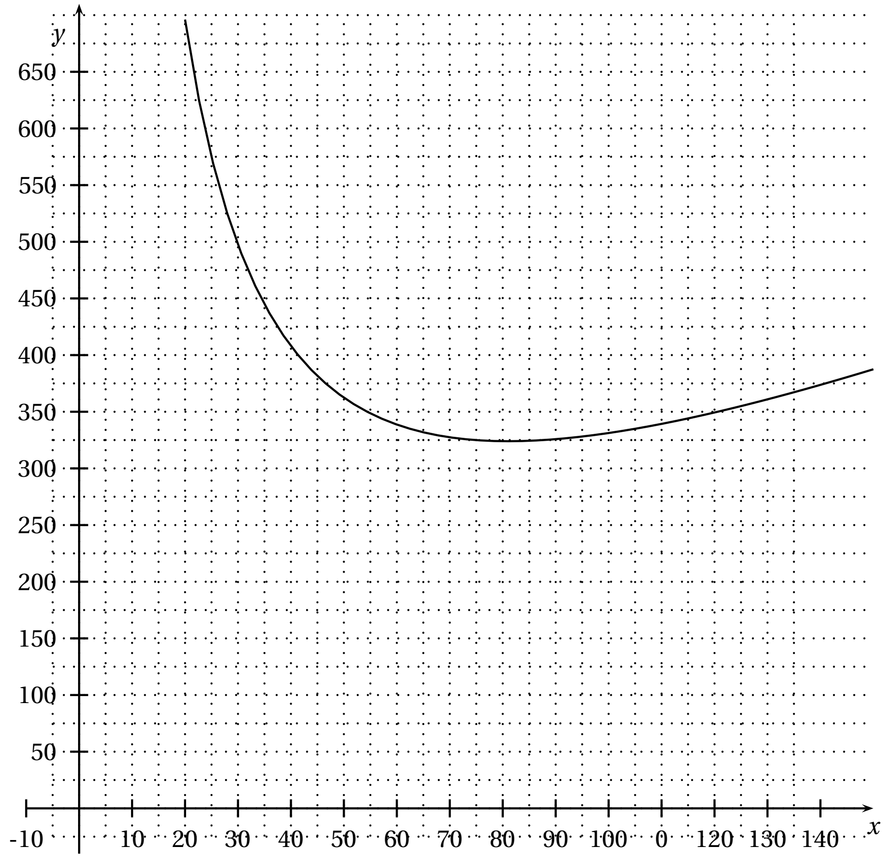
EXERCICE 2 **7 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\text{I} = [20\,;\,150]$ par

$$f(x) = 2x + \frac{13\,122}{x}.$$

1. Montrer que sur l'intervalle I , $f'(x) = \dfrac{2}{x^2}(x-81)(x+81)$. En déduire que sur l'intervalle I, $f'(x)$ est du signe de $(x-81)$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle I.
3. La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous :



Déterminer avec la précision permise par le graphique, une valeur approchée des solutions de l'équation : $f(x) = 350$ (**le graphique n 'est pas à rendre avec la copie.**)

Partie B

Un responsable de club doit organiser un déplacement. Le trajet total est de 600 km et le club dispose d'un bus dont la consommation en carburant, exprimée en litres par heure, est donnée par $\left(5+\dfrac{v^2}{300}\right)$ où v représente la vitesse moyenne du véhicule en kilomètres par heure. Le prix du litre de carburant est de 1 € et le chauffeur est payé 16,87 € par heure.

1. On désigne par t la durée totale du trajet, exprimée en heures.

a. Exprimer t en fonction de v.

b. Démontrer que le coût du carburant, exprimé en euros, pour le trajet total est égal à

$$\frac{3\,000}{v}+2v.$$

c. Montrer que le coût du transport, exprimé en euros, est égal à $f(v)$.

2. En utilisant la partie A :

a. Donner la vitesse moyenne à laquelle doit rouler le bus pour que le coût du transport soit minimal. Quel est alors ce coût ?

b. Le responsable du club dispose d'au plus 350 € pour le transport. Pour des raisons de sécurité, la vitesse moyenne du bus ne peut dépasser 90 kilomètres par heure. Déterminer l'intervalle dans lequel doit se situer la vitesse moyenne du bus, pour que le coût du transport ne dépasse pas 350 €.

EXERCICE 3 **7 points**

Dans cet exercice, la description des programmes des constructions n'est pas demandée sur la copie. Cependant, on laissera apparents tous les traits de construction. La question 4 *est indépendante des questions* 1, 2 *et* 3.

1. Tracer à la règle sur la feuille de papier millimétré (sans donner d'explications) un carré ABCD dont les côtés ont pour longueur 16 cm. Placer son centre O et les milieux des côtés.

2. Dans cette question, on note c_0 la longueur en cm des côtés du carré ABCD.

a. Calculer la longueur de la diagonale [AC] du carré en fonction de c_0.

b. Tracer le cercle tangent aux quatre côtés du carré ABCD. Exprimer son diamètre en fonction de c_0.

c. Tracer le carré $\mathrm{A'B'C'D'}$ inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ et dont les côtés sont parallèles à ceux du carré ABCD.

d. En constatant que les diagonales du carré $\mathrm{A'B'C'D'}$ sont des diamètres du cercle $\mathscr{C}$, calculer la longueur c_1, des côtés du carré $\mathrm{A'B'C'D'}$ en fonction de c_0.

