

Ce document a pour but de vous permettre de vous préparer aux exercices du baccalauréat S impliquant des R.O.C. (Restitution Organisée des Connaissances). Les preuves dans ce document ont été extraites<sup>1</sup> de mon cours de TS que vous pouvez trouver sur mon site (cf lien cliquable en bas de page) ou dans votre cahier. Ce sont soit des preuves à connaître, soit des démonstrations qui impliquent des raisonnements que l'on doit savoir faire dans des contextes légèrement différents, ou dans des cas particuliers. Je pense en particulier aux chapitres comme « Équations différentielles » ou celui avec lequel on commence : « Suites récurrentes. ». Lisez bien les pré-requis dans les questions R.O.C. on peut vous demander une autre preuve que celle vue en cours ! Toutes les preuves ne sont pas complètes, parfois je ne donne que l'idée essentielle, par exemple pour les récurrences, je ne donne parfois que la phase d'hérédité. Le jour de l'épreuve du bac, il faut bien sûr tout écrire.

Bonne lecture, et bon courage.

Vincent PANTALONI.

## I Suites récurrentes

Cette section parle des suites  $(u_n)$  définies par un premier terme et une relation de récurrence de la forme  $u_{n+1} = f(u_n)$  où  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$ . Vous aurez à refaire certaines de ces preuves avec des exemples concrets de suite dans les exercices.

Il est faux de dire que  $f$  croissante donne  $(u_n)$  croissante, on a en fait la propriété suivante à savoir montrer.

**Propriété 1.** On a deux cas si  $f$  est monotone :

- ① Si  $f$  est croissante alors  $(u_n)$  monotone. Le sens de var est donné par le signe de  $u_1 - u_0$
- ② Si  $f$  est décroissante alors  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones de monotonies contraires

*Démonstration.* Supposons  $u_1 > u_0$ .

1. Par récurrence.  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_{n+1} \geq u_n$  ». Je fais l'hérédité : Si  $\mathcal{P}(k)$  est vraie,  $u_{k+1} \geq u_k$ . Or  $f$  est croissante, donc :

$$u_{k+1} \geq u_k \implies f(u_{k+1}) \geq f(u_k) \implies u_{k+2} \geq u_{k+1}$$

2. On pose  $p_n = u_{2n}$  et  $i_n = u_{2n+1}$ . Alors :

$$p_{n+1} = f \circ f(p_n) \quad \text{et} \quad i_{n+1} = f \circ f(i_n)$$

Or  $f$  dec. implique  $f \circ f$  croissante donc par le 1.  $p$  et  $i$  sont monotones. Supposons  $p$  croissante, alors  $u_2 \geq u_0$  donc, en appliquant  $f$  qui est dec. on a  $u_3 \leq u_1$  donc  $i_1 \leq i_0$  donc  $i$  est dec.

□

RVC

Un critère donnant le sens de variation de  $(u_n)$ . Une récurrence facile à savoir refaire au cas par cas :

**Propriété 2.** Si  $u_n$  appartient à l'intervalle  $I$  pour tout  $n$ , alors :

- ① Si  $\forall x \in I, f(x) \geq x$  alors  $(u_n)$  est croissante.
- ② Si  $\forall x \in I, f(x) \leq x$  alors  $(u_n)$  est décroissante.

*Démonstration.* Je ne montre que la ①. On suppose que  $I$  est stable par  $f$  et que  $u_0 \in I$  : Soit  $\mathcal{P}(n)$  la propriété dépendant de  $n$  (pour  $n \in \mathbb{N}$ ) :

$$\mathcal{P}(n) : u_{n+1} \geq u_n$$

**Initialisation.**  $u_1 = f(u_0) \geq u_0$ . Donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

**Hypothèse de récurrence.** On suppose que pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(k)$  est vraie.

**Hérédité.**  $u_{k+2} = f(u_{k+1}) \geq u_{k+1}$ . Ainsi  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie.

**Conclusion.** Par récurrence, on a prouvé que pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_{n+1} \geq u_n$ . Donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

La preuve du ② est la même *mutatis mutandis*.

