Recueil d'annales en Mathématiques

Terminale S - Enseignement de spécialité

Sections planes de surfaces

Frédéric Demoulin[1]

Dernière révision : 8 août 2005

[1] frederic.demoulin@voila.fr

Tableau récapitulatif des exercices

⋆ indique qu'un accent a été mis plus particulièrement sur ce(s) point(s) dans l'exercice

N°	Lieu	Année	Cône	Cylindre	Sphère	Autres surfaces	Arithmétique
1	Inde	Avril 2004	⋆		⋆		
2	Centres étrangers	Juin 2003				⋆	
3	France	Juin 2003	⋆				⋆
4	Paris	1987			⋆		
5	Antilles-Guyane	1985				⋆	

Exercice 1 Inde, Avril 2004

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
On considère les points $A(0\,;5\,;5)$ et $B(0\,;0\,;10)$.

1. Dans cette question, on se place dans le plan $\mathcal{P}_0$ d'équation $x=0$ rapporté au repère $\left(O\,;\,\vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
   On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre B passant par A.
   Démontrer que la droite (OA) est tangente au cercle $\mathcal{C}$.
2. On nomme $\mathcal{S}$ la sphère engendrée par la rotation du cercle $\mathcal{C}$ autour de l'axe (Oz) et Γ le cône engendré par la rotation de la droite (OA) autour de l'axe (Oz).
   (a) Démontrer que le cône Γ admet pour équation $x^2+y^2=z^2$.
   (b) Déterminer l'intersection du cône Γ et de la sphère $\mathcal{S}$.
   Préciser la nature de cette intersection et ses éléments caractéristiques.
   (c) Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.
3. On coupe le cône Γ par le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $x=1$. Dans $\mathcal{P}_1$, l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection.
   Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.
4. Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point du cône Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls. Démontrer que x et y ne peuvent pas être simultanément impairs.

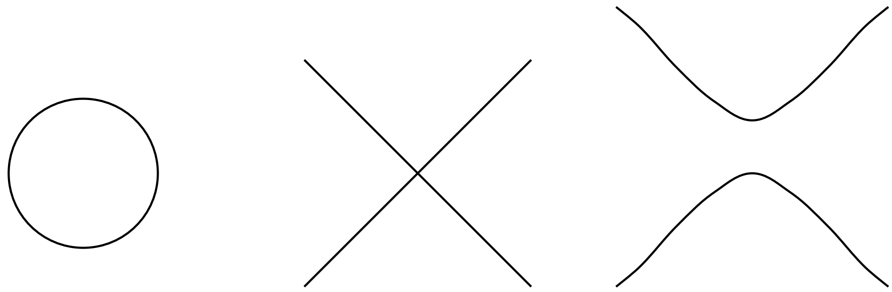


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Exercice 2 Centres étrangers, Juin 2003

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
On considère la surface $\mathcal{T}$ d'équation :

$$x^2y=z \quad \text{avec} \quad -1\leqslant x\leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1\leqslant y\leqslant 1.$$

La figure ci-dessous est une représentation de la surface $\mathcal{T}$, dans le cube de centre O et de côté 2.

1. Éléments de symétrie de la surface $\mathcal{T}$.
   (a) Montrer que si le point $M(x\,;y\,;z)$ appartient à $\mathcal{T}$, alors le point $M'(-x\,;y\,;z)$ appartient aussi à $\mathcal{T}$. En déduire un plan de symétrie de $\mathcal{T}$.
   (b) Montrer que l'origine O du repère est centre de symétrie de $\mathcal{T}$.
2. Intersections de la surface $\mathcal{T}$ avec des plans parallèles aux axes.
   (a) Déterminer la nature des courbes d'intersection de $\mathcal{T}$ avec les plans parallèles au plan (xOz).
   (b) Déterminer la nature des courbes d'intersection de $\mathcal{T}$ avec les plans parallèles au plan (yOz).
3. Intersections de la surface $\mathcal{T}$ avec les plans parallèles au plan (xOy) d'équations $z=k$, avec $k\in[0\ ;\ 1]$.
   (a) Déterminer l'intersection de la surface $\mathcal{T}$ et du plan d'équation $z=0$.
   (b) Pour $k>0$ on note K le point de coordonnées $(0\,;0\,;k)$. Déterminer, dans le repère $(K\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, l'équation de la courbe d'intersection de $\mathcal{T}$ et du plan d'équation $z=k$.

