Toutes les questions de cours et R.O.C. au bac de T.S.

Vincent PANTALONI

Version du 10 novembre 2010

Table des matières

Remerciements.

Cette compilation des questions de cours et restitutions organisées des connaissances d'après les annales a été faite à partir des fichiers LaTeX tapuscrits par Denis Vergès (Denis.Verges@wanadoo.fr), et disponibles sur la toile sur le site de l'A.P.M.E.P. (l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)
http://www.apmep.asso.fr/spip.php?rubrique346

Bac 2011

Exercice n° 1

Restitution organisée de connaissances (Antilles–Guyane, septembre 2010)

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.
On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et que pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$ on a : $\exp(\ln x) = x$.
À partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ qui à x associe $\dfrac{1}{x}$.

Bac 2010

Exercice n° 2

Restitution organisée de connaissances (Amérique du Sud, novembre 2009)

Soit D le point de coordonnées $(x_{\mathrm{D}},\ y_{\mathrm{D}},\ z_{\mathrm{D}})$ et P le plan d'équation
$ax+by+cz+d=0$, où a, b et c sont des réels qui ne sont pas tous nuls.
Démontrer que la distance du point D au plan P est donnée par :

$$d(\mathrm{D}, P) = \frac{|ax_{\mathrm{D}} + by_{\mathrm{D}} + cz_{\mathrm{D}} + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Exercice n° 3

Restitution organisée de connaissances (Pondichéry, avril 2010)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. On suppose connus les résultats suivants :

- $\displaystyle\int_a^b [f(t)+g(t)]\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$
- Si pour tout $t \in [a\ ;\ b],\ f(t) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$

Montrer que : si pour tout $t \in [a\ ;\ b],\ f(t) \leqslant g(t)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

Exercice n° 4

Restitution organisée de connaissances (Antilles–Guyane, juin 2010)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 1 cm.

Pour $M \neq \Omega$, on rappelle que le point M' est l'image du point M par la rotation r de centre Ω et d'angle de mesure θ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Omega M' & = & \Omega M & (1) \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\ ;\ \overrightarrow{\Omega M'}\right) & = & \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k \in \mathbb{Z}) & (2) \end{array}\right.$$

1. Soient z, z' et ω les affixes respectives des points M, M' et Ω.
Traduire le relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.

2. En déduire l'expression de z' en fonction de z, θ et ω

Exercice n° 5

Restitution organisée de connaissances 'spécialité) (La Réunion, juin 2010)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives $a,\ b,\ c$.
On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C.

On rappelle que $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \arg(b-a) \quad [2\pi]$.

Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi]$.

Exercice n° 6

Restitution organisée de connaissances (La Réunion, juin 2010)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Prérequis :

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude directe du plan est de la forme $z' = \alpha z + \beta$, où α est un nombre complexe non nul et β est un nombre complexe.
Soient A, B, C, D quatre points du plan ; on suppose d'une part que les points A et C sont distincts et d'autre part que les points B et D sont distincts.
Démontrer qu'il existe une unique similitude directe s telle que $s(A) = B$ et $s(C) = D$.

Exercice n° 7

Restitution organisée de connaissances (Métropole, juin 2010)

Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

Définition : deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.

Propriété 1 : si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant u_n$.

Propriété 2 : toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

Exercice n° 8

Restitution organisée de connaissances (Métropole, juin 2010)

Prérequis

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + b\text{i}$ où a et b sont deux nombre réels.
On note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - b\text{i}$.

Questions

1. Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, et tout nombre complexe z, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

Bac 2009

Exercice n° 9

Question de cours (Amérique du Sud, novembre 2008)

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, positive sur $[1\ ;\ +\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y,\quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif} x,\ [\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \\ \ln(2) \approx 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{cases}$$

1. On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

a. Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0\ ;\ +\infty[$.

b. En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

c. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2. Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction f_n.

Exercice n° 10

Restitution organisée de connaissances (Amérique du Nord, juin 2009)

On supposera connus les résultats suivants :
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a\ ;\ b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels α et β, $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice n° 11

Restitution organisée de connaissances (Centres étrangers, juin 2009)

Prérequis : On rappelle que deux évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Soient A et B deux évènements associés à une expérience aléatoire

1. Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$.

2. Démontrer que, si les évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les évènements $\overline{A}$ et B le sont également.