□

<sup>1</sup>generated with the extract package

Le théorème suivant ne doit pas être appliqué mais vous devez savoir montrer le résultat pour une fonction  $f$  donnée, dont on sait qu'elle est continue et si on sait déjà que  $(u_n)$  ( définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$  ) est convergente.

**Théorème 1.** *Si  $f$  est continue sur un intervalle fermé  $I$  et que  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$ , alors la limite est nécessairement un point fixe de  $f$ , i.e.  $f(\ell) = \ell$ .*

*Démonstration.* On sait que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ . De plus  $f$  est continue sur  $I$ , donc en  $\ell$ , ce qui implique que  $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$ . En composant les limites, on en déduit que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$ . Par unicité de la limite de  $(u_n)$  on a donc  $f(\ell) = \ell$   $\square$

RVC  
RVC

## II Limites et continuité

**Propriété 3.** *Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.*

*Démonstration.* Soit  $a$  un réel de l'ensemble de définition de  $f$ . On écrit l'approximation affine de  $f$  en  $a$ . Il existe une fonction  $\epsilon$  telle que :  $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$  et :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \epsilon(x)$$

Alors quand  $x$  tend vers  $a$ ,  $\epsilon(x)$  et  $(x - a)$  tendent vers zéro, et donc  $f(x)$  tend vers  $f(a)$ .  $\square$

RVC

## III Exponentielle

**Théorème 2.** *Il existe une unique fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que :  $f' = f$  et  $f(0) = 1$ .*

Existence admise, on va prouver l'unicité.

**Lemme 1.** *Si il existe une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f' = f$  et  $f(0) = 1$  alors elle vérifie :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x)f(x) = 1$  et par conséquent  $f$  ne s'annule pas.*

*Démonstration.* On pose la fonction  $\phi$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \phi(x) = f(-x)f(x)$ . On dérive,  $\phi' = 0$  et  $\phi(0) = 1$   $\square$

On prouve maintenant l'unicité :

*Démonstration.* Supposons qu'il existe deux fonctions  $f$  et  $g$  qui définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  telle que :  $f' = f$ ,  $g' = g$  et  $f(0) = g(0) = 1$ . D'après le lemme, ces fonctions ne s'annulent pas, et donc on peut considérer la fonction  $\psi$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par :  $\psi = \frac{f}{g}$ . On dérive,  $\psi' = 0$  et  $\psi(0) = 1$ . Donc  $\psi$  est constante, égale à 1, ainsi  $f = g$ .  $\square$

RVC

**Propriété 4.** *Pour tous réels  $a$  et  $b$  et tout entier relatif  $n$ , on a les formules :*

$$\boxed{\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}} \quad (1)$$

$$\boxed{\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)} \quad (2)$$

$$\boxed{\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}} \quad (3)$$

$$\boxed{\exp(a \times n) = (\exp(a))^n} \quad (4)$$

La relation (2) s'appelle la *relation fonctionnelle* de l'exponentielle.

*Démonstration.* (1) découle du Lemme 1. (3) découle de (2) et (1). (4) se prouve à partir de (2) par récurrence sur  $n$ . L'essentiel est de prouver (2) :

Soit  $b \in \mathbb{R}$ . On considère la fonction  $\chi$  de  $x$  où  $b$  est un paramètre définie par :

$$\chi(x) = \frac{\exp(x+b)}{\exp(x)}.$$

On dérive,  $\chi' = 0$  et  $\chi(0) = \exp(b)$ . Donc pour tout réel  $x$ ,  $\exp(x+b) = \exp(x)\exp(b)$ . Ceci pour tout réel  $b$ . D'où (2)

Preuve de (4) : Soit  $a$  un réel. Soit  $\mathcal{P}(n)$  : «  $\exp(a \times n) = (\exp(a))^n$  » Prouvons par récurrence sur  $n$  que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ini : Comme  $\exp(a) \neq 0$ ,  $\exp(a)^0 = 1 = \exp(0)$  ok...  $\square$

RVC

**Propriété 5.**  $\mathcal{C}_{\exp}$  est au dessus de sa tangente en zéro. i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x + 1$$