3. Tracer le cercle $\mathscr{C}'$ tangent aux quatre côtés du carré $\mathrm{A'B'C'D'}$ puis le carré $\mathrm{A''B''C''D''}$ inscrit dans le cercle $\mathscr{C}'$ dont les côtés sont parallèles â ceux du carré $\mathscr{C}'$. Exprimer la longueur c_2 des côtés de $\mathrm{A''B''C''D''}$ en fonction de c_1.

4. En renouvelant cette construction, on obtient une suite de carrés. On note c_3, c_4, c_5 et ainsi de suite la longueur des côtés des carrés successifs ainsi obtenus. Les calculs précédents ont montré que les premiers termes de la suite (c_n) sont ceux d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $c_0 = 16$.

On admettra que ce résultat est vrai pour tous les termes de la suite (c_n).

a. Déterminer l'expression de c_n en fonction de n.

b. Calculer les valeurs exactes de c_6 et c_{12}.

c. Pour quelles valeurs de l'entier n, la longueur c_n, des côtés du $(n+1)$-ième carré construit est-t-elle strictement plus petite que 1 cm ?

Baccalauréat L Nouvelle-Calédonie
Épreuve de spécialité - novembre 2005
Durée : 3 heures

EXERCICE 1 **8 points**

> **Rappels sur la fonction logarithme népérien, notée ln :**
> a et b étant des réels strictement positifs et n un entier naturel :
> $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$; $\ln(a^n) = n \ln a$.

Partie A :

Sur la **feuille annexe à rendre avec la copie** on a tracé dans un repère orthonormal la courbe (C) représentant la fonction logarithme népérien et la parabole (P) représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f. (On ne demande pas les limites de f à l'infini.)

   c. Quelles sont les coordonnées exactes du point S sommet de la parabole (P) ?

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - \ln x = 2x^2 - 3x + \frac{9}{2} - \ln x$$

   La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

   a. Montrer que, pour tout réel strictement positif x : $g'(x) = \dfrac{(4x+1)(x-1)}{x}$.

   b. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   Justifier que le minimum de g est égal à $\frac{7}{2}$.

   c. En déduire que pour tout réel strictement positif x : $f(x) - \ln x > 0$.
   Quelle propriété des courbes (P) et (C), visible graphiquement, le résultat ci-dessus permet-il de justifier ?

Partie B :

Pour tout réel strictement positif x, on note M le point de la courbe (P) d'abscisse x et N le point de la courbe (C) de même abscisse x. On a ainsi : $MN = f(x) - \ln x = g(x)$.
(la longueur MN est exprimée dans l'unité graphique du schéma de **feuille annexe**.)

1. Placer les points M et N sur le schéma de la **feuille annexe** lorsque $x = 2$.
2. Montrer que lorsque $x = \frac{3}{4}$ on a : $MN = \frac{27}{8} + 2\ln 2 - \ln 3$.
   Donner la valeur de MN arrondie au centième.
3. **a.** À l'aide de la **partie A**, déterminer pour quelle valeur de x, la longueur MN est minimale. Que vaut alors cette longueur ?

   b. Tracer en rouge sur le schéma de la **feuille annexe** le segment $[MN]$ correspondant.
4. Quelle est la limite de la longueur MN quand x tend vers 0 (avec $x > 0$) ?

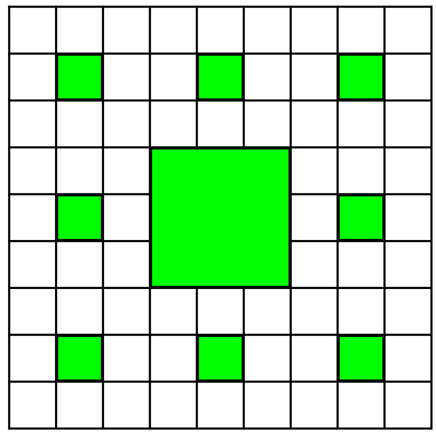
EXERCICE 2 **6 points**

Rappels :
Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme U_1.
On a alors pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $U_n = U_1 \times q^{n-1}$.
Soit (V_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme V_1.
On a alors pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $V_n = V_1 + (n-1)r$.

Un carré d'aire 1 m^2 est divisé en 9 carrés égaux comme indiqué sur la figure ci-contre.
On colorie le carré central. (1$^{\text{er}}$coloriage)

Les huit carrés restant sont à leur tour divisés en 9 carrés égaux comme indiqué sur la figure ci-contre.
On colorie les huit carrés centraux obtenus. (2$^{\text{e}}$coloriage)

On poursuit avec la même méthode la division et le coloriage du carré.



Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'aire en m^2 de la surface totale coloriée après n coloriages. On a ainsi : $A_1 = \dfrac{1}{9}$.
La surface grisée sur le figure ci-dessus a donc pour aire A_2.
On remarquera que chaque étape du coloriage consiste à colorier un neuvième de la surface non coloriée jusque là.

1. **a.** Justifier que $A_2 = A_1 + \dfrac{1}{9}(1 - A_1)$ puis calculer la valeur numérique exacte de A_2.

   b. Expliquer pourquoi, pour tout entier n supérieur ou égal à 1,
   $A_{n+1} = \dfrac{8}{9}A_n + \dfrac{1}{9}$.

2. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $B_n = A_n - 1$.

   a. Calculer B_1.

   b. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $B_{n+1} = \dfrac{8}{9}B_n$.

   c. Quelle est la nature de la suite (B_n) ?
   Exprimer alors, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le terme général B_n de la suite (B_n) en fonction de n.

