Recueil d'annales en Mathématiques

Terminale S – Enseignement de spécialité

Arithmétique

Frédéric Demoulin[1]

Dernière révision : 20 février 2010

Document diffusé via le site www.bacamaths.net de Gilles Costantini[2]

1. frederic.demoulin (chez) voila.fr
2. gilles.costantini (chez) bacamaths.net

Tableau récapitulatif des exercices

⋆ indique que cette notion a été abordée dans l'exercice

N°	Lieu	Année	ROC	QCM VF	Divisi-bilité	Congru-ences	PGCD	PPCM	Nombres premiers	Équations de Diophante	Géo-métrie
Session 2009											
1	Nouvelle-Calédonie	nov 2009			⋆	⋆				⋆	
2	France / La Réunion	sept 2009			⋆		⋆				
3	Amérique du Nord	juin 2009			⋆	⋆				⋆	
4	Asie	juin 2009			⋆	⋆				⋆	
5	France	juin 2009			⋆	⋆				⋆	
6	Liban	juin 2009			⋆	⋆				⋆	
Session 2008											
7	Antilles-Guyane	juin 2008			⋆	⋆				⋆	
8	Asie	juin 2008			⋆	⋆	⋆			⋆	
9	Nouvelle-Calédonie	mars 2008	⋆		⋆	⋆					
Session 2007											
10	Liban	juin 2007		⋆	⋆	⋆	⋆		⋆		⋆
11	Polynésie	juin 2007			⋆	⋆					⋆
Session 2006											
12	Nouvelle-Calédonie	mars 2007			⋆	⋆				⋆	
13	Amérique du Sud	nov 2006	⋆			⋆					
14	Asie	juin 2006			⋆	⋆					
15	France	juin 2006	⋆			⋆				⋆	
Session 2005											
16	France	sept 2005		⋆		⋆			⋆	⋆	⋆
17	Antilles-Guyane	juin 2005			⋆	⋆					
18	Centres étrangers	juin 2005				⋆			⋆		
19	La Réunion	juin 2005			⋆		⋆				
20	Liban	juin 2005				⋆	⋆		⋆	⋆	
21	Polynésie	juin 2005				⋆	⋆				
22	Inde	Avril 2005				⋆				⋆	
Session 2004											
23	Nouvelle-Calédonie	nov 2004			⋆				⋆		
24	Centres étrangers	juin 2004			⋆				⋆		
25	France	juin 2004			⋆		⋆				
26	La Réunion	juin 2004			⋆	⋆			⋆		
Session 2003											
27	Nouvelle-Calédonie	nov 2003			⋆	⋆			⋆		
28	Antilles-Guyane	sept 2003			⋆					⋆	
29	France	sept 2003			⋆	⋆	⋆				
30	Polynésie	sept 2003			⋆	⋆			⋆		
31	Antilles-Guyane	juin 2003			⋆				⋆		
32	Asie	juin 2003			⋆		⋆				
33	France	juin 2003			⋆	⋆					
34	Liban	mai 2003				⋆	⋆		⋆		
Session 2002											
35	Amérique du Sud	déc 2002			⋆		⋆				
36	Nouvelle-Calédonie	nov 2002					⋆		⋆		
37	France	sept 2002								⋆	
38	Asie	juin 2002			⋆				⋆		
39	Centres étrangers	juin 2002							⋆		
40	France	juin 2002								⋆	
41	Polynésie	juin 2002			⋆		⋆				
42	Amérique du Nord	mai 2002			⋆					⋆	
43	Inde	mai 2002					⋆				

N°	Lieu	Année	ROC	QCM VF	Divisi-bilité	Congru-ences	PGCD	PPCM	Nombres premiers	Équations de Diophante	Géo-métrie
Session 2001											
44	Amérique du Sud	déc 2001			⋆		⋆				
45	Nouvelle-Calédonie	déc 2001			⋆		⋆		⋆		
46	Antilles-Guyane	sept 2001			⋆		⋆	⋆			
47	France	sept 2001					⋆			⋆	
48	Amérique du Nord	juin 2001			⋆					⋆	
49	Antilles-Guyane	juin 2001					⋆	⋆			
50	Centres étrangers	juin 2001								⋆	
51	France	juin 2001			⋆					⋆	
52	Inde	juin 2001			⋆		⋆			⋆	
53	Nouvelle-Calédonie	juin 2001					⋆	⋆			
54	Polynésie	juin 2001								⋆	
Session 2000											
55	Antilles-Guyane	sept 2000								⋆	
56	Asie	juin 2000								⋆	
57	Inde	juin 2000			⋆	⋆					
58	La Réunion	juin 2000			⋆		⋆				
59	Liban	juin 2000			⋆						
60	Polynésie	juin 2000			⋆		⋆			⋆	
Session 1999											
61	Nouvelle-Calédonie	déc 1999					⋆				
62	Amérique du Sud	nov 1999			⋆		⋆			⋆	
63	Inde	nov 1999					⋆				
64	Amérique du Nord	juin 1999			⋆						
65	Antilles-Guyane	juin 1999								⋆	
66	Asie	juin 1999								⋆	
67	Centres étrangers	juin 1999								⋆	
68	France	juin 1999			⋆		⋆		⋆	⋆	
69	Liban	juin 1999			⋆		⋆				
70	Polynésie	juin 1999			⋆						
Années 80											
71	Exercice	1982			⋆		⋆	⋆			
72	Poitiers	1982					⋆	⋆			
73	Reims	1982			⋆						
74	Antilles-Guyane	1981					⋆				
75	Besançon	1981					⋆	⋆			
76	Clermont-Ferrand	1981			⋆		⋆	⋆			
77	Lille 1	1981			⋆		⋆	⋆	⋆		
78	Lille 2	1981			⋆		⋆	⋆			
79	Lyon 1	1981					⋆	⋆		⋆	
80	Lyon 2	1981			⋆		⋆				
81	Montpellier	1981			⋆	⋆					
82	Nantes	1981			⋆		⋆			⋆	
83	Paris	1981			⋆						
84	Rennes	1981			⋆					⋆	
85	Japon	1980			⋆		⋆	⋆		⋆	
86	Nancy-Metz	1980			⋆					⋆	
87	Orléans-Tours	1980			⋆						
88	Poitiers	1980			⋆		⋆		⋆		
Années 70											
89	Bordeaux	1979					⋆	⋆			
90	Inde	1979			⋆						
91	Montpellier	1979			⋆				⋆		
92	Besançon	1978			⋆						
93	Centres étrangers I	1978			⋆				⋆		
94	Montpellier	1978			⋆				⋆		
95	Nantes	1978			⋆		⋆	⋆	⋆		
96	Nice	1978			⋆	⋆	⋆	⋆		⋆	
97	Reims	1978			⋆				⋆	⋆	

N°	Lieu	Année	ROC	QCM VF	Divisi-bilité	Congru-ences	PGCD	PPCM	Nombres premiers	Équations de Diophante	Géo-métrie
98	Strasbourg	1978			⋆						
99	Aix-en-Provence	1977			⋆		⋆				
100	Caen	1977			⋆		⋆	⋆			
101	Lyon 1	1977			⋆		⋆	⋆			
102	Lyon 2	1977			⋆	⋆					
103	Aix-Marseille	1976			⋆	⋆					
104	Antilles-Guyane	1976			⋆	⋆					
105	Caen	1976			⋆		⋆		⋆	⋆	
106	Dijon	1976			⋆		⋆		⋆		
107	Nancy	1976			⋆						
108	Poitiers	1976			⋆		⋆				
109	Rennes	1976				⋆				⋆	
110	Rouen	1976			⋆		⋆				
111	Dijon	1973			⋆				⋆		
112	Aix-en-Provence 1	1970			⋆	⋆					
113	Aix-en-Provence 2	1970			⋆	⋆					
114	Bordeaux 1	1970			⋆				⋆		
115	Bordeaux 2	1970			⋆	⋆					
116	Cambodge et Laos	1970			⋆	⋆					
117	Clermont-Ferrand	1970			⋆		⋆	⋆			
118	Inde	1970			⋆		⋆		⋆		
119	Limoges	1970			⋆						
120	Lyon	1970			⋆	⋆					
121	Montpellier	1970			⋆	⋆					
122	Nancy	1970			⋆		⋆	⋆			
123	Nantes	1970				⋆					
124	Orléans 1	1970			⋆		⋆				
125	Orléans 2	1970									
126	Paris	1970			⋆		⋆				
127	Poitiers 1	1970			⋆						
128	Poitiers 2	1970			⋆						
129	Rennes 1	1970			⋆						
130	Rennes 2	1970			⋆						
131	Rouen	1970			⋆	⋆					
132	Strasbourg 1	1970					⋆	⋆			
133	Strasbourg 2	1970			⋆	⋆					
134	Strasbourg 3	1970			⋆	⋆					
135	Toulouse 1	1970			⋆				⋆		
136	Toulouse 2	1970			⋆	⋆					
137	Toulouse 3	1970			⋆	⋆					
138	Toulouse 4	1970			⋆	⋆					

Session 2009

Exercice 1 Nouvelle – Calédonie, novembre 2009 (5 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation notée (E) :

$$3x+7y=10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs}$$

   a. Déterminer un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tels que $3u+7v=1$.
   En déduire une solution particulière $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ de l'équation (E).

   b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions de (E).

2. On considère l'équation notée (G) :

$$3x^2+7y^2=10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs}$$

   a. Montrer que $100 \equiv 2\ (7)$.
   Démontrer que si $(x\ ;\ y)$ est solution de (G), alors $3x^2 \equiv 2^n\ (7)$.

   b. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7.							

   c. Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
   En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

Exercice 2 France / La Réunion, septembre 2009 (5 points)

1. a. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2 009 par 11.

   b. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.

   c. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2\,009}+2\,009$ par 11.

2. On désigne par p un nombre entier naturel. On considère, pour tout entier naturel non nul n, le nombre $A_n=2^n+p$.
   On note d_n le PGCD de A_n et A_{n+1}.

   a. Montrer que d_n divise 2^n.

   b. Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p. Justifier.

   c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer la parité de d_n en fonction de celle de p.
   En déduire le PGCD de $2^{2\,009}+2\,009$ et $2^{2\,010}+2\,009$.

Exercice 3 Amérique du Nord, juin 2009 (5 points)

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1~;~46]$.

1. On considère l'équation :
$$(E)~:~23x + 47y = 1$$
où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Donner une solution particulière $\left(x_0~;~y_0\right)$ de (E).
   b. Déterminer l'ensemble des couples $(x~;~y)$ solutions de (E).
   c. En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que $23x \equiv 1~(47)$.
2. Soient a et b deux entiers relatifs.
   a. Montrer que si $ab \equiv 0~(47)$, alors $a \equiv 0~(47)$ ou $b \equiv 0~(47)$.
   b. En déduire que si $a^2 \equiv 1~(47)$, alors $a \equiv 1~(47)$ ou $a \equiv -1~(47)$.
3. a. Montrer que pour tout entier p de A, il existe un entier relatif q tel que $p \times q \equiv 1~(47)$.
   Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté $inv(p)$, appartenant à A tel que $p \times inv(p) \equiv 1~(47)$.
   Par exemple :
   $inv(1) = 1$ car $1 \times 1 \equiv 1~(47)$, $inv(2) = 24$ car $2 \times 24 \equiv 1~(47)$, $inv(3) = 16$ car $3 \times 16 \equiv 1~(47)$.
   b. Quels sont les entiers p de A qui vérifient $p = inv(p)$?
   c. Montrer que $46! \equiv -1~(47)$.

Exercice 4 Asie, juin 2009 (5 points)

1. On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que :
$$\begin{cases} N \equiv 5~(13) \\ N \equiv 1~(17) \end{cases}$$
   a. Vérifier que 239 est solution de ce système.
   b. Soit N un entier relatif solution de ce système.
   Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.
   c. Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.
   d. En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$.
   e. Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18~(221)$ et $\begin{cases} N \equiv 5~(13) \\ N \equiv 1~(17) \end{cases}$.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   a. Existe-t-il un entier naturel k tel que $10^k \equiv 1~(17)$?
   b. Existe-t-il un entier naturel l tel que $10^l \equiv 18~(221)$?