Exercice n° 12

Cette question est une restitution organisée de connaissances (Métropole, juin 2009)

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leqslant n$ alors $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leqslant p \leqslant n$ on a : $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p-1} + \dbinom{n-1}{p}$.

Bac 2008

Exercice n° 13

Question de cours (Antilles–Guyane, septembre 2007)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soient u et v deux fonctions continues, dérivables sur I telles que u' et v' soient continues sur I.
Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ de I.

Exercice n° 14

Restitution organisée de connaissances (Métropole, La Réunion, septembre 2007)

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si vraie ou fausse et justifier.
Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

- P : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$.
- Q : Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$.

Exercice n° 15

Question de cours (Amérique du Sud, novembre 2007)
Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.

On suppose connu le résultat suivant :
La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.
Soit a un réel donné.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.
2. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$. Montrer que h est une fonction constante.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

Exercice n° 16

Question de cours (Nouvelle–Calédonie spécialité novembre 2007)

1. Soit f une fonction réelle définie sur $[a\ ;\ +\infty[$. Compléter la phrase suivante :
« On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si ... »
2. Démontrer le théorème « des gendarmes » : soient f, g et h trois fonctions définies sur $[a\ ;\ +\infty[$ et ℓ un nombre réel. Si g et h ont pour limite commune ℓ quand x tend vers $+\infty$, et si pour tout x assez grand $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, alors la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à ℓ.

Exercice n° 17

Question de cours (Nouvelle–Calédonie mars 2008)

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?
Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

Exercice n° 18

Démonstration de cours (Pondichéry avril 2008)

Démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z - \omega).$$

Exercice n° 19

Démonstration de cours (Liban mai 2008)

Prérequis : définition d'une suite tendant vers plus l'infini.
« *une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A* ».
Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Exercice n° 20

Restitution organisée de connaissances (Asie juin 2008)

On suppose connu le résultat suivant : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
Démontrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.

Exercice n° 21

Restitution organisée de connaissances (Centres étrangers juin 2008)

Prérequis : on rappelle que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

1. Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

Exercice n° 22

Restitution organisée de connaissances (Métropole juin 2008)

On rappelle que pour tout $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
La fonction R définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
2. Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t+s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.

Exercice n° 23

Restitution organisée de connaissances (Polynésie juin 2008)

On supposera connus les résultats suivants :
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a \quad ; \quad b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels α et β $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\ \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a \quad ; \quad b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a \ ; \ b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Bac 2007

Exercice n° 24

Question de cours (France, septembre 2006)

Pré-requis

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle.

1. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle (E'$_\lambda$) : $z' = -(\lambda z + 1)$ telle que $z(0) = 1$.
2. Donner l'expression de cette fonction que l'on notera z_0.

Exercice n° 25

Question de cours (Amérique du Sud, novembre 2006)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

On rappelle que : « Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = (\vec{u}, \vec{w})$ ».

Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

1. Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)$.
2. Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$

Exercice n° 26

Question de cours (Nouvelle-Calédonie, mars 2007)

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ et un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Exercice n° 27

Question de cours (Antilles-Guyane, juin 2007)

Prérequis : positivité et linéarité de l'intégrale.

Soient a et b deux réels d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur I telles que pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) \geqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice n° 28

Question de cours (Asie, juin 2007)

On rappelle que lorsque t tend vers $+\infty$, alors $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ tend vers $+\infty$.

Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Exercice n° 29

Restitution organisée de connaissances. (Amérique du Nord, juin 2007)

L'objet de cette question est de démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

On supposera connus les résultats suivants :

- la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;
- $\mathrm{e}^0 = 1$;
- pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x > x$.
- Soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A~;~+\infty[$ où A est un réel positif.
  Si pour tout x de $[A~;~+\infty[$, $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ et si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

1. On considère la fonction g définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.
Montrer que pour tout x de $[0~;~+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.

2. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

Exercice n° 30

Restitution organisée de connaissances. (Centres étrangers, juin 2007)

1. Démontrer qu' un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.

3. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Exercice n° 31

Restitution organisée de connaissances. (France, juin 2007)

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a~;~b]$.