3. **a.** En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $A_n = 1 - \left(\dfrac{8}{9}\right)^n$.

   b. Calculer alors la limite de la suite (A_n). Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 3 **6 points**

Une horloge électronique a été programmée pour émettre un bip toutes les sept heures. Le premier bip est émis le 31 décembre 2004 à minuit.

1. **a.** À quelle heure est émis le dernier bip du 1$^{\text{er}}$janvier 2005 ?

   b. À quelle heure est émis le premier bip du 2 janvier 2005 ?

   c. À quelle heure est émis le dernier bip du 2 janvier 2005 ?

   d. À quelle heure est émis le premier bip du 3 janvier 2005 ?

   Expliquer les réponses.

2. **a.** Montrer que : $24 \equiv 3(\text{modulo}7)$.

   b. En déduire le reste de la division euclidienne de 2×24 par 7 et le reste de la division euclidienne de 3×24 par 7. Justifier les réponses. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reste de la division euclidienne de $n \times 24$ par 7				5	1	4	0	3	6	2

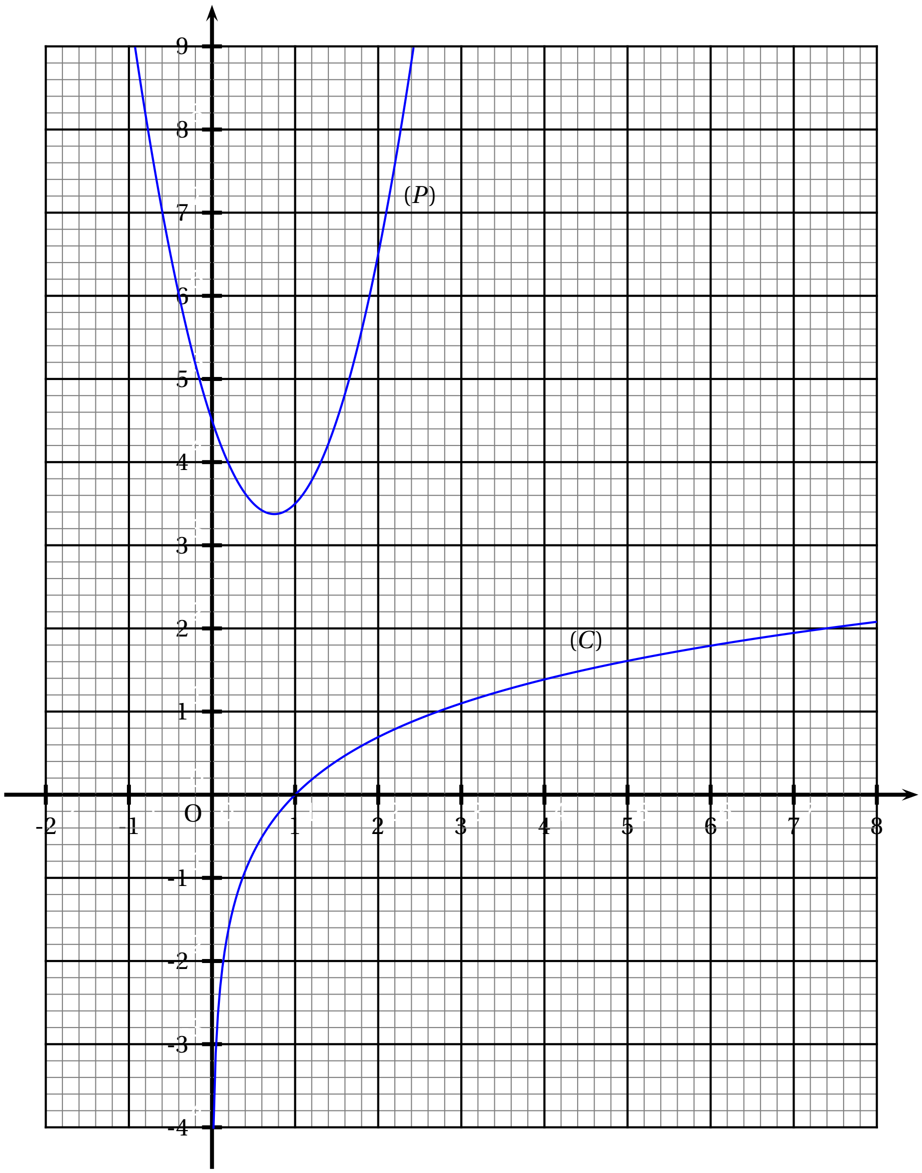
   c. Expliquer pourquoi l'horloge émet un bip à minuit tous les 7 jours et tout les 7 jours seulement.

3. On rappelle que l'année 2005 est une année non bissextile et comporte donc 365 jours.

   a. Déterminer le plus petit entier naturel a tel que : $365 \equiv a(\text{modulo}7)$

   b. À quelle date l'horloge émettra-t-elle un bip à minuit pour la dernière fois en 2005 ?
   Expliquer la réponse.