Exercice 5 France, juin 2009 (5 points)

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. a. Déterminer l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ de nombres entiers relatifs, solution de l'équation :

$$(E)\ :\ 8x-5y=3$$

   b. Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple $(p\,;\,q)$ de nombres entiers vérifiant $m=8p+1$ et $m=5q+4$.
   Montrer que le couple $(p\,;\,q)$ est solution de l'équation (E) et en déduire que $m\equiv 9\ (40)$.

   c. Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2000.

2. a. Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k}\equiv 1\ (7)$.

   b. Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a\neq 0$.
   On considère le nombre $N=a\times 10^3+b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N=\overline{a00b}$.
   On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

   a. Vérifier que $10^3\equiv -1\ (7)$.

   b. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Exercice 6 Liban, juin 2009 (5 points)

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3\equiv 2\,009\ (10\,000)$.

Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,009^2$ par 16.
2. En déduire que $2\,009^{8\,001}\equiv 2\,009\ (16)$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=2\,009^2-1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=(u_n+1)^5-1$.

1. a. Démontrer que u_0 est divisible par 5.

   b. Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n :

$$u_{n1}=u_n\left[u_n^4+5\left(u_n^3+2u_n^2+2u_n+1\right)\right]$$

   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.

2. a. Vérifier que $u_3=2\,009^{250}-1$ puis en déduire que $2\,009^{250}\equiv 1\ (625)$.

   b. Démontrer alors que $2\,009^{8\,001}\equiv 2\,009\ (625)$.

Partie C

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2\,009^{8\,001}-2\,009$ est divisible par $10\,000$.
2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009.

Session 2008

Exercice 7 Antilles – Guyane, juin 2008 (5 points)

Partie A

On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-7\ ;\ -3)$ est solution de (E).
2. Résoudre alors l'équation (E).
3. En déduire le couple d'entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ solution de (E) tel que $0 \leqslant u \leqslant 25$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :
– on calcule $11x + 8$;
– on calcule le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, que l'on appelle y.
x est alors « codé » par y.
Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $11 \times 11 + 8 = 129$ or $129 \equiv 25\ (26)$; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre Z.
La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1. Coder la lettre W.
2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.
   a. Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j, on a :
   $$11x \equiv j\ (26) \text{ équivaut à } x \equiv 19j\ (26)$$
   b. En déduire un procédé de décodage.
   c. décoder la lettre W.

Exercice 8 Asie, juin 2008 (5 points)

Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthonormal, dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ sont des entiers vérifiant les conditions : $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant b$. On note $R_{a,b}$ ce réseau.
Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

Partie A – Représentation graphique de quelques ensembles

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera complété sur la feuille annexe à rendre avec la copie.
Représenter graphiquement les points $M(x\ ;\ y)$ du réseau $R_{8,8}$ vérifiant :

1. $x \equiv 2$ (3) et $y \equiv 1$ (3), sur le graphique 1 en fin d'énoncé.
2. $x + y \equiv 1$ (3), sur le graphique 2 en fin d'énoncé.
3. $x \equiv y$ (3), sur le graphique 3 en fin d'énoncé.

Partie B – Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) : $7x - 4y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0\ ;\ y_0)$ solution de l'équation (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
3. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution $(x\ ;\ y)$ pour laquelle le point $M(x\ ;\ y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4,7}$.

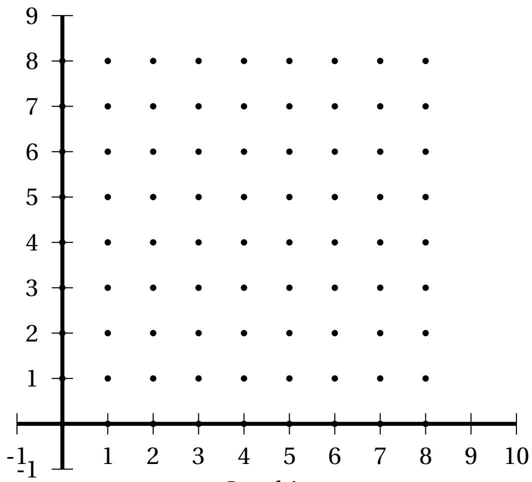
Partie C – Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau

Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale $[OA]$ du réseau $R_{a,\,b}$, avec $O(0\ ;\ 0)$ et $A(a\ ;\ b)$.

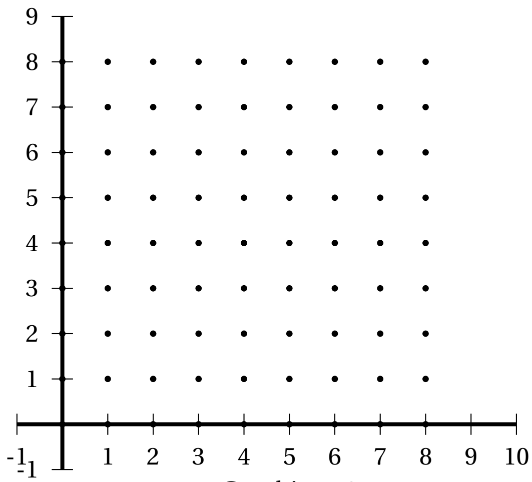
1. Démontrer que les points du segment $[OA]$ sont caractérisés par les conditions :

$$0 \leqslant x \leqslant a\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant b\ ;\ ay = bx$$

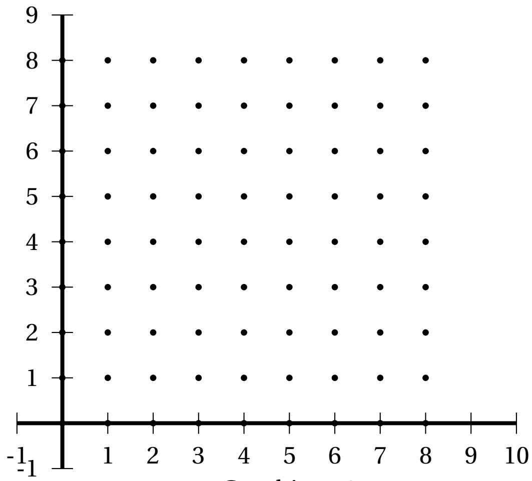
2. Démontrer que si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment $[OA]$ appartenant au réseau $R_{a,\,b}$.
3. Démontrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment $[OA]$ contient au moins un autre point du réseau (on pourra considérer le pgcd d des nombres a et b et poser $a = da'$ et $b = db'$).



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

Exercice 9 Nouvelle – Calédonie, mars 2008 (5 points)

Partie A – Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?
Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

Partie B

On note 0, 1, 2, ..., 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple :

$$\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1\,711 \text{ en base } 10$$

1. a. Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 :
$$N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$$
Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.
   b. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 :
$$N_2 = 1\,131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$$
Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :

$$N = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}^{12}$$

2. a. Démontrer que $N \equiv a_0$ (3). En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.
   b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.
3. a. Démontrer que $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0$ (11). En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.
   b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.
4. Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.

Session 2007

Exercice 10 Liban, juin 2007 (5 points)

Pour chacune des 5 *propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.*

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.
   On considère la transformation du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z' définie par :
   $$z' = 2\mathrm{i}z + 1$$
   Proposition 1 : « cette transformation est la similitude directe de centre A d'affixe $\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}\mathrm{i}$, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de rapport 2 ».
2. Dans l'espace muni du repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$, on note S la surface d'équation $z = x^2 + 2x + y^2 + 1$.
   Proposition 2 : « la section de S avec le plan d'équation $z = 5$ est un cercle de centre A de coordonnées $(-1\,;0\,;5)$ et de rayon 5 ».
3. **Proposition 3 :** « $5^{750} - 1$ est un multiple de 7 ».
4. **Proposition 4 :** « si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7, alors le PGCD de $3n+4$ et de $4n+3$ est égal à 7 ».
5. Soient a et b deux entiers naturels.
   Proposition 5 : « s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 2$, alors le PGCD de a et b est égal à 2 ».

Exercice 11 Polynésie, juin 2007 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$. on considère les points $A(1\,;3\,;2)$, $B(4\,;6\,;-4)$ et le cône Γ d'axe $\left(O\,;\,\vec{k}\right)$, de sommet O et contenant le point A.

Partie A

1. Montrer qu'une équation de Γ est $x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2}z^2$.
2. Soit $\mathscr{P}$ le plan parallèle au plan (xOy) et contenant le point B.
   a. Déterminer une équation de $\mathscr{P}$.
   b. Préciser la nature de l'intersection $\mathscr{C}_1$ de $\mathscr{P}$ et de Γ.
3. Soit $\mathscr{Q}$ le plan d'équation $y = 3$. On note $\mathscr{C}_2$ l'intersection de Γ et de $\mathscr{Q}$.
   Sans justification, reconnaître la nature de $\mathscr{C}_2$ parmi les propositions suivantes :
   – deux droites parallèles ;
   – deux droites sécantes ;
   – une parabole ;
   – une hyperbole ;
   – un cercle.

Partie B

Soient x, y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées (x, y, z). Les ensembles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont les sections définies dans la partie A.

1. On considère l'équation $(E)\ :\ x^2+y^2=40$ où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Résoudre l'équation (E).
   b. En déduire l'ensemble des points de $\mathscr{C}_1$ dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
2. a. Démontrer que si le point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ où x, y et z désignent des entiers relatifs est un point de Γ, alors $z$est divisible par 2 et x^2+y^2 est divisible par 10.
   b. Montrer que si M est un point de $\mathscr{C}_2$, intersection de Γ et de $\mathscr{Q}$, alors $x^2 \equiv 1\ (10)$.
   c. Résoudre, dans l'ensemble des entiers relatifs, l'équation $x^2 \equiv 1\ (10)$.
   d. Déterminer un point de $\mathscr{C}_2$, distinct de A, dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Exercice 12 Nouvelle – Calédonie, mars 2007 (5 points)

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ 24\ ;\ 25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $(an+b)$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P avec $a=2$ et $b=3$, on procède de la manière suivante :
étape 1 : on lui associe l'entier $n=15$.
étape 2 : le reste de la division de $2\times 15+3=33$ par 26 est 7.
étape 3 : on associe 7 à H. Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend $a=0$?
2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a=13$.
3. *Dans toute la suite de l'exercice*, on prend $a=5$ et $b=2$.
   a. On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p. Montrer, que si $5n+2$ et $5p+2$ ont le même reste dans la division par 26, alors $n-p$ est un multiple de 26. En déduire que $n=p$.
   b. Coder le mot AMI.
4. On se propose de décoder la lettre E.
   a. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5n-26y=2$, où y est un entier.
   b. On considère l'équation $5x-26y=2$, avec x et y entiers relatifs.
      i. Donner une solution particulière de l'équation $5x-26y=2$.
      ii. Résoudre alors l'équation $5x-26y=2$.
      iii. En déduire qu'il existe un unique couple $(x\ ;\ y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \leqslant x \leqslant 25$.
   c. Décoder alors la lettre E.

Exercice 13 Amérique du Sud, novembre 2006 (5 points)

Rappel : pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b\ (7)$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a=b+7k$.

1. *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances*
   a. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.
   Démontrer que si $a \equiv b$ (7) et $c \equiv d$ (7), alors $ac \equiv bd$ (7).
   b. En déduire que pour a et b entiers relatifs non nuls, si $a \equiv b$ (7), alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n$ (7).
2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1$ (7).
3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.
   a. Montrer que : $a^6 \equiv 1$ (7).
   b. On appelle *ordre* de a (7), et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1$ (7).
   Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1$ (7).
   En déduire que k divise 6.
   Quelles sont les valeurs possibles de k ?
   c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.
4. À tout entier naturel n, on associe le nombre :

$$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$$

Montrer que $A_{2\,006} \equiv 6$ (7).

Session 2006

Exercice 14 Asie, juin 2006 (5 points)

Étant donné un entier naturel $n \geqslant 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels $x,\ y$ et z tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1\ (2^n)$$

Partie A – Étude de deux cas particuliers

1. Dans cette question on suppose $n = 2$. Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la condition précédente.
2. Dans cette question, on suppose $n = 3$.
   a. Soit m un entier naturel. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant le reste r de la division euclidienne de m par 8 et le reste R de la division euclidienne de m^2 par 8.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

   b. Peut-on trouver trois entiers naturels $x,\ y$ et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7\ (8)$?

Partie B – Étude du cas général où $n \geqslant 3$

Supposons qu'il existe trois entiers naturels $x,\ y$ et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1\ (2^n)$.