*Démonstration.* On pose  $\phi$  la fonction définie par :  $\phi(x) = e^x - x - 1$  et on veut prouver que cette fonction est positive sur  $\mathbb{R}$  pour cela, on l'étudie.  $\phi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a :  $\phi'(x) = e^x - 1$ . Or :

$$e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq e^0 \iff x \geq 0$$

D'où les variations de  $\phi$  qui admet ainsi un minimum en zéro qui vaut :  $\phi(0) = 0$ . Donc  $\phi$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .  $\square$

RVC

## IV Nombres Complexes, généralités

**Propriété 6** (Propriétés algébriques du conjugué). On a les formules suivantes pour  $z$  et  $z'$  dans  $\mathbb{C}$  :

$$\overline{\overline{z}} = z \tag{5}$$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \tag{6}$$

$$\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'} \tag{7}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}} \quad \text{pour } z' \neq 0 \tag{8}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \quad \text{pour } z' \neq 0 \tag{9}$$

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}^* \tag{10}$$

*Démonstration.* On écrit  $z$  et  $z'$  sous forme algébrique :  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$ .

(5) et (6) immédiat.

(7) :

$$\overline{zz'} = \overline{(a+ib)(a'+ib')} = \overline{aa' - bb' + i(ab' + a'b)} = aa' - bb' - i(ab' + a'b)$$

Par ailleurs :  $\overline{z} \times \overline{z'} = (a-ib)(a'-ib') = \dots = aa' - bb' - i(ab' + a'b) = \overline{zz'}$ .

(8) :

$$\frac{1}{z'} = \frac{\overline{z'}}{z' \overline{z'}} = \frac{1}{z' \overline{z'}} \times \overline{z'}$$

Or  $z' \overline{z'} \in \mathbb{R}^+$  donc il est son propre conjugué, et par (7) on a donc :

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \overline{\frac{1}{z' \overline{z'}} \times \overline{z'}} = \frac{1}{\overline{z' \overline{z'}}} \times \overline{\overline{z'}} = \frac{1}{z' \overline{z'}} \times z' = \frac{1}{z'}$$

(9) : On utilise que  $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$  puis (7) et (8).

(10) : Récurrence pour  $n \in \mathbb{N}^*$  utilisant (7), puis pour obtenir la formule pour les entiers négatifs, on

utilise (8) et les formules usuelles sur les puissances. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ . Donc :

$$\overline{z^{-n}} = \overline{1/z^n} = 1/\overline{z^n} = 1/\overline{z}^n = \left(\frac{1}{\overline{z}}\right)^n = (\overline{z}^{-1})^n = \overline{z}^{-n}$$

□ R.O.C

**Propriété 7** (Propriétés algébriques du module d'un nombre complexe). Pour tous  $z$  et  $z'$  dans  $\mathbb{C}$  :

$$|\overline{z}| = |z| \quad (11)$$

$$|zz'| = |z| \times |z'| \quad (12)$$

$$|1/z'| = 1/|z'| \quad \text{pour } z' \neq 0 \quad (13)$$

$$|z/z'| = |z|/|z'| \quad \text{pour } z' \neq 0 \quad (14)$$

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}^* \quad (15)$$

$$(16)$$

*Démonstration.* Ces propriétés se démontrent à l'aide de celles sur les conjugués. Par exemple pour (12) :

$$|zz'| = \sqrt{zz' \times \overline{zz'}} = \sqrt{zz' \times \overline{z} \overline{z'}} = \sqrt{z\overline{z} \times z'\overline{z'}} = \sqrt{z\overline{z}} \times \sqrt{z'\overline{z'}} = |z| \times |z'|$$

□ R.O.C

## V Nombres Complexes, forme exponentielle...

**Prérequis** : Pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (17)$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \quad (18)$$

**Propriété 8.** Pour tous complexes non nuls  $z$  et  $z'$ , on a :

$$\textcircled{1} \arg zz' = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$$

$$\textcircled{2} \arg \overline{z} = -\arg z \quad [2\pi]$$

$$\textcircled{3} \arg \frac{1}{z} = -\arg z \quad [2\pi]$$

$$\textcircled{4} \arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$$

$$\textcircled{5} \arg z^n = n \arg z \quad [2\pi]$$

*Démonstration.* On note  $z$  et  $z'$  sous forme trigonométrique :