ANNEXE à l'exercice 1 (à rendre avec la copie)



Baccalauréat L spécialité Centres étrangers juin 2006

L'usage d'une calculatrice est autorisé 3 heures

Exercice 1 **6 points**

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = (\ln x)^2(3-2\ln x).$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentée dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

1. **a.** Calculer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

   b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

2. f' désignant la dérivée de f sur $]0~;~+\infty[$ on admet que $f'(x) = \dfrac{6\ln x(1-\ln x)}{x}$.

   a. Résoudre les inéquations
   - $\ln x \geqslant 0$;
   - $1-\ln x \geqslant 0$.

   b. En déduire le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

   c. Calculer les extremums de f sur l'intervalle $[0,75~;~3]$.

3. Donner le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 2 **5 points**

Pour chacune des questions suivantes une et une seule réponse est exacte. (On indiquera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte.) Chaque bonne réponse rapporte 1 *point ; une mauvaise réponse enlève* 0,5 *point ; une absence de réponse vaut* 0 *pour la question. Si le total de l'exercice ainsi calculé est négatif il est ramené à* 0.

1. On lance deux dés cubiques équilibrés et on lit la somme des résultats des faces supérieures. La probabilité d'obtenir « 7 » est :

   a : $\dfrac{1}{6}$ **b :** $\dfrac{1}{12}$ **c :** $\dfrac{7}{36}$

2. On lance une pièce de monnaie trois fois de suite.
   La probabilité d'obtenir trois fois « pile » est :

   a : $\dfrac{1}{2}$ **b :** $\dfrac{1}{3}$ **c :** $\dfrac{1}{8}$

3. Une urne contient quatre boules vertes et deux boules noires indiscernables au toucher. On prélève au hasard une boule de l'urne. La probabilité d'obtenir une boule verte est :

   a : $\dfrac{2}{3}$ **b :** $\dfrac{1}{2}$ **c :** $\dfrac{1}{6}$

4. Une urne contient quatre boules vertes et deux boules noires indiscernables au toucher.
On prélève successivement deux boules, sans remettre la première boule tirée dans l'urne.
La probabilité d'obtenir deux boules vertes est :

a : $\frac{4}{9}$ **b :** $\frac{2}{5}$ **c :** $\frac{1}{36}$

5. Une urne contient quatre boules vertes et deux boules noires indiscernables au toucher.
On prélève successivement et avec remise, deux boules de l'urne.
La probabilité que la deuxième boule tirée soit noire sachant que la première est verte est

a : $\frac{1}{3}$ **b :** $\frac{2}{9}$ **c :** $\frac{4}{15}$

EXERCICE 3 **5 points**

1. a. Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des nombres 3^n pour $n \in \mathbb{N}, n \leqslant 6$.

b. Recopier et compléter le tableau suivant :

Puissance de 3	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
Reste modulo 7							

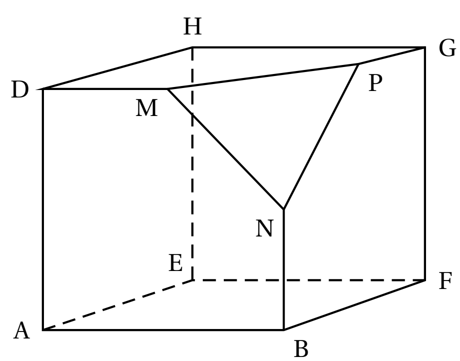
c. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, 3^{6k} est congru à 1 modulo 7.

2. a. Déterminer le plus petit entier naturel congru à 1 515 modulo 7.

b. Après avoir remarqué que $2\,004 = 6 \times 334$, déduire du 1 le reste de la division euclidienne de $1\,515^{2\,004}$ par 7.

c. Montrer que dans la division euclidienne de $1\,515^{2\,006}$ par 7 le reste est 2.

EXERCICE 4 **4 points** Pour fabriquer un solide S, on découpe, dans un cube d'arête 4 cm, un tétraèdre (voir le schéma ci-dessous en perspective cavalière) où M, N et P sont les milieux de trois arêtes. On note S le solide ABFEDMNPGH ainsi obtenu.

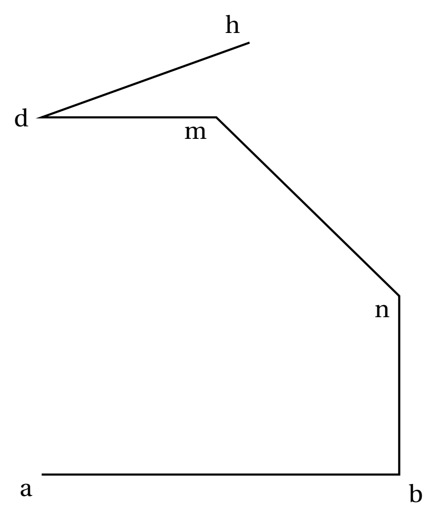


1. Sur l'annexe, on a ébauché le dessin en perspective à point de fuite du solide S, le plan (ABNMD) étant frontal.
Les points A, B, F, E, D, M, N, P, G, H sont représentés par les points nommés en minuscules a, b, f, e, d, m, n, p, g, h. Compléter le dessin de la représentation du solide S après avoir placé le point de fuite principal w.
On laissera apparent les traits de construction.

2. Calculer le volume en cm^3 du solide S
(rappel : volume d'une pyramide $V = \frac{1}{3}B \times h$ où B est l'aire de la base et h la mesure de la hauteur).