1. Justifier le fait que les trois entiers naturels x, y et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.
2. On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. On pose alors $x = 2q$, $y = 2r$, $z = 2s+1$ où q, r et s sont des entiers naturels.
   a. Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1\ (4)$.
   b. En déduire une contradiction.
3. On suppose que x, y et z sont impairs.
   a. Prouver que, pour tout entier naturel k non nul, $k^2 + k$ est divisible par 2.
   b. En déduire que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3\ (8)$.
   c. Conclure.

Exercice 15 France, juin 2006 (5 points)

Partie A – Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :

$$(S)\quad \begin{cases} n \equiv 13\ (19) \\ n \equiv 6\quad (12) \end{cases}$$

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$ (on ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
   Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).
2. a. Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à :
   $$\begin{cases} n \equiv n_0 \ (19) \\ n \equiv n_0 \ (12) \end{cases}$$
   b. Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0 \ (19) \\ n \equiv n_0 \ (12) \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0 \ (12 \times 19)$.
3. a. Trouver un couple $(u\,;\,v)$ solution de l'équation $19u+12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.
   b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2.b).
4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
   On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

Session 2005

Exercice 16 France, septembre 2005 (5 points)

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte 1 *point. Chaque réponse fausse enlève* 0,5 *point. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.*

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation : $x^2 - x + 4 \equiv 0$ (6).
   A : toutes les solutions sont des entiers pairs.
   B : il n'y a aucune solution.
   C : les solutions vérifient $x \equiv 2$ (6).
   D : les solutions vérifient $x \equiv 2$ (6) ou $x \equiv 5$ (6).
2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.
   A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\ ;\ y) = (34k - 7\ ;\ 5 - 24k),\ k \in \mathbb{Z}$.
   B : L'équation (E) n'a aucune solution.
   C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\ ;\ y) = (17k - 7\ ;\ 5 - 12k),\ k \in \mathbb{Z}$.
   D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\ ;\ y) = (-7k\ ;\ 5k),\ k \in \mathbb{Z}$.
3. On considère les deux nombres $n = 1\,789$ et $p = 1\,789^{2\,005}$. On a alors :
   A : $n \equiv 4$ (17) et $p \equiv 0$ (17).
   B : p est un nombre premier.
   C : $p \equiv 4$ (17).
   D : $p \equiv 1$ (17).
4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse $[AB]$ si et seulement si le point M d'affixe z est tel que :
   A : $z = \dfrac{b - \mathrm{i}a}{1 - \mathrm{i}}$.
   C : $a - z = \mathrm{i}(b - z)$.
   B : $z - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(b - a)$.
   D : $b - z = \dfrac{\pi}{2}(a - z)$.
5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B ; on note I le milieu du segment $[AB]$. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre 1.
   A : $h \circ g \circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.
   B : $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment $[AB]$.
   C : $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.
   D : $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 17 Antilles-Guyane, juin 2005 (5 points)

1. a. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.
   b. Démontrer alors que $2\,005^{2\,005} \equiv 7$ (9).
2. a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $10^n \equiv 1$ (9).
   b. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres.
   Démontrer la relation suivante : $N \equiv S$ (9).
   c. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.
3. On suppose que $A = 2\,005^{2\,005}$; on désigne par :
   – B la somme des chiffres de A ;

- C la somme des chiffres de B ;
- D la somme des chiffres de C.

a. Démontrer la relation suivante : $A \equiv D$ (9).

b. Sachant que $2005 < 10000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que $B \leqslant 72\,180$.

c. Démontrer que $C \leqslant 45$.

d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

e. Démontrer que $D = 7$.

Exercice 18 Centres étrangers, juin 2005 (5 points)

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier.
On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.
3. Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier.
On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a ; b)$ vérifiant la relation (E) :

$$a^2 - 250\,507 = b^2$$

1. Soit X un entier naturel.

   a. Donner, dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.

   b. Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles module 9 de a^2.

   c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.

2. Justifier que si le couple $(a ; b)$ vérifie la relation (E), alors $a \geqslant 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501 ; b)$.
3. On suppose que le couple $(a ; b)$ vérifie la relation (E).

   a. Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.

   b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505+9k ; b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit de deux facteurs.
2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?
3. Cette écriture est-elle unique ?

Exercice 19 La Réunion, juin 2005 (5 points)

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :
« étant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si PGCD$(a\,;\,b) = 1$, alors PGCD$(a^2\,;\,b^2) = 1$ ».
Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1. Démontrer que, pour tout $n > 0$, on a : $S_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
2. Étude du cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$.
   a. Démontrer que PGCD $(S_{2k}\,;\,S_{2k+1}) = (2k+1)^2$PGCD $\left(k^2\,;\,(k+1)^2\right)$.
   b. Calculer PGCD$(k\,;\,k+1)$.
   c. Calculer PGCD$(S_{2k}\,;\,S_{2k+1})$.
3. Étude du cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k+1$.
   a. Démontrer que les entiers $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.
   b. Calculer PGCD$(S_{2k+1}\,;\,S_{2k+2})$.
4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice 20 Liban, juin 2005 (5 points)

1. On considère l'équation $(E)\ :\ 109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Déterminer le PGCD de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?
   b. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141+226k\ ;\ 68+109k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.
   En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1 + 226e$ (on précisera les valeurs des entiers d et e).
2. Démontrer que 227 est un nombre premier.
3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leqslant 226$.
   On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :
   à tout entier a de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.
   à tout entier a de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.
   a. Vérifier que $g[f(0)] = 0$.
   On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :
   Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1\ (p)$.
   b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1$ (227).
   c. En utilisant 1.b, en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A, $g[f(a)] = a$.
   Que peut-on dire de $f[g(a)] = a$?

Exercice 21 Polynésie, juin 2005 (5 points)

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = 14 \\ u_{n+1} & = 5u_n - 6 \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
   Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n$ (4).
   En déduire que pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2$ (4) et $u_{2k+1} \equiv 0$ (4).
3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28$ (100).
4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.
5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Exercice 22 Inde, avril 2005

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3+4\text{i}}{5}\overline{z} + \frac{1-2\text{i}}{5}$$

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.
   Démontrer que : $\begin{cases} x' = \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \dfrac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$
2. a. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   b. Quelle est la nature de l'application f ?
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M d'affixe z tels que z' soit réel.
4. On cherche à déterminer les points de $\mathcal{D}$ dont les coordonnées sont entières.
   a. Donner une solution particulière $(x_0\,;\,y_0)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.
   b. Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.
5. On considère les points M d'affixe $z = x + \text{i}y$ tels que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'.
   Déterminer les entiers y tels que $\text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

Session 2004

Exercice 23 Nouvelle-Calédonie, novembre 2004

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. a. Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$, alors les nombres a et b sont premiers entre eux.

   b. En déduire que si $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs $(a; b)$ tels que $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$. Un tel couple sera appelé solution.

   a. Déterminer a lorsque $a = b$.

   b. Vérifier que (1 ; 1), (2 ; 3) et (5 ; 8) sont trois solutions particulières.

   c. Montrer que si $(a\,;\ b)$ est solution et si $a \neq b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.

3. a. Montrer que si $(x\,;\ y)$ est une solution différente de (1 ; 1), alors $(y - x\,;\ x)$ et $(y\,;\ y + x)$ sont aussi des solutions.

   b. Déduire de 2.b trois nouvelles solutions.

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

   Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $(a_n\,;\ a_{n+1})$ est solution.

   En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice 24 Centres étrangers, juin 2004

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :
« *les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre* 1 *peuvent-ils être premiers ?* »
Pour tout entier naturel $p \geqslant 2$, on pose $N_p = 1\ldots1$ où 1 apparaît p fois.
On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \ldots + 10^0$.

1. Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, $N_4 = 1\,111$ sont-ils premiers ?

2. Prouver que $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?

3. On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier. On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul :

$$x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1\right)$$

   a. On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
   Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.

   b. On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
   Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.

   c. On suppose p non premier et on pose $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1. En déduire que N_p est divisible par N_k.

4. Énoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier. Cette condition est-elle suffisante ?

Exercice 25 France, juin 2004

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)\left(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}\right)=x^k-1$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. a. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n=dk$. Montrer que a^d-1 est un diviseur de a^n-1.

   b. Déduire de la question précédente que $2^{2\,004}-1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.

   a. On définit m' et n' par $m=dm'$ et $n=dn'$. En appliquant le théorème de Bézout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que $mu-nv=d$.

   b. On suppose u et v strictement positifs.
   Montrer que : $\left(a^m-1\right)-\left(a^{nv}-1\right)a^d=a^d-1$.
   Montrer ensuite que a^d-1 est le PGCD de $a^{mu}-1$ et de $a^{nv}-1$.

   c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le PGCD de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$.

Exercice 26 La Réunion, juin 2004

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1}-1$ est divisible par p ».

1. Soit p un nombre premier impair.

   a. Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que $2^k\equiv 1\ (p)$.

   b. Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k\equiv 1\ (p)$ et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n, alors $2^n\equiv 1\ (p)$.

   c. Soit b tel que $2^b\equiv 1\ (p)$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.
   Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n\equiv 1\ (p)$, alors b divise n.

2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A=2^q-1$. On prend pour p un facteur premier de A.

   a. Justifier que : $2^q\equiv 1\ (p)$.

   b. Montrer que p est impair.

   c. Soit b tel que $2^b\equiv 1\ (p)$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.
   Montrer, en utilisant 1. que b divise q. En déduire que $b=q$.

   d. Montrer que q divise $p-1$, puis montrer que $p\equiv 1\ (2q)$.

3. Soit $A_1=2^{17}-1$. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m+1$, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que A_1 est premier.

Session 2003

Exercice 27 Nouvelle-Calédonie, novembre 2003

1. a. Soit p un entier naturel. Montrer que l'un des trois nombres p, $p+10$ et $p+20$, et l'un seulement, est divisible par 3.
   b. Les entiers naturels a, b et c sont dans cet ordre les trois premiers termes d'une suite arithmétique de raison 10. Déterminer ces trois nombres sachant qu'ils sont premiers.
2. Soit E l'ensemble des triplets d'entiers relatifs $(u\,;\,v\,;\,w)$ tels que :

$$3u+13v+23w=0.$$

   a. Montrer que pour un tel triplet $v \equiv w \pmod 3$.
   b. On pose $v=3k+r$ et $w=3k'+r$ où k, k' et r sont des entiers relatifs et $0 \leqslant r \leqslant 2$. Montrer que les éléments de E sont de la forme :

$$(-13k-23k'-12r\,;\,3k+r\,;\,3k'+r).$$

   c. L'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine O et soit $(\mathscr{P})$ le plan d'équation $3x+13y+23z=0$. Déterminer l'ensemble des points M à coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ entières relatives appartenant au plan $(\mathscr{P})$ et situés à l'intérieur du cube de centre O, de côté 5 et dont les arêtes sont parallèles aux axes.

Exercice 28 Antilles-Guyane, septembre 2003

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x :

$$78x^3+ux^2+vx-14=0.$$

où u et v sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que $\dfrac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).
   a. Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation $14x+39y=1$.
   b. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x+39y=1$. Vérifier que le couple $(-25\,;\,9)$ est solution de cette équation.
   c. En déduire un couple $(u_0\,;\,v_0)$ solution particulière de l'équation $14u+39v=1$. Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.
   d. Déterminer, parmi les couples $(u\,;\,v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.
2. a. décomposer 78 et 14 en facteurs premiers. En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.
   b. Soit $\dfrac{p}{q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x :

$$78x^3+ux^2+vx-14=0 \quad \text{où } u \text{ et } v \text{ sont des entiers relatifs.}$$

   Montrer que si p et q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors p divise 14 et q divise 78.
   c. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

Exercice 29 France, septembre 2003

On rappelle que 2003 est un nombre premier.

1. a. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que : $123u + 2003v = 1$.
   b. En déduire un entier relatif k_0 tel que : $123k_0 \equiv 1$ [2003].
   c. Montrer que, pour tout entier relatif x,
   $$123x \equiv 456 \text{ [2003] si et seulement si } x \equiv 456k_0 \text{ [2003]}.$$
   d. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que : $123x \equiv 456$ [2003].
   e. Montrer qu'il existe un unique entier n tel que :
   $$1 \leqslant n \leqslant 2002 \text{ et } 123n \equiv 456 \text{ [2003]}.$$
2. Soit a un entier tel que : $1 \leqslant a \leqslant 2002$.
   a. Déterminer PGCD$(a\,;2003)$. En déduire qu'il existe un entier m tel que : $am \equiv 1$ [2003].
   b. Montrer que, pour tout entier b, il existe un unique entier x tel que :
   $$0 \leqslant x \leqslant 2002 \text{ et } ax \equiv b \text{ [2003]}.$$

Exercice 30 Polynésie, septembre 2003

On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.
Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1. Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.
2. En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2 - 1 = 4k(k+1)$, puis que n est divisible par 16.
3. En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n.
4. a. Soient a, b et c trois entiers naturels.
   Démontrer que si a divise c et b divise c, avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c.
   b. Déduire de ce qui précède que 240 divise n.
5. Existe-t-il quinze nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $A = p_1^4 + p_2^4 + \ldots + p_{15}^4$ soit un nombre premier ?