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{et} \quad z' = |z'|(\cos \theta' + i \sin \theta')$$

On va montrer  $\textcircled{1}$  et retrouver la propriété sur le module du produit :

$$\textcircled{1} \quad zz' = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \times |z'|(\cos \theta' + i \sin \theta') \quad \text{On développe et on trouve :}$$

$$\begin{aligned} zz' &= |z| \times |z'| (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\sin \theta \cos \theta' + \sin \theta' \cos \theta)) \\ &= |z| \times |z'| (\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) \quad \text{par (17) et (18)} \end{aligned}$$

Or deux nombres complexes sont égaux ssi ils ont même module et même argument modulo  $2\pi$  donc :

$$|zz'| = |z| \times |z'| \quad \text{et} \quad \arg zz' = \theta + \theta' = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$$

$\textcircled{2}$  C'est évident. Pensez le géométriquement, par symétrie d'axe ( $Ox$ ) : Si  $M$  est d'affixe  $z$ , et  $M'$  d'affixe  $\overline{z}$  alors  $M$  et  $M'$  sont symétriques par rapport à l'axe des réels. Donc :

$$(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{OM}). \quad \text{Ce qui se traduit en complexes par } \textcircled{2}$$

$\textcircled{3}$   $1/z = (1/|z|^2) \times \overline{z}$ . On utilise alors  $\textcircled{1}$  et  $\textcircled{2}$ . Comme  $1/|z|^2 \in \mathbb{R}^+$ , alors  $\arg(1/|z|^2) = 0$ .

$\textcircled{4}$  On utilise  $\textcircled{1}$  et  $\textcircled{3}$  car  $z/z' = z \times (1/z')$ .

$\textcircled{5}$  Récurrence sur  $n$  en utilisant  $\textcircled{1}$ .

□

**Propriété 9.** Pour  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan, d'affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$ , (de même pour  $C$  et  $D$ ) on a :

① Argument de l'affixe d'un vecteur :  $\arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = \arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB})$

②  $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{AB})$

*Démonstration.* On commence par l'affixe d'un vecteur :

① Cela vient de ce que si  $M$  est le point d'affixe  $(z_B - z_A)$  alors  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ . Ainsi :

$$\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB})$$

② D'après la formule sur l'argument d'un quotient :

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) &= \arg(z_B - z_A) - \arg(z_D - z_C) \\ &= \arg(z_{\overrightarrow{AB}}) - \arg(z_{\overrightarrow{CD}}) \\ &= (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) - (\vec{u}; \overrightarrow{CD}) \\ &= (\overrightarrow{CD}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \quad \text{Par antisymétrie des angles orientés} \\ &= (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{AB}) \quad \text{Par la relation de Chasles sur les angles} \end{aligned}$$

□

## VI Produit scalaire dans l'espace.

**Distance d'un point à un plan.** La distance d'un point  $A(x_A; y_A; z_A)$  au plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $ax + by + cz + d = 0$  est notée  $d(A; \mathcal{P})$ . Elle vaut :

$$d(A; \mathcal{P}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

*Démonstration.*  $d(A; \mathcal{P}) = AH$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{P}$ . Soit  $B$  un point de  $\mathcal{P}$ . Justifier que :  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = AH \cdot \vec{n}$  puis que :

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Enfin, justifier que :  $d = -(ax_B + by_B + cz_B)$  puis conclure.

□

## VII Équations différentielles

**Théorème 3** (Solution générale). Les fonctions définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  solutions de l'équation différentielle  $y' = ay$  sont les fonctions  $f_k$  définies par :

$$f_k(x) = k e^{ax}$$

Où  $k$  est une constante réelle quelconque.