ANNEXE DE L'EXERCICE 4 à rendre avec la copie)

Ligne d'horizon



Baccalauréat L spécialité France juin 2006

L'usage d'une calculatrice est autorisé 3 heures

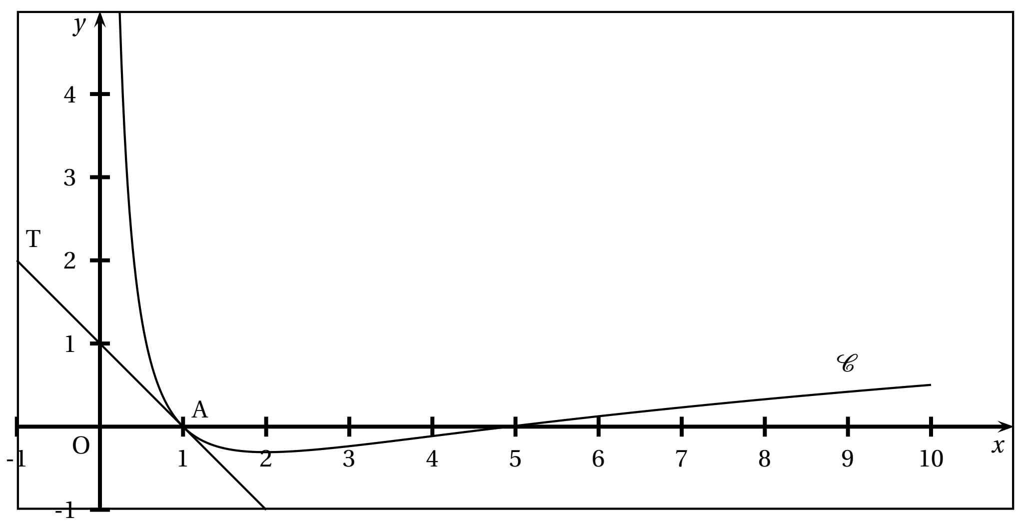
Ce sujet comporte une feuille annexe à rendre avec la copie

EXERCICE 1 **8 points**

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormal d'une fonction f définie et derivable sur l'intervalle$]\ 0\,;\ 10]$. On note f' la fonction dérivée de f sur cet intervalle.



On précise que la droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A de coordonnées $(1\,;\, 0)$ et qu'elle passe par le point de coordonnées $(0\,;\,1)$.

1. Répondre aux deux questions suivantes par lecture graphique :

   a. Donner $f(1)$ et $f'(1)$ en justifiant la valeur de $f'(1)$.

   b. Lire les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.

2. On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = \ln x + \dfrac{a}{x} + b$, où a et b désignent deux nombres réels.

   a. Calculer $f'(x)$.

   b. En utilisant les valeurs trouvées pour $f(1)$ et $f'(1)$ à la question 1 , calculer a et b.

   c. En déduire l'expression de $f(x)$.

Partie B

On sait désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ par

$$f(x) = \ln x + \frac{2}{x} - 2$$

1. a. Vérifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,10]$

$$f'(x) = \frac{x-2}{x^2}$$

Étudier le signe de $f'(x)$.

b. On admet que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 est $+\infty$.
Dresser le tableau de variations de la fonction f.
En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.

2. Le nombre 5 est-il vraiment une solution de l'équation $f(x) = 0$?

EXERCICE 2 **6 points**

On admet qu'on obtient le même reste en divisant un nombre par 9 qu'en divisant la somme de ses chiffres par 9.
Par exemple :

$8\ 753 = 972 \times 9 + 5$,	le reste est donc 5.
$8 + 7 + 5 + 3 = 23 = 2 \times 9 + 5$,	le reste est également 5.

Sur les billets de banque en euros figure un code de 11 chiffres précédé d'une lettre. On remplace la lettre par son rang dans l'alphabet habituel comportant 26 lettres. On obtient ainsi un nombre à 12 ou 13 chiffres et on cherche le reste de la division de ce nombre par 9. Ce reste est le même pour tous les billets authentiques et vaut 8. Exemple :