Exercice 31 Antilles-Guyane, juin 2003

1. a. Calculer : $\left(1+\sqrt{6}\right)^2$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^4$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^6$.
   b. Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?
2. Soit n un entier naturel non nul. On note a et b les entiers naturels tels que :
   $$\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}.$$
   a. Que valent a_1 et b_1 ? D'après les calculs de la question **1.(a)**, donner d'autres valeurs de a_n et b_n.
   b. Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   c. Démontrer que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$.
   En déduire que, que que soit n entier naturel non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.
   d. Démontrer que, si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux. En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 32 Asie, juin 2003

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par $n + 3$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.
2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(a\,;\,b) = \text{PGCD}(bc - a\,;\,b).$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(3n^3 - 11n\,;\,n + 3) = \text{PGCD}(48\,;\,n + 3).$$

4. a. Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.
   b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\dfrac{3n^3 - 11n}{n + 3}$ soit un entier naturel.

Exercice 33 France, juin 2003

Les questions **3.** *et* **4.** *sont indépendantes des questions* **1.** *et* **2.**, *seule l'équation de* (Γ) *donnée en* **1.(c)** *intervient à la question* **4.**

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$.
   a. Montrer que les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ d'équations respectives $x + y\sqrt{3} - 2z = 0$ et $2x - z = 0$ ne sont pas parallèles.
   b. Donner un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) intersection des plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$.
   c. On considère le cône de révolution (Γ) d'axe (Ox) contenant la droite (Δ) comme génératrice.
   Montrer que (Γ) a pour équation cartésienne $y^2 + z^2 = 7x^2$.
2. On a représenté sur les deux figures ci-dessous les intersections de (Γ) avec des plans parallèles aux axes de coordonnées.
   Determiner dans chaque cas une équation des plans possibles, en justifiant avec soin votre réponse.

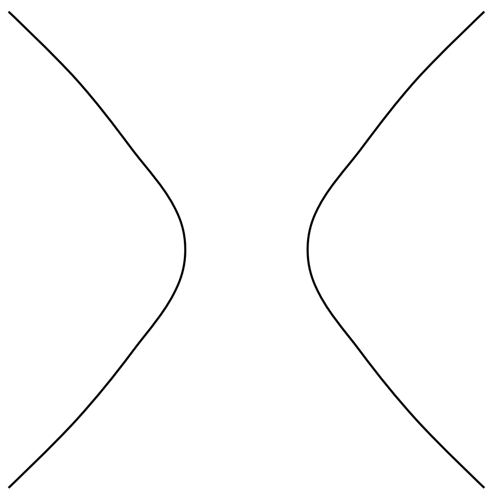


Figure 1

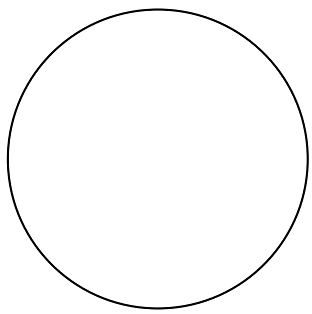


Figure 2

3. a. Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3\ [7]$, dont l'inconnue x est un entier relatif, n'a pas de solution.
   b. Montrer la propriété suivante :
   pour tous entiers relatifs a et b, si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et 7 divise b.

4. a. Soient $a,\ b$ et c des entiers relatifs non nuls. Montrer la propriété suivante :
   si le point A de coordonnées $(a\,;b\,;c)$ est un point du cône (Γ) alors $a,\ b$ et c sont divisibles par 7.
   b. En déduire que le seul point de (Γ) dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet de ce cône.

Exercice 34 Liban, mai 2003

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$x_0 = 3 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = 2x_n - 1$$
$$y_0 = 1 \quad \text{et} \quad y_{n+1} = 2y_n + 3.$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n,\ x_n = 2^{n+1} + 1$.
2. a. Calculer le PGCD de x_8 et x_9, puis celui de x_{2002} et x_{2003}. Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part, pour x_{2002} et x_{2003} d'autre part ?
   b. x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?
3. a. Démontrer que pour tout entier naturel $n,\ 2x_n - y_n = 5$.
   b. Exprimer y_n en fonction de n.
   c. En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.
   d. On note d_n le PGCD de x_n et y_n pour tout entier naturel n.
   Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Session 2002

Exercice 35 Amérique du Sud, décembre 2002

On considère la suite d'entiers définie par $a_n = 111\ldots11$ (l'écriture décimale de a_n est composée de n chiffres 1).
On se propose de montrer que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

1. En écrivant a_n sous la forme d'une somme de puissances de 10, montrer que pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$.
2. On considère la division euclidienne par 2001 : expliquer pourquoi parmi les 2 002 premiers termes de la suite, il en existe deux, au moins, ayant le même reste.
   Soit a_n et a_p deux termes de la suite admettant le même reste ($n < p$).
   Quel est le reste de la division euclidienne de $a_p - a_n$ par 2001 ?
3. Soit k et m deux entiers strictement positifs vérifiant $k < m$.
   Démontrer l'égalité : $a_m - a_n = a_{m-n} \times 10^k$.
4. Calculer le PGCD de 2001 et de 10. Montrer que si 2001 divise $a_m - a_k$, alors 2001 divise a_{m-k}.
5. Démontrer alors que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

Exercice 36 Nouvelle-Calédonie, novembre 2002

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.
On pose $S = x + y$ et $P = xy$.

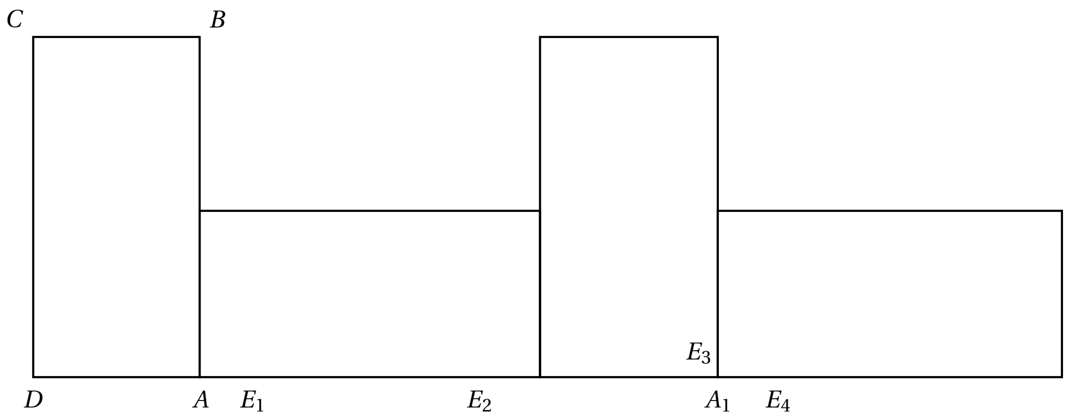
1. a. Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S.
   b. En déduire que $S = x + y$ et $P = xy$ sont premiers entre eux.
   c. Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).
2. Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.
3. Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que : $SP = 84$.
4. Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a + b = 84 \\ ab \quad = d^3 \end{cases} \text{ avec } d = \text{PGCD}(a\,;\,b)$$

   (On pourra poser $a = dx$ et $b = dy$ avec x et y premiers entre eux)

Exercice 37 France, septembre 2002

On considère un rectangle direct $ABCD$ vérifiant : $AB = 10$ cm et $AD = 5$ cm.



1. Faire une figure : construire $ABCD$, puis les images respectives M, N et P de B, C et D par la rotation r de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
2. a. Construire le centre Ω de la rotation r' qui vérifie $r'(A) = N$ et $r'(B) = P$. Déterminer l'angle de r'.
   b. Montrer que l'image de $ABCD$ par r' est $AMNP$.
   c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r^{-1} \circ r'$.
3. On considère les images successives des rectangles $ABCD$ et $AMNP$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{DM}$. Sur la demi-droite $[DA)$, on définit ainsi la suite de points $(A_k)_{k \geqslant 1}$ vérifiant, en cm, $DA_k = 5 + 15k$. Sur la même demi-droite, on considère la suite de points $(E_n)_{n \geqslant 1}$ vérifiant, en cm, $DE_n = 6,55n$.
   a. Déterminer l'entier k tel que E_{120} appartienne à $[A_k, A_{k+1}]$. Que vaut la longueur A_kE_{120} en cm ?
   b. On cherche dans cette question pour quelle valeur minimale n_0 le point E_{n_0} est confondu avec un point A_k.
   Montrer que si un point E_n est confondu avec un point A_k alors $131n - 300k = 100$.
   Vérifier que les nombres $n = 7\,100$ et $k = 3\,100$ forment une solution de cette équation.
   Déterminer la valeur minimale n_0 recherchée.

Exercice 38 Asie, juin 2002

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 8$ et

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{7}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \dfrac{20}{3}x_n + \dfrac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}, \ n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer, par récurrence, que les points M_n de coordonnées $\left(x_n\,;\,y_n\right)$ sont sur la droite (Δ) dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$.
2. Montrer, par récurrence, que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.
3. Montrer que :
   a. x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.
   b. Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.
4. a. Montrer, par récurrence, que $x_n = \dfrac{1}{3}\left(4^n \times 5 - 2\right)$.
   b. En déduire que $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3, pour tout entier naturel n.

Exercice 39 Centres étrangers, juin 2002

Soit p un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation :

$$(E)\ : x^2 + y^2 = p^2$$

1. On pose $p = 2$. Montrer que l'équation (E) est sans solution.
   On suppose désormais que p est différent de 2 et que le couple $(x\,;\,y)$ est solution de l'équation (E).
2. Le but de cette question est de prouver que x et y sont premiers entre eux.
   a. Montrer que x et y sont de parités différentes.
   b. Montrer que x et y ne sont pas divisibles par p.

c. En déduire que x et y sont premiers entre eux.

3. On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est-à-dire : $p = u^2 + v^2$ où u et v sont deux entiers naturels strictement positifs.

   a. Vérifier qu'alors le couple $\left(\left|u^2 - v^2\right| ; 2uv\right)$ est solution de l'équation (E).

   b. Donner une solution de l'équation (E), lorsque $p = 5$ puis lorsque $p = 13$.

4. On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation (E) est impossible lorsque p n'est pas somme de deux carrés.

   a. $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils somme de deux carrés ?

   b. Démontrer que les équations $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs.

Exercice 40 France, juin 2002

1. On considère l'équation :

$$(E) : 6x + 7y = 57$$

où x et y sont des entiers relatifs.

   a. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(u ; v)$ tel que $6u + 7v = 1$; en déduire une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de l'équation (E).

   b. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

2. Soit $\left(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath} ; \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.
On considère le plan $(\mathscr{P})$ d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.
On considère les points du plan $(\mathscr{P})$ qui appartiennent aussi au plan $\left(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath}\right)$. Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point M du plan $(\mathscr{P})$ dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

   a. Montrer que l'entier y est impair.

   b. On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.
   Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.

   c. On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation : $x + p + 4q = 7$. En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

   d. En déduire les coordonnées de tous les points de $(\mathscr{P})$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Exercice 41 Polynésie, juin 2002

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

2. On pose $\alpha = n + 3$ et $\beta = 2n + 1$ et on note δ le PGCD de α et β.

   a. Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ.

   b. Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n - 2)$ est multiple de 5.

3. On considère les nombres a et b définis par :

$$a = n^3 + 2n^2 - 3n$$
$$b = 2n^2 - n - 1.$$

Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n - 1)$.

4. a. On note d le PGCD de $n(n+3)$ et de $(2n+1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta = d$.
   b. En déduire le PGCD, Δ, de a et b en fonction de n.
   c. Application :
   Déterminer Δ pour $n = 2\,001$;
   Déterminer Δ pour $n = 2\,002$.