*Démonstration.* On doit prouver deux choses :

①  $f_k$  est bien solution pour tout réel  $k$ . (Facile)

- ② Si il existe une solution  $g$  à  $y' = ay$  alors elle est de la forme  $f_k$ . Pour cela on pose  $\varphi = \frac{g}{f_1}$  (où  $f_1(x) = e^{ax}$ ). On dérive  $\varphi$ , on trouve  $\varphi' = 0$ , donc  $\varphi = \text{constante}$ , et donc toute solution de  $y' = ay$  s'écrit comme une constante multipliée par  $f_1$ .

□

RVC

Dans cette partie,  $a$  et  $b$  désignent deux réels,  $a$  non nul. On considère l'équation différentielle :

$$y' = ay + b \quad (19)$$

La propriété suivante est à savoir redémontrer dans un cas particulier, comme  $y' = ay - 1$  ou  $y' = -2y + 3 \dots$

**Propriété 10.** Soit  $f_0$  une solution particulière de (19).  $f$  est une solutions de (19), ssi la différence  $(f - f_0)$  est solution de l'équation sans second membre associée :  $y' = ay$ .

*Démonstration.* Il y a deux sens à prouver.

- ① Si  $f$  est solution de (19), alors  $f' = af + b$ . Comme  $f_0$  est aussi solution de (19), on a aussi  $f_0' = af_0 + b$ . On soustrait ces deux égalité et on obtient :

$$f' - f_0' = af + b - af_0 - b \quad \text{donc :} \quad (f - f_0)' = a(f - f_0)$$

i.e.  $(f - f_0)$  est solution de l'équation  $y' = ay$ .

- ② Si  $(f - f_0)$  est solution de l'équation  $y' = ay$ , alors en reprenant le calcul précédent, on est amené à faire apparaître  $b$  par la ruse extraordinianire :  $0 = b - b$  on a donc :  $f' - f_0' = af + b - af_0 - b$ . Et comme  $f_0$  est solution de (19), alors  $f_0' = af_0 + b$  et donc il reste  $f' = af + b$ . Ainsi  $f$  est solution de (19).

L'équivalence est ainsi montrée.

□

On en déduit que toute solution de (19) est de la forme : la solution générale de  $y' = ay$  plus une solution particulière de (19).

RVC

## VIII Logarithme népérien

cf T.D. pour les preuves :

**Relation fonctionnelle** Soient deux réels  $a$  et  $b$  strictement positifs.

1. Simplifier  $e^{\ln(a)}$ ,  $e^{\ln(b)}$ ,  $e^{\ln(ab)}$ . Ecrire le produit  $ab$  de deux manières.

2. En déduire la relation fonctionnelle :  $\ln(ab) =$

3. L'exponentielle transforme les sommes en produits. Que fait sa fonction réciproque?

**Puissance**

1. Par récurrence on peut montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a donc :

$$\ln(a^n) =$$

2. En posant  $a = e^\alpha$  (donc  $\alpha = \dots$ ) prouver cette même propriété directement.

3. Etablir une formule pour  $\ln(\sqrt{a}) =$   On remarquera que  $(\sqrt{a})^2 = a$ .

**Inverse et quotients**

1. En calculant  $\ln(a \times \frac{1}{a})$  de deux manières, compléter la formule :  $\ln(\frac{1}{a}) =$

2. En déduire la formule :  $\ln(\frac{a}{b}) =$

**Limites à base de ln**

- En  $+\infty$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ .  
Soit  $A > 0$ . Si  $x > e^A$  alors  $\ln(x) > A$ , car ln est croissante.
- En 0.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ .  
On pose  $X = \frac{1}{x}$  et on se ramène au cas précédent.
- Croissance comparée :
  - ①  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x)/x = 0$  On pose  $X = \ln x$  et on utilise le résultat de croissance comparée vu pour exp.
  - ②  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ . Idem, ou bien on utilise  $\ln(1/x) = -\ln(x)$  et on se ramène au cas précédent.