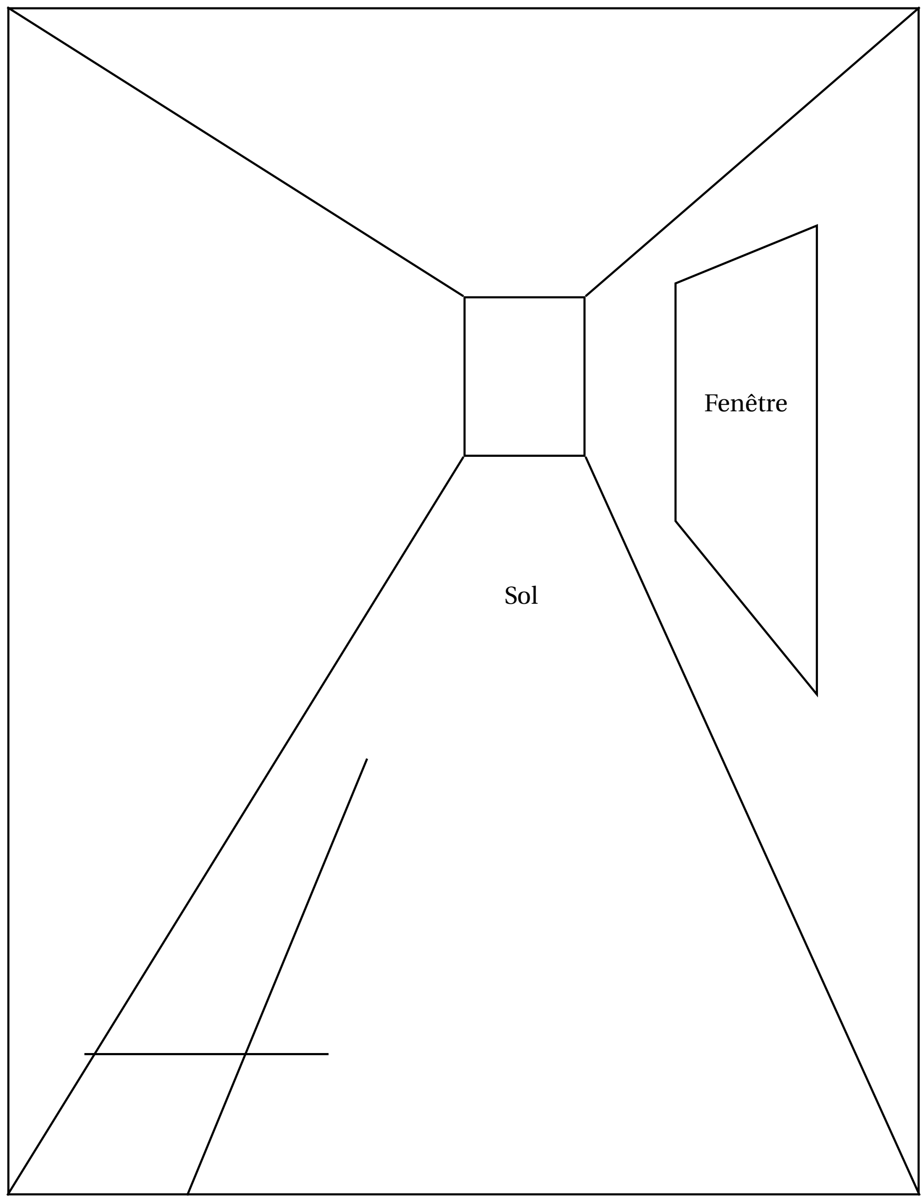
Code :	s00212913862.
Rang dans l'alphabet de la lettre s ;	19.
Nombre obtenu :	1900212913862.
Reste pour ce billet :	8

1. Le code u01308937097 figure sur un billet de banque.
   a. Donner le nombre à 13 chiffres correspondant à ce code.
   b. Calculer le reste de la division par 9 de la somme des 13 chiffres de ce nombre.
   c. Que peut-on dire de ce billet ?
2. Sur un billet authentique figure le code s0216644810x, x pour le dernier chiffre illisible. Montrer que $x + 42$ est congru à 8 modulo 9.
En déduire x.
3. Sur un autre billet authentique la partie du code formé par les 11 chiffres est 16122340242, mais la lettre qui les précède est effacée. On appelle n le rang dans l'alphabet de la lettre effacée.
   a. Déterminer les valeurs possibles de n.
   b. Quelles sont les possibilités pour la lettre effacée ?

EXERCICE 3 **6 points** Un architecte a commencé le dessin d'un couloir (voir la figure en feuille annexe). Il a dessiné une large fenêtre rectangulaire sur le mur vertical de droite. II n'a dessiné qu'une partie du carrelage du sol.
On admet que l'architecte respecte les règles de la perspective à point de fuite. Toutes les constructions sont à faire sur la figure donnée en annexe à rendre avec la copie.

1. Citer une règle de la perspective à point de fuite. La vérifier sur la figure fournie en feuille annexe (on peut éventuellement effectuer des constructions sur la figure).
2. Sachant que le carrelage est régulier, représenter les 3 premières rangées de 5 carreaux (laisser clairement apparaître les traits de construction ; aucune justification écrite n'est demandée par ailleurs).
3. La fenêtre rectangulaire du mur de droite comporte deux battants de même largeur séparés par une traverse verticale. Au milieu de cette traverse verticale est fixée une poignée. Seul le cadre de la fenêtre est représenté sur le dessin. Compléter la figure en représentant la traverse verticale par un segment et la poignée par un point M.

Feuille annexe de l'exercice 3 à rendre avec la copie



Baccalauréat L spécialité La Réunion juin 2006

L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

EXERCICE 1 **5 points**

Le but de cet exercice est de modéliser, par une suite numérique, les variations du stock d'une bibliothèque.

L'inventaire de janvier 2006 indique un effectif de 8000 ouvrages. Chaque année, 10 % des ouvrages sont égarés, tandis que 400 nouveaux ouvrages sont achetés.

Pour tout entier naturel n, on note p_n le nombre d'ouvrages en stock au début de l'année $2006+n$.

1. **a.** Indiquer la valeur de p_0.

   b. Calculer les valeurs prévisionnelles p_1 et p_2 de l'effectif du stock lors des inventaires de janvier 2007 et de janvier 2008.

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, le terme général de la suite (p_n) vérifie la relation :

$$p_{n+1} = 0,9p_n + 400.$$

   b. En quelle année l'effectif du stock sera-t-il pour la première fois inférieur à 6 000 ?

EXERCICE 2 **5 points**

On considère l'ensemble E défini par $E = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$.

1. Préciser la signification de la phrase : « Le nombre entier A est congru à zéro modulo 12 ».
2. On admet que tout nombre entier est congru modulo 12 à un élément de E et un seul.