Exercice 42 Amérique du Nord, mai 2002

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme $\overline{abba}$ où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque. Exemples d'éléments de (E) : 2002 ; 3773 ; 9119. Les parties A et B peuvent être traitées séparément.

Partie A : Nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.

1. a. décomposer 1001 en produit de facteurs premiers.
   b. Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.
2. a. Quel est le nombre d'éléments de (E) ?
   b. Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisibles par 2 ni par 5 ?
3. Soit n un élément de (E) s'écrivant sous la forme $\overline{abba}$.
   a. Montrer que : « n est divisible par 3 » équivaut à « $a+b$ est divisible par 3 ».
   b. Montrer que : « n est divisible par 7 » équivaut à « b est divisible par 7 ».
4. Déduire des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.

Partie B : Étude des éléments de (E) correspondant à une année bissextile.

Soit (F) l'ensemble des éléments de (E) qui correspondent à une année bissextile.
On admet que pour tout élément n de (F), il existe des entiers naturels p et q tels que :

$$n = 2000 + 4p \quad \text{et} \quad n = 2002 + 11q.$$

1. On considère l'équation (e) : $4p - 11q = 2$ où p et q sont des entiers relatifs.
   Vérifier que le couple $(6\,;\,2)$ est solution de l'équation (e) puis résoudre l'équation (e).
2. En déduire que tout entier n de (F) peut s'écrire sous la forme 2024 + 44 k où k est un entier relatif.
3. À l'aide de la calculatrice déterminer les six plus petits éléments de (F).
   N.B. : Liste des nombres premiers inférieurs à 40 :
   2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37.

Exercice 43 Inde, mai 2002

1. Calculer le PGCD de $4^5 - 1$ et de $4^6 - 1$.
2. Soit u la suite numérique définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$.
   Calculer les termes u_2, u_3 et u_4 de la suite u.
3. a. Montrer que la suite u vérifie, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n + 1$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.
   c. En déduire, pour tout entier naturel n, le PGCD de u_n et u_{n+1}.

4. Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.
   a. Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.
   b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c. Déterminer, pour tout entier naturel n, le PGCD de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.

Session 2001

Exercice 44 Amérique du Sud, décembre 2001

Soit n un entier naturel non nul.
On considère les nombres a et b tels que :

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 + n$$

1. Montrer que $2n+1$ divise a et b.
2. Un élève affirme que le PGCD de a et b est $2n+1$.
   Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée*)

Exercice 45 Nouvelle-Calédonie, décembre 2001

Partie I

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que $x^4 + 4 = \left(x^2+2\right)^2 - 4x^2$.
2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
2. Montrer que, tout diviseur de A qui divise n, divise 2.
3. Montrer que, tout diviseur commun de A et B, divise $4n$.
4. Dans cette question on suppose que n est impair.
   a. Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.
   b. Montrer que d divise n.
   c. En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.
5. On suppose maintenant que n est pair.
   a. Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.
   b. Montrer que d est de la forme $d = 2p$, où p est impair.
   c. Montrer que p divise n. En déduire que $d = 2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question **4.**)

Exercice 46 Antilles-Guyane, septembre 2001

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que PGCD$(a+b\,;\,ab) = p$, où p est un nombre premier.
   a. Démontrer que p divise a^2. (On remarquera que $a^2 = a(a+b) - ab$).
   b. En déduire que p divise a.
      On constate donc, de même, que p divise b.
   c. Démontrer que PGCD$(a\,;\,b) = p$.
2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leqslant b$.

a. Résoudre le système :

$$\begin{cases} \text{PGCD}(a\,;\,b) = 5 \\ \text{PPCM}(a\,;\,b) = 170 \end{cases}.$$

b. En déduire les solutions du système :

$$\begin{cases} \text{PGCD}(a+b\,;\,ab) = 5 \\ \text{PPCM}(a\,;\,b) \quad = 170 \end{cases}.$$

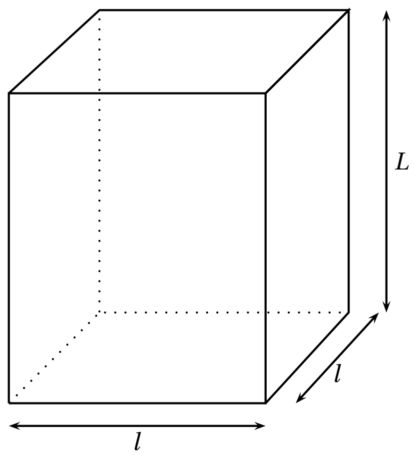
Exercice 47 France, septembre 2001

1. a. Déterminer le PGCD des nombres 168 et 20.
   b. Soit l'équation $168x + 20y = 6$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a t-elle des solutions ?
   c. Soit l'équation $168x + 20y = 4$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a t-elle des solutions ?
2. a. Déterminer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, et en détaillant les calculs effectués, deux entiers relatifs m et p tels que $42m + 5p = 1$.
   b. En déduire deux entiers relatifs u et v tels que $42u + 5v = 12$.
   c. Démontrer que le couple d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$ est solution de l'équation $42x + 5y = 2$ si, et seulement si $42(x+4) = 5(34 - y)$.
   d. Déterminer tous les couples d'entiers $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $42x + 5y = 2$.
3. Déduire du **2.** les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $(42x + 5y - 3)(42x + 5y + 3) = 0$.

Exercice 48 Amérique du Nord, juin 2001

1. Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.
2. On considère l'équation $(E) : 87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Vérifier, en utilisant par exemple la question **1.**, que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution $(x_0\,;\,y_0)$ de (E).
   b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.
   c. Application : Déterminer les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.
   Indication : On remarquera que le point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ *appartient à la droite (D) si, et seulement si, le couple* $(x\,;\,y)$ *vérifie l'équation (E).*

Exercice 49 Antilles-Guyane, juin 2001



1. Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L, à base carrée de côté l, où l et L sont des entiers naturels non nuls tels que $l < L$. On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).
    a. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus grande valeur possible pour a ?
    Quelles sont les valeurs possibles pour a ?
    b. Dans cette question, le volume de la boîte B est $v = 77\,760$. On sait que, pour remplir la boîte B, la plus grande valeur possible de a est 12. Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions.
2. On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête c est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question **1.** (Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide).
    a. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus petite arête c pour la caisse C ?
    Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête c ?
    b. Dans cette question, le volume de la boîte B est $15\,435$. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105.
    Quelles sont les dimensions l et L de la boîte B ?

Exercice 50 Centres étrangers, juin 2001

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.
Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1. Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple $(u\,;\,v)$ est solution de l'équation $(E_1) : 35x - 27y = 2$.
2. a. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0\,;\,y_0)$ solution particulière de l'équation (E_2) :
    $$35x - 27y = 1.$$
    b. En déduire une solution particulière $(u_0\,;\,v_0)$ de (E_1).
    c. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1).
    d. Déterminer la solution $(u\,;\,v)$ permettant de déterminer J_1.

3. a. Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?
   b. Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 (l'année 2000 était bissextile) ?
   c. Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

Exercice 51 France, juin 2001

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ [unité graphique : 6 cm].
On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}.$$

On définit une suite de points (M_n) de la manière suivante : M_0 a pour affixe $z_0 = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On appelle z_n l'affixe de M_n.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. Placer les points M_0, M_1, M_2.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité :
$$z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}.$$
(On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.)
3. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p. Montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si et seulement si $(n-p)$ est multiple de 12.
4. a. On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs.
   Après avoir vérifié que le couple $(4\,;\,9)$ est solution, résoudre l'équation (E).
   b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$.

Exercice 52 Inde, juin 2001

1. On considère l'équation (1) d'inconnues $(n\,;\,m)$ éléments de $\mathbb{Z}^2$:
$$11n - 24m = 1.$$
   a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.
   b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).
   c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).
2. Recherche du PGCD de $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$.
   a. Justifier que 9 divise $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$.
   b. $(n\,;\,m)$ désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire :
$$\left(10^{11n}-1\right) - 10\left(10^{24m}-1\right) = 9.$$
   c. Montrer que $10^{11}-1$ divise $10^{11n}-1$. (on rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a-1)\left(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a^0\right)$, valable pour tout entier naturel n non nul). Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :
$$\left(10^{11}-1\right)N - \left(10^{24}-1\right)M = 9.$$
   d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$ divise 9.
   e. Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$.

Exercice 53 Nouvelle-Calédonie, juin 2001

Dans tout l'exercice, x et y désignentdes entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$.
S est l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ tels que PGCD$(x\,;\,y) = y - x$.

1. a. Calculer PGCD(363 ; 484).
   b. Le couple (363 ; 484) appartient-il à S ?
2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple $(n\,;\,n+1)$ appartient-il à S ?
   Justifier votre réponse.
3. a. Montrer que $(x\,;\,y)$ appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel k non nul tel que $x = k(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$.
   b. En déduire que pour tout couple $(x\,;\,y)$ de S on a :
   $$\text{PPCM}(x\,;\,y) = k(k+1)(y-x).$$
4. a. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.
   b. En déduire l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ de S tels que PPCM$(x\,;\,y) = 228$.

Exercice 54 Polynésie, juin 2001

1. On considère x et y des entiers relatifs et l'équation $(E) : 91x + 10y = 1$.
   a. Énoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).
   b. Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$.
   c. Résoudre (E').
2. Montrer que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8. (Une des méthodes possibles est un raisonnement par récurrence).
3. On considère l'équation $(E'') : A_3x + A_2y = 3\,296$.
   a. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$ solutions de l'équation (E'').
   b. Montrer que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer.

Session 2000

Exercice 55 Antilles-Guyane, septembre 2000

Les points $A_0 = O$; A_1 ; ... ; A_{20} sont les sommets d'un polygone régulier de centre A, à 21 côtés, de sens direct.
Les points $B_0 = O$; B_1 ; B_{14} sont les sommets d'un polygone régulier de centre B, à 15 côtés, de sens direct.
Soit r_A la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{21}$ et r_B la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{2\pi}{15}$.
On définit la suite (M_n) de points par :
– M_0 est l'un des points $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{20}$;
– pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = r_A(M_n)$.
On définit la suite (P_n) de points par :
– P_0 est l'un des points $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_{14}$;
– pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = r_B(P_n)$.
Le but de l'exercice est de déterminer, pour deux cas particuliers, l'ensemble S des entiers naturels n vérifiant :

$$M_n = P_n = O.$$

1. Dans cette question, $M_0 = P_0 = O$.
   a. Indiquer la position du point M_{2000} et celle du point P_{2000}.
   b. Déterminer le plus petit entier naturel n non nul tel que $M_n = P_n = O$. En déduire l'ensemble S.
2. Dans cette question, $M_0 = A_{19}$ et $P_0 = B_{10}$.
   On considère l'équation $(E) : 7x - 5y = 1$ avec $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$.
   a. Déterminer une solution particulière $(a ; b)$ de (E).
   b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
   c. En déduire l'ensemble S des entiers naturels n vérifiant $M_n = P_n = O$.

Exercice 56 Asie, juin 2000

1. Déterminer PGCD(2 688 ; 3 024).
2. Dans cette question, x et y sont deux entiers relatifs.
   a. Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes :

$$(1) : 2\,688x + 3\,024y = -3\,360 \qquad (2) : 8x + 9y = -10.$$

   b. Vérifier que $(1 ; -2)$ est une solution particulière de l'équation (2).
   c. Déduire de ce qui précède les solutions de (2).
3. Soit $\left(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath} ; \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.
   On considère les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ d'équations respectives

$$x + 2y - z = -2 \quad \text{et} \quad 3x - y + 5z = 0.$$

   a. Montrer que $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ se coupent suivant une droite $(\mathscr{D})$.
   b. Montrer que les coordonnées des points de $(\mathscr{D})$ vérifient l'équation (2).
   c. En déduire l'ensemble E des points de $(\mathscr{D})$ dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Exercice 57 Inde, juin 2000

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. a. Pour $1 \leqslant n \leqslant 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
   b. Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7. En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.
   c. À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de $3^{1\,000}$ par 7.
   d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?
   e. En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.
2. Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   a. Montrer que si U_n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.
   b. Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors U_n est divisible par 7. En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.