Soient les deux intégrales définies par

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x \quad \text{et } \mathrm{J} = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x.$$

1. Démontrer que $1 = -\mathrm{J}$ et que $\mathrm{I} = \mathrm{J} + \mathrm{e}^{\pi} + 1$.

2. En déduire les valeurs exactes de I et de J.

Exercice n° 32

Restitution organisée de connaissances. (La Réunion, juin 2007)

On suppose connue la propriété :

« Pour tout couple $(x~;~y)$ de nombres réels strictement positifs, on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. »

En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a :

$$\ln\left(\sqrt{m}\right) = \frac{1}{2}\ln(m).$$

Bac 2006

Exercice n° 33

Question de cours (Nouvelle-Calédonie, novembre 2005)
Soient A et B deux événements indépendants. Démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice n° 34

Question de cours (Amérique du Nord, juin 2006)
Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\overline{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.
Démontrer que :
- pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.
- pour tout nombre complexe z non nul, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

Exercice n° 35

Question de cours (France 15 juin 2006)
On prend comme pré-requis les résultats suivants :
– Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif
– Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul d'affixe z on a : $\arg(z) = \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{w}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif

1. Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.
2. Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives $a,\ b,\ c$, on a : $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

Exercice n° 36

Restitution organisée de connaissances. (Pondichéry 3 avril 2006)
L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Partie A (cette partie constitue une restitution organisée de connaissances) Soit a, b, c et d des réels tels que $(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.
On considère le point I de coordonnées $(x_I,\ y_I,\ z_I)$ et le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(a,\ b,\ c)$.
Le but de cette partie est de démontrer que la distance de I au plan $\mathcal{P}$ est égale à $\dfrac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

1. Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
Déterminer, en fonction de $a,\ b,\ c,\ x_I,\ y_I$ et z_I, un système d'équations paramétriques de Δ.
2. On note H le point d'intersection de Δ et $\mathcal{P}$.
   a. Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IH} = k\overrightarrow{n}$.
   b. Déterminer l'expression de k en fonction de $a,\ b,\ c,\ d,\ x_I,\ y_I$ et z_I.
   c. En déduire que $IH = \dfrac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Exercice n° 37

Restitution organisée de connaissances. (Antilles-Guyane, juin 2006)

Pré-requis :

– la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sa fonction dérivée est la fonction inverse $\left(x \mapsto \dfrac{1}{x}\right)$.

– $\ln(1) = 0$

Démontrer que pour tous réels strictement positifs a et x,

$$\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x).$$

Utiliser le résultat précédent pour démontrer que

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \text{ et que } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Exercice n° 38

Restitution organisée de connaissances. (Asie juin 2006)

Prérequis : On sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z').$$

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

Exercice n° 39

Restitution organisée de connaissances. (Centres étrangers, juin 2006)

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :

i. Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} |z| & = & r \\ \arg z & = & \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ r & > & 0 \end{array}\right.$$

ii. Pour tous nombres réels a et b :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos(a+b) & = & \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ \sin(a+b) & = & \sin a\cos b + \sin b\cos a \end{array}\right.$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Démontrer les relations :

$$|z_1z_2| = |z_1| \times |z_2| \text{ et } \arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Bac 2005

Exercice n° 40

Restitution organisée de connaissances (La Réunion, juin 2005)
On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(\mathrm{C}) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} f(-x)f'(x) & = & 1 \text{ pour tout nombre réel } x, \\ f(0) & = & -4 \end{array} \right.$$

(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de trouver cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x)f(x)$.

a. Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la fonction dérivée de la fonction g.

c. En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.

d. On considère l'équation différentielle (E) $y' = \dfrac{1}{16}y$. Montrer que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.

2. Question de cours

a. On sait que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \longmapsto K\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque.

b. Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.

3. Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.

Exercice n° 41

Question de cours (Polynésie, juin 2005)
Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.
« Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».
Démontrer le théorème suivant : *une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.*

Exercice n° 42

Restitution organisée de connaissances. (France juin 2005)
Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.
Partie A : question de cours
On suppose connus les résultats suivants :

① deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

② si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$;

③ toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

Partie B

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

Exercice n° 43

On considère la fonction f, définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t}.$$

1. **a.** Justifier la continuité de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

   b. Montrer que f est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

2. **Restitution organisée de connaissances. (Pondichéry 31 mars 2005)**

   On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.

   Pour tout réel x_0 de $[1\ ;\ +\infty[$, on note $\mathcal{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$.

   On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ est une primitive de f.

   a. Que vaut $\mathcal{A}(1)$?

   b. Soit x_0 un réel quelconque de $[1\ ;\ +\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

   $$f(x_0) \leqslant \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0 + h).$$

   c. Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ et tel que $x_0 + h \geqslant 1$?

   d. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction $\mathcal{A}$ ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction $\mathcal{A}$.

   e. Conclure.