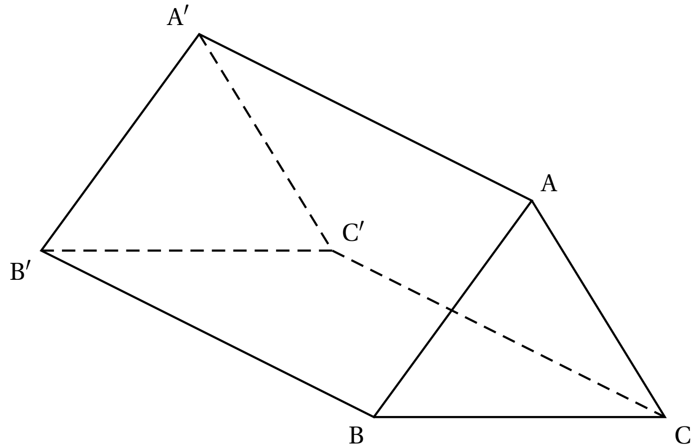
   a. Déterminer à quel élément de E le nombre 10 est congru modulo 12.

   b. Déterminer à quel élément de E le nombre 100 est congru modulo 12.
3. À tout entier n on associe l'élément u_n de E tel que 10^n soit congru à u_n modulo 12.
   Calculer u_3 , u_4, u_5 , u_6, u_7, u_8 et u_9.

EXERCICE 3 **5 points**

Une passerelle autoroutière a la forme d'un prisme droit ABCA$'$B$'$C$'$ dont la base est un triangle isocèle ABC de sommet principal A : sur la figure ci-dessous, elle est représentée en perspective cavalière. La longueur de cette passerelle est 40 mètres et on a AB = AC = 4 m.

Formulaire : *volume d'un prisme = aire de la base × hauteur.*



En ce qui concerne les questions 1 *et* 2 *ci-dessous, on laissera apparentes sur la feuille annexe toutes les constructions. Aucune autre justification n'est demandée.*

1. Dans cette question, on cherche à représenter le prisme par une vue en perspective à points de fuite pour laquelle le plan ABC est un plan frontal. Sur la feuille annexe à compléter et à rendre avec la copie, on a placé les points A, B, C, C′ et la ligne d'horizon Δ.
   a. Placer sur la feuille annexe le point de fuite principal F.
   b. Compléter sur la feuille annexe la représentation en perspective à points de fuite du prisme ABCA′B′C′.
2. Soit I le milieu du segment [BB′] et J le milieu du segment [CC′]. Le segment [IJ] représente un joint de dilatation inséré dans le sol de la passerelle. Représenter le segment [IJ] sur la figure de la feuille annexe.
3. Soit H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC. Soit x la mesure de la longueur CH exprimée en mètres.
   a. Montrer que le nombre x est inférieur ou égal à 4. La valeur 4 peut-elle être atteinte ?
   b. Déterminer le volume maximal que peut avoir le prisme.

EXERCICE 4 **6 points**

L'objectif de cet exercice est d'étudier une fonction qui permet d'estimer la taille d'un enfant de moins de 6 *ans, en fonction de son âge.*

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,1 ; 6] par :

$$f(x) = 70 + 5x + 9\ln x.$$

1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous en arrondissant le résultat à l'unité la plus proche.

x	0,1	0,3	0,5	1	2	3	4	5	6
$f(x)$									

2. Étudier le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle [0,1 ; 6].
3. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal : 1 cm représente 0,5 unités sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 10 unités sur l'axe des ordonnées.

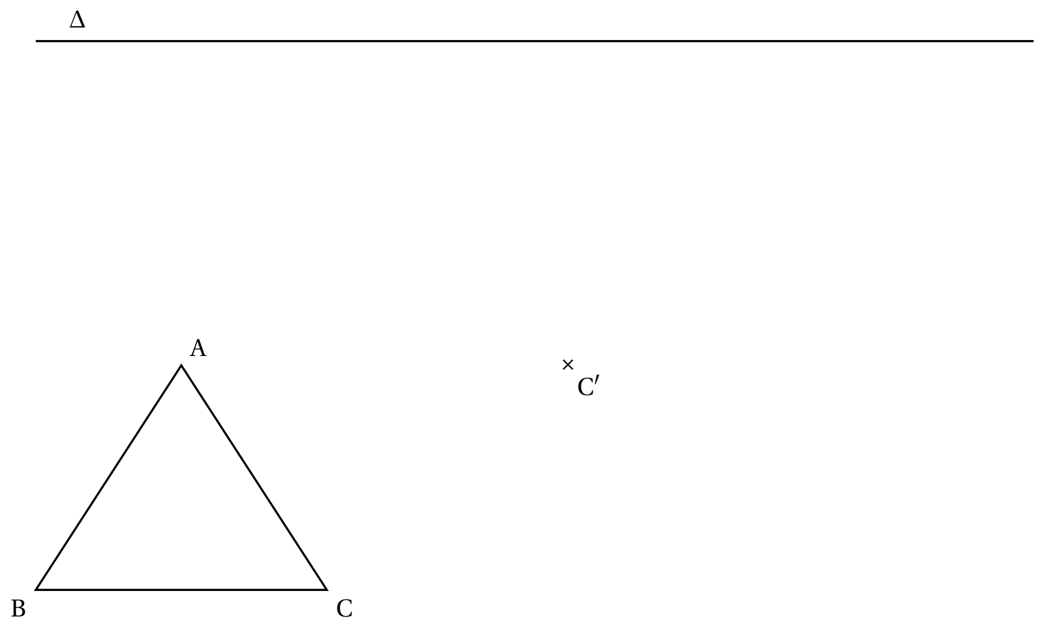
Partie B

La fonction f de la partie A permet d'estimer la taille, exprimée en cm, d'un enfant de moins de 6 ans, en fonction de son âge x, exprimé en années. Cette taille est donc donnée par $f(x) = 70 + 5x + 9\ln x$.