Exercice 58 La Réunion, juin 2000

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres :

$$a = n^3 - n^2 - 12n \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 - 7n - 4.$$

1. Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.
2. On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β.
   a. Établir une relation entre α et β indépendante de n.
   b. Démontrer que d est un diviseur de 5.
   c. Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.
3. Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.
4. a. Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a et b.
   b. Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

Exercice 59 Liban, juin 2000

1. Le plan $(\mathscr{P})$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u} ; \vec{v}\right)$. Soient A et B les points d'affixes respectives $a = 1 + \mathrm{i}$; $b = -4 - \mathrm{i}$. Soit f la transformation du plan $(\mathscr{P})$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.
   a. Exprimer z' en fonction de z.
   b. Montrer que f admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
2. On se place dans le cas où les coordonnées x et y de M sont des entiers naturels avec $1 \leqslant x \leqslant 8$ et $1 \leqslant y \leqslant 8$. Les coordonnées $(x' ; y')$ de M' sont alors : $x' = 3x + 2$ et $y' = 3y - 1$.
   a. On appelle G et H les ensembles des valeurs prises respectivement par x' et y'. Écrire la liste des éléments de G et H.
   b. Montrer que $x' - y'$ est un multiple de 3.

c. Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité. On se propose de déterminer tous les couples $(x'\ ;\ y')$ de $G \times H$ tels que $m = x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60.

d. Montrer que dans ces conditions, le nombre $x' - y'$ est un multiple de 6. Le nombre $x' - y'$ peut-il être un multiple de 30 ?

e. En déduire que, si $x'^2 - y'^2$ est un multiple non nul de 60, $x' + y'$ est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples $(x'\ ;\ y')$ qui conviennent.
En déduire les couples $(x\ ;\ y)$ correspondant aux couples $(x'\ ;\ y')$ trouvés.

Exercice 60 Polynésie, juin 2000

1. On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation (1) : $ax + by = 60$ (a et b entiers naturels donnés tels que $ab \neq 0$). On notera d le plus grand commun diviseur de a et b.
   a. On suppose que l'équation (1) a au moins une solution $(x_0\ ;\ y_0)$. Montrer que d divise 60.
   b. On suppose que d divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution $(x_0\ ;\ y_0)$ à l'équation (1).
2. On considère l'équation (2) : $24x + 36y = 60$ (x et y entiers relatifs).
   a. Donner le PGCD de 24 et 36 en justifiant brièvement. Simplifier l'équation (2).
   b. Trouver une solution évidente pour l'équation (2) et résoudre cette équation. On appellera S l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ solutions.
   c. Énumérer tous les couples $(x\ ;\ y)$ solutions de (2) et tels que :
   $$-10 \leqslant x \leqslant 10.$$
   Donner parmi eux, ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5.
   d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm), représenter l'ensemble E des points M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ telles que :
   $$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$
   e. Montrer que les points ayant pour coordonnées les solutions $(x\ ;\ y)$ de l'équation (2) appartiennent à E. Comment peut-on caractériser S ?

Session 1999

Exercice 61 Nouvelle-Calédonie, décembre 1999

Soit n un entier naturel non nul, on considère les entiers suivants : $N = 9n+1$ et $M = 9n-1$.

1. On suppose que n est un entier pair. On pose $n = 2p$, avec p entier naturel non nul.
   a. Montrer que M et N sont des entiers impairs.
   b. En remarquant que $N = M+2$, déterminer le PGCD de M et N.
2. On suppose que n est un entier impair. On pose $n = 2p+1$, avec p entier naturel.
   a. Montrer que M et N sont des entiers pairs.
   b. En remarquant que $N = M+2$, déterminer le PGCD de M et N.
3. Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'entier $81n^2-1$.
   a. Exprimer l'entier $81n^2-1$ en fonction des entiers M et N.
   b. Démontrer que si n est pair alors $81n^2-1$ est impair.
   c. Démontrer que $81n^2-1$ est divisible par 4 si et seulement si n est impair.

Exercice 62 Amérique du Sud, novembre 1999

On considère l'équation (1) : $20b-9c = 2$ où les inconnues b et c appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.

1. a. Montrer que si le couple $(b_0\,;\,c_0)$ d'entiers relatifs est une solution de l'équation (1), alors c_0 est un multiple de 2.
   b. On désigne par d le PGCD de $|b_0|$ et $|c_0|$. Quelles sont les valeurs possibles de d ?
2. Déterminer une solution particulière de l'équation (1), puis déterminer l'ensemble des solutions de cette équation.
3. Déterminer l'ensemble des solutions $(b\,;\,c)$ de (1) telles que PGCD$(b\,;\,c) = 2$.
4. Soit r un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. Le nombre entier naturel P, déterminé par $P = \alpha_n r^n + \alpha_{n-1}r^{n-1} + \ldots + \alpha_1 r + \alpha_0$, où $\alpha_n,\ \alpha_{n-1},\ \ldots,\ \alpha_1,\ \alpha_0$ sont des nombres entiers naturels vérifiant $0 < \alpha_n < r$, $0 \leqslant \alpha_{n-1} < r, \ldots,\ 0 \leqslant\ \alpha_0 < r$, est noté $\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1\alpha_0}^{(r)}$; cette écriture est dite « écriture de P en base r ».
   Soit P un nombre entier naturel s'écrivant $\overline{ca5}^{(6)}$ et $\overline{bbaa}^{(4)}$ (en base six et en base quatre respectivement).
   Montrer que $a+5$ est un multiple de 4 et en déduire les valeurs de a, puis de b et de c.
   Donner l'écriture de P dans le système décimal.

Exercice 63 Inde, novembre 1999

Partie A

On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples $(a\ ;\ b)$ d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1999.

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$:

$$(E) : n^2 - Sn + 11\,994 = 0 \text{ où } S \text{ est un entier naturel.}$$

On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.

1. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ?
   Si oui, préciser la deuxième solution.
2. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ?
3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11 994. En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

Exercice 64 Amérique du Nord, juin 1999

Les trois parties I, II, III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I

Soit $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$. Déterminer les paires $\{a ; b\}$ d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

1. L'entier $(n-1)!+1$ est-il pair ?
2. L'entier $(n-1)!+1$ est-il divisible par un entier naturel pair ?
3. Prouver que l'entier $(15-1)!+1$ n'est pas divisible par 15.
4. L'entier $(11-1)!+1$ est-il divisible par 11 ?

Partie III

Soit p un entier naturel non premier ($p \geqslant 2$).

1. Prouver que p admet un diviseur q ($1 < q < p$) qui divise $(p-1)$.
2. L'entier q divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?
3. L'entier p divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?

Exercice 65 Antilles-Guyane, juin 1999

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath}\right)$, on donne le point $A(12 ; 18)$. On désigne par B un point de l'axe $(O ; \vec{\imath})$ et par C un point de l'axe $(O ; \vec{\jmath})$ tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\pi}{2}$.
On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1. Démontrer que le couple $(x ; y)$ est solution de l'équation :
$$(E) : 2x + 3y = 78.$$
2. On se propose de trouver tous les couples $(B ; C)$ de points ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.
   a. Montrer que l'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.
   b. À partir de la définition de B et C, trouver une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de (E) avec x_0 et y_0 appartenant à $\mathbb{Z}$.
   c. Démontrer qu'un couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs est solution de l'équation (E) si, et seulement si, il est de la forme $(12+3k ; 18-2k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

d. Combien y a-t-il de couples de points $(B ; C)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que :

$$-6 \leqslant x \leqslant 21 \text{ et } -5 \leqslant y \leqslant 14 ?$$

Exercice 66 Asie, juin 1999

1. On considère l'équation $(E) : 8x + 5y = 1$, où $(x ; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.
   a. Donner une solution particulière de l'équation (E).
   b. Résoudre l'équation (E).
2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a ; b)$ de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$.
   a. Montrer que le couple $(a ; -b)$ est solution de (E).
   b. Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?
3. a. Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x ; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.
   b. Au VIII$^{\text{e}}$ siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Exercice 67 Centres étrangers, juin 1999

Le but de cet exercice est d'utiliser les solutions d'une équation à deux inconnues entières pour résoudre un problème dans l'espace.

1. a. Déterminer un couple $(x_0 ; y_0)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation :

$$48x + 35y = 1.$$

   (On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD de deux nombres).
   b. Déduire de **(a)** tous les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solutions de cette équation.
2. L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, on donne le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(48 ; 35 ; 24)$ et le point A de coordonnées $(-11 ; 35 ; -13)$.
   a. Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l'ensemble (Π) des points M de l'espace, de coordonnées $(x ; y ; z)$ tels que $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = 0$.
   b. Soit $(\mathscr{D})$ la droite intersection de (Π) avec le plan d'équation $z = 16$. Déterminer tous les points de $(\mathscr{D})$ dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle [- 100 ; 100]. En déduire les coordonnées du point de $(\mathscr{D})$, à coordonnées entières, situé le plus près de l'origine.

Exercice 68 France, juin 1999

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres : $a_n = 4.10^n - 1$, $b_n = 2.10^n - 1$ et $c_n = 2.10^n + 1$.

1. a. Calculez a_n, b_n et c_n pour $n = 1$, 2 et 3.
   b. Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrez que a_n et c_n sont divisibles par 3.
   c. Montrez, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 que b_3 est premier.

   d. Montrez que, pour tout entier naturel n, $b_n.c_n = a_{2n}$. Déduisez-en la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.
   e. Montrez que PGCD$(b_n\,;\,c_n)$ = PGCD$(c_n\,;\,2)$. Déduisez-en que b_n et c_n sont premiers entre eux.
2. On considère l'équation (1) : $b_3x + c_3y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.
   a. Justifiez le fait que (1) possède au moins une solution.
   b. Appliquez l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3. Déduisez-en une solution particulière de (1).
   c. Résolvez l'équation (1).

Exercice 69 Liban, juin 1999

Le nombre n est un entier naturel non nul. On pose : $a = 4n+3$, $b = 5n+2$ et on note d le PGCD de a et b.

1. Donner la valeur de d dans les trois cas suivants : $n = 1$, $n = 11$, $n = 15$.
2. Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d.
3. a. Déterminer les entiers naturels n et k tels que $4n+3 = 7k$.
   b. Déterminer les entiers naturels n et k tels que $5n+2 = 7k$.
   Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7.
   Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7.
   Pour quelles valeurs de r, d est-il égal à 1 ?

Exercice 70 Polynésie, juin 1999

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n}-1$ est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence). En déduire que $2^{3n+1}-2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2}-4$ est un multiple de 7.
2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.
3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier :

$$A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}.$$

   a. Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p, par 7 ?
   b. Démontrer que si $p = 3n+1$ alors A_p est divisible par 7.
   c. Étudier le cas où $p = 3n+2$.
4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire :

$$a = \overline{1\,001\,001\,000} \quad b = \overline{1\,000\,100\,010\,000}.$$

   Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p. Sont-ils divisibles par 7 ?

Session Années 80

Exercice 71 Inconnu, 1982

1. Soient a et b deux entiers naturels dont la somme et le produit ont pour PGCD le carré d'un nombre premier p.
   a. Montrer que p^2 divise a^2 (on pourra remarquer que $a^2 = a(a+b) - ab$).
   En déduire que p divise a. Montrer que p divise b.
   b. Démontrer que le PGCD de a et b est soit p, soit p^2.
2. On cherche à déterminer les entiers naturels a et b tels que :

$$\text{PGCD}(a+b\,;\,ab) = 49 \qquad \text{et} \qquad \text{PPCM}(a\,;\,b) = 231$$

   a. Soients a et b deux tels entiers. Montrer que leur PGCD est 7.
   b. Quelles sont les solutions du problème posé ?

Exercice 72 Poitiers, 1982

Dans l'exercice, les lettres a, b, p, q désignent des entiers relatifs.

1. a. En supposant $a = 9p+4q$ et $b = 2p+q$, démontrer que les entiers a et b d'une part, p et q d'autre part, ont le même PGCD.
   b. Démontrer que les entiers $9p+4$ et $2p+1$ sont premiers entre eux. Quel est leur PPCM ?
2. Déterminer le PGCD des entiers relatifs $9p+4$ et $2p-1$ en fonction des valeurs de p.