**IX Intégration.**

**Relation de Chasles.** Cette formule est encore vraie si  $f$  n'est plus supposée positive ou si  $c$  n'est pas entre  $a$  et  $b$  :

**Propriété 11** (Relation de Chasles). Soit  $c$  un réel compris entre  $a$  et  $b$ . On a :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

*Démonstration.* Soit  $F$  une primitive de  $f$ .

$$(F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a)$$

□

**Propriété 12** (Intégrer une inégalité). Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $[a; b]$ , telles que :  $\forall x \in [a; b], f(x) \geq g(x)$  alors :

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

*Démonstration.* Par hypothèse, la fonction  $f - g$  est positive, donc son intégrale (vue comme une aire par exemple) est positive, puis par linéarité de l'intégrale, on a le résultat. □

**Propriété 13** (Inégalités de la moyenne). Si  $f$  admet un minimum  $m$  et un maximum  $M$  sur  $[a; b]$ , alors on a l'encadrement :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Autrement dit la moyenne est comprise entre le minimum et le maximum de  $f$  :  $m \leq \bar{f} \leq M$

*Démonstration.* On intègre l'encadrement :  $\forall x \in [a; b], m \leq f(x) \leq M$  sur  $[a; b]$  □

**Propriété 14** (I.P.P.). Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables de dérivées continues sur un intervalle  $[a; b]$ , alors la fonction  $u'v$  est intégrable sur  $[a; b]$  et on a la formule :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx =$$

*Démonstration.* On a  $(uv)' = u'v + uv'$ . On intègre cette égalité sur  $[a; b]$  et on utilise la linéarité de l'intégrale. □

RVC

## X Lois de probabilités

**Propriété 15** (Relation de Pascal).

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

*Démonstration.* Straight forward, just remember that :  $(p+1)! = p! \times (p+1)$ . □

RVC

La belle formule suivante est à connaître. La preuve, si ça vous amuse.

**Propriété 16** (Formule du binôme). *Pour tous nombres complexes  $a$  et  $b$  non nuls, et  $n$  dans  $\mathbb{N}$  on a :*

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

*Démonstration.* Par récurrence à partir de  $(a+b)^{n+1} = a(a+b)^n + b(a+b)^n$  et la Relation de Pascal 15. Je ne fais que l'hérédité :

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^{p+1} \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n+1-(p+1)} b^{p+1} \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \left( \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} a^{n+1-(p+1)} b^{p+1} \right) + \binom{n}{n} b^{n+1} \\ &= \left( \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p \right) + a^{n+1} \left( \sum_{p=1}^n \binom{n}{p-1} a^{n+1-p} b^p \right) + b^{n+1} \\ &= \left( \sum_{p=1}^n \left[ \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \right] a^{n+1-p} b^p \right) + \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\ &= \left( \sum_{p=1}^n \binom{n+1}{p} a^{n+1-p} b^p \right) + \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\ &= \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} a^{n+1-p} b^p \end{aligned}$$

□

RVC

**Propriété 17.** Si  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ , alors pour  $t$  positif,

$$P(X \in [0; t]) = P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx \quad \text{et} \quad P(X \geq t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

L'intégrale  $\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$  se calcule et vaut :  $[-e^{-\lambda x}]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$ .

RVC

**Propriété 18** (Espérance). Si  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ , alors

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

*Démonstration.* Il faut savoir refaire ce calcul. Soit  $A \in \mathbb{R}^+$ , on calcule l'intégrale suivante par parties :  $\int_0^A x \lambda e^{-\lambda x} dx$ . On pose  $u(x) = x$  et  $v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ , donc  $u'(x) = 1$  et  $v(x) = -e^{-\lambda x}$ . D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^A x \lambda e^{-\lambda x} dx &= [-x e^{-\lambda x}]_0^A - \int_0^A -e^{-\lambda x} dx \\ &= -A e^{-\lambda A} - \left[ \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^A \\ &= \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda} \end{aligned}$$

Comme  $\lambda$  est strictement positif, quand  $A$  tend vers  $+\infty$ ,  $\lambda A$  aussi et donc  $\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-\lambda A} = 0$ . En posant  $B = -\lambda A$  qui tend vers  $-\infty$  quand  $A$  tend vers  $+\infty$ , on obtient :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} -\lambda A e^{-\lambda A} = \lim_{B \rightarrow -\infty} B e^B = 0$$

Par croissance comparée. Ainsi,  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda} = \frac{0 - 0 + 1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$

□  
RVC