1. Calculer une estimation de la taille d'un enfant de 2 ans et demi, arrondie au centimètre.
2. Retrouver le résultat de la question précédente par une construction graphique utilisant la courbe tracée dans la partie A.
3. Évaluer l'âge d'un enfant mesurant 1 m par une construction graphique utilisant la courbe tracée dans la partie A.

Feuille annexe - Exercice 3

(à rendre avec la copie)



Baccalauréat L Polynésie juin 2006

L'usage d'une calculatrice est autorisée 3 heures

EXERCICE 1 **6 points**

Un jeu consiste à jeter un dé de forme tétraédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 4.
Ce dé est pipé de telle façon que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro porté par cette face.
On note p_i la probabilité d'obtenir le nombre i pour $i \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

1. Exprimer p_i en fonction de i puis vérifier que la probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{3}{5}$.
2. On jette le dé. Si le nombre obtenu est pair, la somme reçue par le joueur est égale à sa mise augmentée de 10 %. Si le nombre obtenu est impair, le joueur reçoit sa mise diminuée de 11 euros. La mise minimale est de 20 euros.

   Un joueur décide de faire trois parties successives :
   - il mise cent euros pour la première partie ;
   - pour la seconde partie il mise la somme reçue à l'issue de la première partie ;
   - pour la troisième partie il mise la somme reçue à l'issue de la seconde partie.

   a. Montrer que, pour ce joueur, les montants possibles de la somme reçue à l'issue des trois parties sont, arrondies à un euro près, 133 euros, 110 euros, 109 euros, 108 euros, 88 euros, 87 euros, 86 euros et 67 euros.

   b. Montrer que la probabilité de gagner 110 euros est égale à $\frac{18}{125}$.

   c. Calculer la probabilité de chacun des quatre évènements qui conduisent à une perte.

   d. Montrer que la probabilité, pour ce joueur, de gagner de l'argent est supérieure à celle d'en perdre.

Indication : pour la question 2, *on pourra s'aider d'un arbre.*

EXERCICE 2 **5 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - 2x$.

1. Calculer $g'(x)$ où g' désigne la dérivée de g puis dresser le tableau de variations de g.
2. En déduire que pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x^2$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
   Pour la limite en $+\infty$ on pourra remarquer que pour x non nul $f(x)$ peut s'écrire : $x^2\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - 1\right)$.
2. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f, puis en utilisant la partie A construire le tableau de variations de f.

3. On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

a. Calculer $f(-1)$ et $f(0)$.

b. Montrer que la solution de l'équation $f(x) = 0$ est unique et qu'elle appartient à l'intervalle $[-1 ; 0]$.

c. En utilisant une calculatrice pour calculer $f(x)$ pour différentes valeurs de x, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de cette solution.
Justifier la valeur retenue.

EXERCICE 3 **5 points**

La reine Cléopâtre ordonna à son architecte, le célèbre Numérobis, de réaliser une pyramide régulière à base carrée dont les dimensions devaient être telles que le carré de la hauteur soit égal à l'aire de chaque face triangulaire de cette pyramide

1. Compléter le dessin donné en annexe, représentant la pyramide en perspective cavalière ; L est le centre du carré AOUT, I est le sommet de la pyramide, J le milieu du segment [OU].
On pose $\text{OJ} = r$; $\text{IL} = h$ et $t = \dfrac{\text{IJ}}{\text{JL}}$.

2. Calculer :

a. La longueur JL en fonction de r.

b. La longueur IJ en fonction de r et de h.

c. En déduire la valeur de t en fonction de r et h.

d. L'aire du triangle OUI en fonction de r et h.

3. Montrer que l'exigence de Cléopâtre se traduit par la relation :

$$\frac{h^2}{r^2} = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r} \quad (1)$$

4. **a.** Calculer $t^2 - 1$.

b. En déduire qu'alors l'égalité (1) peut s'écrire : $t^2 - t - 1 = 0 \quad (2)$.

5. **a.** Montrer que : $\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4} = t^2 - t - 1$.

b. En déduire les solutions de l'équation (2).

c. Quel nom porte la seule solution possible ?

EXERCICE 4 **4 points**

Un globe-trotter a parié de parcourir 5 000 km à pied.
Il peut, frais et dispos, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1 % tous les jours.
On notera d_n la distance parcourue durant le n-ième jour.

1. Calculer les distances d_1, d_2, d_3 parcourues durant les trois premiers jours.

2. Expliquer pourquoi $d_{n+1} = 0,99 d_n$. En déduire la nature de la suite (d_n) et l'expression de d_n en fonction de n.

3. **a.** Calculer, en fonction de n, le nombre total L_n de kilomètres parcourus au bout de n jours.
$(L_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n)$.

b. En déduire la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Le globe-trotter peut-t-il gagner ?

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir 4 999 km.

On rappelle que :

– La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r est :

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = n\frac{u_1 + u_n}{2}$$

– La somme S' des n premiers termes d'une suite géométrique (v_n) de raison q $(q \neq 1)$ est :

$$S' = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1\frac{1 - q^n}{1 - q}$$

ANNEXE de l'exercice 3 à rendre avec la copie