Exercice 73 Reims, 1982

1. Déterminer l'ensemble U des entiers relatifs n tels que $n+2$ divise $2n-1$.
2. Montrer que pour tout entier relatif, les nombres $n+2$ et $2n^2+3-1$ sont premiers entre eux.
3. Déterminer l'ensemble V des entiers relatifs n, $n \neq -2$ tels que :

$$\frac{\left(2n^2-1\right)\left(2n^2+3n-1\right)}{\left(n^2-2\right)(n+2)} \qquad \text{soit un entier relatif.}$$

Exercice 74 Antilles-Guyane, 1981

n étant un entier relatif quelconque, on considère les entiers relatifs a et b définis par :

$$a = n^3 - 2n + 5 \qquad ; \qquad b = n+1.$$

1. Montrer que $\text{PGCD}(a\,;\,b) = \text{PGCD}(b\,;\,6)$.
   Pour quelles valeurs de n a-t-on $\text{PGCD}(a\,;\,b) = 3$?
2. Déterminer n pour que le nombre $\dfrac{a}{b}$ soit un entier relatif.

Exercice 75 Besançon, 1981

Soit $(a\,;\,b)$ un couple d'entiers naturels non nuls ; on note m leur plus petit commun multiple et d leur plus grand commun diviseur. Exprimer, à l'aide de d, les couples $(a\,;\,b)$ tels que :

$$\begin{cases} b-a=d \\ b^2-a^2=m-d^2 \end{cases}.$$

Exercice 76 Clermont-Ferrand, 1981

Déterminer tous les couples $(a\,;\,b)$ d'entiers naturels dont le plus grand commun diviseur d et le plus petit commun multiple m vérifient la relation : $8m=105d+30$.

Exercice 77 Lille 1, 1981

1. décomposer 319 en produit de facteurs premiers.
2. Démontrer que si x et y sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même pour $3x+5y$ et $x+2y$.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}^*$ le système :

$$\begin{cases} (3a+5b)(a+2b)=1276 \\ ab=2m \end{cases}$$

où m désigne le plus petit multiple commun de a et b.

Exercice 78 Lille 2, 1981

1. Déterminer dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 30.
2. Trouver les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels non nuls dont le plus grand commun diviseur Δ et le plus petit commun multiple M vérifient $3M-2\Delta=30$.

Exercice 79 Lyon 1, 1981

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation :

$$x-9y=13.$$

2. Déterminer tous les éléments $(a\,;\,b)$ de $\mathbb{N}^2$ qui vérifient la relation suivante :

$$\text{PPCM}(a\,;\,b)-9\text{PGCD}(a\,;\,b)=13.$$

Exercice 80 Lyon 2, 1981

n désigne un entier naturel.

1. Montrer que le PGCD de $n-1$ et $n+3$ est le même que celui de $n+3$ et 4. Quelles valeurs peut prendre le PGCD de $n-1$ et $n+3$?
2. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $n-1$ divise $n+3$.
3. Montrer que pour tout n, les entiers $n-1$ et n^2+2n-2 sont premiers entre eux.
4. Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $(n-1)(2n+1)$ divise $(n+3)(n^2+2n-2)$.

Exercice 81 Montpellier, 1981

Soit n un entier naturel.

1. Trouver suivant les valeurs de n, les restes de la division de 5^n par 13.
2. En déduire que $1981^{1981}-5$ est divisible par 13.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $N = 31^{4n+1}+18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Exercice 82 Nantes, 1981

Soit $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. On considère, lorsque n appartient à $\mathbb{N}^*$, les deux entiers a et b :

$$a = 11n+3 \qquad ; \qquad b = 13n-1.$$

1. Démontrer que tout diviseur de a et de b est un diviseur de 50.
2. Résoudre pour $x \in \mathbb{N}^*$, $y \in \mathbb{N}^*$, l'équation $50x-11y = 3$. En déduire les valeurs de n pour lesquelles les nombres a et b ont 50 pour plus grand commun diviseur.
3. Pour quelles valeurs de n, les nombres a et b ont-ils 25 pour plus grand commun diviseur ?

Exercice 83 Paris, 1981

Déterminer les entiers naturels s'écrivant $\overline{abca}$ dans le système de numération décimale, divisibles par 7 et dont le reste dans la division par 99 est 1.

Exercice 84 Rennes, 1981

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $23x-17y = 6$.
2. Déduire de l'étude précédente les entiers naturels A inférieurs à 1000 tels que dans la division euclidienne de A par 23, le reste soit 2, et dans celle de A par 17, le reste soit 8.

Exercice 85 Japon, 1980

1. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $18a+23b=2001$.
   a. Montrer que pour tout couple $(a\,;\,b)$ solution de (E), a est un multiple de 23 et b un multiple de 3.
   b. Déterminer une solution de (E).
   c. Résoudre (E).
2. Déterminer les couples $(p\,;\,q)$ d'entiers tels que $18d+23m=2001$, où d désigne le PGCD de p et q, et m leur PPCM.

Exercice 86 Nancy-Metz, 1980

1. Montrer que si m est un nombre entier tel que $0<m<7$ alors $77-11m$ n'est pas divisible par 7.
   En déduire que 77 ne peut pas s'écrire sous la forme $11m+7n$ avec m, n entiers strictement positifs.
2. Soit x un entier. Montrer qu'il existe un entier m, vérifiant $0<m<7$, tel que $x-11m$ soit divisible par 7.
   En déduire que si $x>77$, alors x peut s'écrire sous la forme $11m+7n$ avec m, n entiers strictement positifs.
3. On dispose de jetons de deux catégories auxquels on attribue respectivement les valeurs 7 et 11.
   Montrer que 59 est la plus grande valeur ne pouvant être réalisée à partir de tels jetons.
   On constatera que les valeurs réalisables sont les nombres de la forme $11m+7n$ avec m, n entiers positifs ou nuls.

Exercice 87 Orléans-Tours, 1980

Soit l'équation :

$$(1) \qquad 4x^3+x^2+x-3=0.$$

1. Montrer, en étudiant la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x)=4x^3+x^2+x-3.$$
   que l'équation (1) n'a qu'une solution réelle qui, de plus, appartient à l'intervalle $]0\,;\,1[$.
2. Montrer que, si l'équation (1) a une solution rationnelle $\dfrac{p}{q}$, où p et q sont premiers entre eux, alors p divise 3 et q divise 4.
   Quels sont les rationnels vérifiant cette dernière condition ?
3. Déterminer la solution rationnelle $\dfrac{p}{q}$ de l'équation (1) et, après avoir mis en facteur $(qx-p)$ dans l'expression de $f(x)$, achever la résolution de l'équation (1) dans le corps des complexes.

Exercice 88 Poitiers, 1980

Soit a et b deux entiers premiers entre eux.

1. Montrer que $a+b$ et ab sont premiers entre eux. En déduire que les nombres $a+b$ et a^2-ab+b^2 sont premiers entre eux ou divisibles par 3.
2. Démontrer l'égalité :
   $$\text{PGCD}(a+b\,;\,a^2-ab+b^2)=\text{PGCD}(a+b\,;\,3).$$

Session Années 70

Exercice 89 Bordeaux, 1979

Étant donné un entier relatif n, on considère les entiers relatifs :

$$A = 3n + 4 \qquad ; \qquad B = 9n - 5.$$

1. Déterminer, suivant les valeurs de n, le plus grand commun diviseur de A et B.
2. Déterminer les valeurs de n pour que le plus grand commun diviseur de A et B soit égal à 17 et le plus petit commun multiple de A et B soit égal à 884.

Exercice 90 Inde, 1979

Soit B un entier strictement supérieur à 3. Dans tout ce qui suit, les écritures surlignées représentent des nombres écrits en base B.

1. Montrer que $\overline{132}$ est divisible par $B+1$ et $B+2$.
2. Pour quelles valeurs de B $\overline{132}$ est-il divisible par 6 ?
3. Montrer que $A = \overline{1320}$ est divisible par 6.

Exercice 91 Montpellier, 1979

Soit $a \in \mathbb{N} - \{1\}$. On cherche à déterminer un entier naturel b tel que $a^b = b^a$.

1. a. Déterminer b pour $a = 2$.
   b. Pour quelle valeur de a peut-on avoir $b = 2$?
   On suppose désormais $b \in \mathbb{N}$ et $b \geqslant 3$.
2. a. Prouver que a et b ont les mêmes diviseurs premiers.
   b. Soit p un diviseur premier commun à a et b, α et β ses exposants dans les décompositions respectives de a et b en facteurs premiers. Démontrer que $\alpha b = \beta a$.
   c. Déduire de **(a)** et **(b)** que a est un multiple de b et que si $a = kb$, alors $b^{k-1} = k$.
3. Démontrer que l'on a $b^{n-1} > n$ pour tout naturel $n \geqslant 2$.
4. Conclure.

Exercice 92 Besançon, 1978

Les nombres a et b étant deux entiers naturels premiers vérifiant $a > b$, trouver tous les couples $(x\,;\,y)$ éléments de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que :

$$x^2 - y^2 = a^2 b^2.$$

Applications : Déterminer l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ dans les deux cas suivants :

$$(a\,;\,b) = (7\,;\,2) \qquad \text{et} \qquad (a\,;\,b) = (11\,;\,5).$$

Exercice 93 Centres étrangers I, 1978

1. Montrer que si deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux, alors $a^2 + b^2$ et ab le sont aussi.
2. Déterminer toutes les paires $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels qui admettent 30 pour plus petit commun multiple et vérifient $x^2 + y^2 = 325$.
   (Pour l'écriture des entiers, la base utilisée est dix.)

Exercice 94 Montpellier, 1978

Quatre nombres entiers strictement positifs a, b, c, d forment, dans cet ordre, une suite géométrique dont la raison est un nombre entier premier avec a. Trouver ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation :

$$10a^2 = d - b.$$

Exercice 95 Nantes, 1978

Si deux entiers naturels sont premiers entre eux, montrer qu'il en est de même de leur somme et de leur produit. En déduire l'ensemble des paires $\{a\,;\,b\}$ d'entiers naturels tels que :

$$\left\{\begin{array}{r} a+b = 96 \\ \text{PPCM}(a\,;\,b) = 180 \end{array}\right. .$$

Exercice 96 Nice, 1978

1. Trouver toutes les paires d'entiers naturels a et b tels que l'on ait :
$$\left\{\begin{array}{l} \text{PGCD}(a\,;\,b) = 42 \\ \text{PPCM}(a\,;\,b) = 1680 \end{array}\right. .$$
2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que :
$$8x \equiv 7 \ (\text{mod} 5).$$
3. Résoudre l'équation :
$$(x\,;\,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \qquad 336x + 210y = 294.$$
   La deuxième question fournira une solution particulière de l'équation simplifiée.

Exercice 97 Reims, 1978

On considère les trois entiers naturels a, b et c qui s'écrivent dans la base n :

$$a = 111, \quad b = 114, \quad c = 13\,054.$$

1. Sachant que $c = ab$, déterminer n, puis l'écriture de chacun des nombres a, b et c dans le système décimal.

2. Vérifier, en utilisant l'algorithme d'Euclide, que a et b sont premiers entre eux. En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $ax + by = 1$.

Exercice 98 Strasbourg, 1978

Le nombre n désigne un entier naturel.

1. Démontrer que $n^2 + 5n + 4$ et $n^2 + 3n + 2$ sont divisibles par $n + 1$.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n + 1$.
3. En déduire que, quel que soit n, $3n^2 + 15n + 19$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$.

Exercice 99 Aix-en-Provence, 1977

1. Établir que, quel que soit $(a, b, q) \in \mathbb{Z}^3$,
$$a \wedge b = b \wedge (a - bq).$$
La notation $\wedge$ désigne le PGCD des entiers relatifs a et b.
2. Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{Z}$,
$$(5n^3 - n) \wedge (n + 2) = (n + 2) \wedge 38.$$
3. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $(n + 2)$ divise $(5n^3 - n)$.
4. Quelles sont les valeurs possibles du PGCD de $(5n^3 - n)$ et $(n + 2)$?
Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que :
$$(5n^3 - n) \wedge (n + 2) = 19.$$

Exercice 100 Caen, 1977

1. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 210.
2. Si x et y sont deux entiers naturels non nuls, Δ leur plus grand diviseur commun, μ leur plus petit multiple commun, déterminer l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ tels que :
$$\begin{cases} \mu = 210\Delta \\ y - x = \Delta \end{cases}.$$

Exercice 101 Lyon 1, 1977

Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le système suivant :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5\,440 \\ \text{PGCD}(x\,;\,y) = 8 \end{cases}.$$

Exercice 102 Lyon 2, 1977

1. Soit x un entier relatif. Déterminer le reste de la division euclidienne de x^3 par 9, en discutant suivant les valeurs de x.
   En déduire que, pour tout entier relatif x, on a :
$$x^3 \equiv 0\ [9] \iff x \equiv 0\ [3]$$
$$x^3 \equiv 1\ [9] \iff x \equiv 1\ [3]$$
$$x^3 \equiv 8\ [9] \iff x \equiv 2\ [3]$$
2. On considère trois entiers relatifs x, y et z tels que $x^3 + y^3 + z^3$ soit divisible par 9. Démontrer que l'un des nombres x, y et z est divisible par 3.

Exercice 103 Aix-marseille, 1976

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.
2. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n$ par 7 (on pourra remarquer que $851 \equiv 4\ [7]$).
3. On considère le nombre B qui s'écrit $\overline{2103211}^4$. Déterminer dans le système décimal le reste de la division euclidienne de B par 4.

Exercice 104 Antilles-Guyane, 1976

1. Etudier les restes des divisions par 7 des puissances successives de 4, 5 et 6.
2. Déterminer les entiers naturels n pour lesquels $4^n + 5^n + 6^n$ est divisible par 7.
   Préciser les solutions comprises entre 105 et 125.

Exercice 105 Caen, 1976

On considère l'équation (1) :
$$324x - 245y = 7 \qquad (x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2.$$

1. Montrer que pour toute solution $(x\,;\,y)$, x est multiple de 7.
2. Déterminer une solution $(x_0\,;\,y_0)$ et en déduire toutes les solutions.
3. Soit δ le PGCD des éléments d'un couple $(x\,;\,y)$ solution de (1) ; quelles sont les valeurs possibles de δ ? Déterminer les solutions de (1) telles que x et y soient premiers entre eux.

Exercice 106 Dijon, 1976

1. Calculer en fonction de n la somme des n premiers entiers naturels non nuls.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul :

$$\sum_{p=1}^{n} p^3 = \left(\sum_{p=1}^{n} p\right)^2.$$

   (Le candidat pourra utiliser un raisonnement par récurrence.)
   Soit s la suite de terme général :

$$s_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$$

   Exprimer s_n en fonction de n.
3. Soit D_n le plus grand diviseur commun des nombres s_n et s_{n+1}. Calculer D_n lorsque :
   a. $n = 2k$.
   b. $n = 2k+1$.
4. En déduire que, pour $n > 1$, D_n est différent de 1 et que trois termes consécutifs s_n, s_{n+1}, s_{n+2} de la suite s sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Exercice 107 Nancy, 1976

On définit la suite de terme général u_n par :

$$u_0 \in \mathbb{N}, \qquad u_0 \geqslant 4$$

Pour tout élément de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1. On pose $v_n = u_n - 3$. Montrer que la suite (v_n) ainsi définie est une suite géométrique. En déduire l'expression de v_n, puis de u_n en fonction de u_0 et de n.
2. Quels sont les nombres entiers u_0 ($u_0 \geqslant 4$) tels que, pour tout n, 3^{u_n} soit le cube d'un entier naturel ?
3. On suppose $u_0 = 4$; déterminer toutes les valeurs de n telles que $3^{u_n} - 1$ soit un multiple de 11.

Exercice 108 Poitiers, 1976

L'ensemble référentiel est l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels non nuls ; x est un élément de $\mathbb{N}^*$, différent de 1 ; p et q sont des éléments de $\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si d est un diviseur de p, alors $x^d - 1$ est un diviseur de $x^p - 1$.
2. Montrer que si d est le PGCD de p et de q, alors il existe m et n tels que :

$$mp - nd = d.$$

   En déduire que si d est le PGCD de p et de q, on peut trouver m et n vérifiant :

$$\left(x^{mp} - 1\right) - \left(x^{nq} - 1\right) x^d = \left(x^d - 1\right).$$

3. De l'égalité précédente, déduire que $x^d - 1$ est le PGCD de $x^{mp} - 1$ et de $x^{nq} - 1$.

Exercice 109 Rennes, 1976

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $143x - 100y = 1$.
2. Déterminer l'ensemble des entiers naturels p tels que $10^{5p} + 10^{3p} - 2 \equiv 0$ [143].

Exercice 110 Rouen, 1976

k étant un entier relatif, on pose :

$$x = 2k - 1 \qquad \text{et} \qquad y = 9k + 4.$$

Montrer que tout diviseur commun à x et à y divise 17. En déduire, suivant les valeurs de k, le plus grand diviseur commun de x et y.

Exercice 111 Dijon, 1973

1. Le nombre $2^{11} - 1$ est-il premier ?
2. p et q étant deux entiers naturels non nuls, quel est le reste de la division par $2^p - 1$ du nombre $2^{pq} = \left(2^p\right)^q$?
   En déduire que $2^{pq} - 1$ est divisible par $\left(2^p - 1\right)$ et $\left(2^q - 1\right)$.
3. Démontrer que, si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
   La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 112 Aix-en-Provence 1, 1970

Les entiers seront écrits ici en base dix.
En remarquant que $999 = 27 \times 37$, montrer que pour tout entier positif n :

$$10^{3n} \equiv 1 \pmod{37}.$$

En déduire le reste de la division par 37 du nombre $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$.

Exercice 113 Aix-en-Provence 2, 1970

Montrer (au moyen des congruences) que, si aucun des trois entiers a, b ou c n'est multiple de 3, $a^2 + b^2 + c^2$ est multiple de 3.

Exercice 114 Bordeaux 1, 1970

N désignant un entier naturel non nul, on considère les entiers de la forme $N^4 + 4$.

1. décomposer, dans le corps des réels, le polynôme $x^4 + 4$ en produit de deux facteurs du second degré.
   En déduire que 5 est le seul nombre premier de la forme $N^4 + 4$.
2. Montrer que, si N n'est pas un multiple de 5, $N^4 + 4$ est un multiple de 5.

Exercice 115 Bordeaux 2, 1970

Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, le nombre $A = 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.
(On pourra, soit raisonner par récurrence, soit utiliser les congruences modulo 17.)

Exercice 116 Cambodge et Laos, 1970

Déterminer les entiers naturels n tels que le nombre $(2 \times 3^n + 3)$ soit divisible par 11.

Exercice 117 Clermont-Ferrand, 1970

Déterminer tous les couples $(a\,;\,b)$ d'entiers naturels tels que $m + 11d = 203$, m étant le PPCM et d le PGCD de a et b.

Exercice 118 Inde, 1970

1. On donne deux entiers naturels, a et b, premiers entre eux. Trouver un entier naturel c tel que chacun des entiers a, b et c divise le produit des deux autres.
2. On donne deux entiers naturels a et b, et d leur PGCD. Trouver les entiers naturels c tels que chacun des entiers a, b et c divise le produit des deux autres.
   Application numérique : $a = 15$, $b = 12$.

Exercice 119 Limoges, 1970

Démontrer que, quel que soit l'entier n, le nombre entier $N = n^2(n^4 - 1)$ est divisible par 60.

Exercice 120 Lyon, 1970

On rappelle que le nombre des parties d'un ensemble fini, E, ayant n éléments est 2^n.

1. En utilisant les congruences, étudier les restes possibles de la division par 5 d'une puissance de 2.
2. On désigne par F l'ensemble des parties de l'ensemble E de n éléments et par G l'ensemble des parties de F. On écrit, dans le système à base 5, le nombre, m, des éléments de G. Quel est, suivant les valeurs de n, le chiffre des unités de m ?

Exercice 121 Montpellier, 1970

Soit le nombre $N = n^3 - 3n + 5$. En utilisant la théorie des congruences, déterminer :

1. La forme générale des entiers relatifs n tels que l'on ait $N \equiv 0 \pmod 7$.
2. La forme générale des entiers relatifs n tels que l'on ait $N \equiv 1 \pmod 7$.

Exercice 122 Nancy, 1970

Déterminer les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers strictement positifs satisfaisant aux trois conditions suivantes :

– Le plus grand commun diviseur de x et y est égal à 5 ;
– Le plus petit commun multiple de x et y est égal à 720 ;
– Il existe un nombre rationnel r tel que $r^2 = \dfrac{x}{y}$.

Exercice 123 Nantes, 1970

Résoudre dans $\mathbb{Z}$, ensemble des entiers relatifs, l'équation :

$$x^2 - 3x + 4 \equiv 0 \pmod 7, \quad \text{où } x \text{ est l'inconnue}$$

Exercice 124 Orléans 1, 1970

Déterminer n ($n \in \mathbb{N}$) tel que la fraction $\dfrac{n^2+3}{n+2}$ soit réductible.
Déterminer n tel que cette fraction soit égale à un entier naturel.

Exercice 125 Orléans 2, 1970

Déterminer le nombre entier du système décimal qui s'écrit $\overline{abca}$, dans le système à base onze, et $\overline{bbac}$, dans le système à base sept.

Exercice 126 Paris, 1970

Considérons la fraction $\dfrac{2n-3}{n+1}$, où n est un entier relatif différent de -1. Pour quelles valeurs de n la fraction est-elle équivalente à un entier relatif ? Pour quelles valeurs de n est-elle irréductible ?

Exercice 127 Poitiers 1, 1970

Soit le nombre $a = 2n(n^2+5)$, où n est un entier au moins égal à 1.
Montrer que a est divisible par 3 et par 4. En déduire qu'il existe au moins un autre entier k tel que, pour tout $n \geqslant 1$, k divise a. Rappeler le théorème utilisé.

Exercice 128 Poitiers 2, 1970

Trouver les entiers naturels compris entre 100 et 200, divisibles par 9, et qui dans le système de numération de base 6 s'écrivent $\overline{x3y}$.

Exercice 129 Rennes 1, 1970

1. À tout entier naturel n, on fait correspondre le reste u_n de la division de 4^n par 7. Montrer qu'il existe un entier a, strictement positif, tel que, quel que soit n, $u_{n+a} = u_n$ et $u_{n+k} = u_n$ si $0 < k < a$.
2. Reprendre la même question pour les restes v_n de la division de 5^n par 7.
3. Comment faut-il choisir l'entier naturel n pour que le nombre $5^n - 4^n$ soit divisible par 7 ?

Exercice 130 Rennes 2, 1970

1. Quel est l'ensemble des diviseurs du nombre 72 ?
2. Soit p un nombre entier naturel ; mettre le nombre entier relatif $p^2 - 6p - 63$ sous la forme d'une différence de deux entiers naturels, l'un d'eux étant un carré parfait, l'autre ne dépendant pas de p.
   En déduire tous les couples $(p\,;\,q)$ d'entiers naturels, solutions de l'équation $p^2 - 6p - 63 = q^2$.

Exercice 131 Rouen, 1970

Étudier les restes des divisions par 5 des puissances de 7 : $7^1, 7^2, 7^3, 7^4, \ldots, 7^p$, $(p \in \mathbb{N}, p > 0)$.
Quel est le reste de la division par 5 de 7^{45} ? Montrer que $16 \times 7^{2n} - 28 \times 3^{2n+3}$ est divisible par 5 quel que soit l'entier naturel n.

Exercice 132 Strasbourg 1, 1970

Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a\,;\,b)$ tels que le plus grand commun diviseur de a et de b soit 5 et le plus petit commun multiple de a et de b soit 8 160.

Exercice 133 Strasbourg 2, 1970

Comment faut-il choisir l'entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$) pour que $2^n - 1$ soit divisible par 9 ?
À quelle condition relative aux entiers naturels x et y la division par 9 de $2^x 11^y$ donne-t-elle 1 pour reste ?

Exercice 134 Strasbourg 3, 1970

Démontrer, soit par récurrence sur n, soit par la méthode des congruences, que $N = n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6, quel que soit l'entier n supérieur ou égal à 1.

Exercice 135 Toulouse 1, 1970

Écrire la liste des nombres premiers inférieurs à 50.
Le nombre 1 417 est-il premier ?
Quels sont les entiers naturels a et b vérifiant la relation $a^2 = b^2 + 1\,517$?

Exercice 136 Toulouse 2, 1970

Calculer les restes, dans la division par 7, des puissances successives de 5.
Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le nombre $5^{6n} + 5^n + 2$ est-il un multiple de 7 ?

Exercice 137 Toulouse 3, 1970

Écrire, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division de 2^n par 5.
En déduire le reste de la division de $2\,917^{541}$ par 5.

Exercice 138 Toulouse 4, 1970

En utilisant le théorie des congruences, déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $(n^3 - 3n^2 - 2)$ soit un multiple de 7.