(c) Tracer l'allure de cette courbe dans le repère $(K\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. On précisera en particulier les coordonnées des extrémités de l'arc.

4. On note (D) le domaine formé des points du cube unité situés sous la surface $\mathcal{T}$.

$$(D) = \left\{M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{E} \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant 1\ ;\ 0 \leqslant z \leqslant x^2 y\right\}.$$

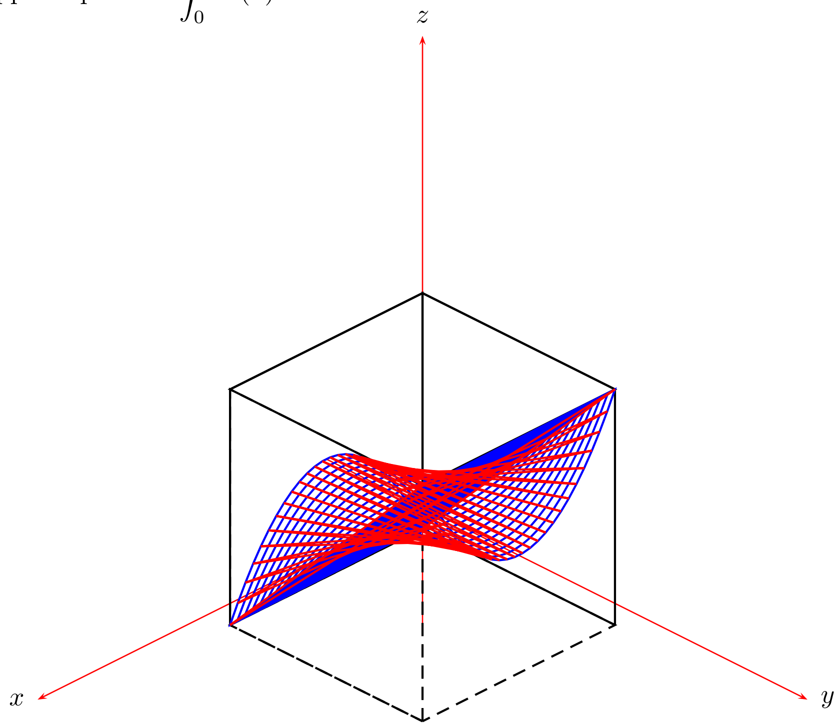
(a) Pour $0 < k \leqslant 1$, le plan d'équation $z = k$ coupe le domaine (D) selon une surface qu'on peut visualiser sur le graphique de la question **3.(c)**. C'est l'ensemble des points M du cube unité, de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que :

$$y \geqslant \frac{k}{x^2} \quad \text{et} \quad z = k.$$

Calculer en fonction de k, l'aire $S(k)$ exprimée en unités d'aire, de cette surface.

(b) On pose $S(0) = 1$, calculer en unités de volume, le volume V du domaine (D).

On rappelle que $V = \displaystyle\int_0^1 S(k)\,\mathrm{d}k$.



Exercice 3 France, Juin 2003

Les questions **3.** *et* **4.** *sont indépendantes des questions* **1.** *et* **2.** ; *seule l'équation de* Γ *donnée en* **1.(c)** *intervient à la question* **4.**

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

   (a) Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations respectives $x + y\sqrt{3} - 2z = 0$ et $2x - z = 0$ ne sont pas parallèles.

   (b) Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

   (c) On considère le cône de révolution Γ d'axe (Ox) contenant la droite Δ comme génératrice.
   Montrer que Γ a pour équation cartésienne $y^2 + z^2 = 7x^2$.

2. On a représenté sur les deux figures ci-dessous les intersections de Γ avec des plans parallèles aux axes de coordonnées.
   Déterminer dans chaque cas une équation des plans possibles, en justifiant avec soin votre réponse.

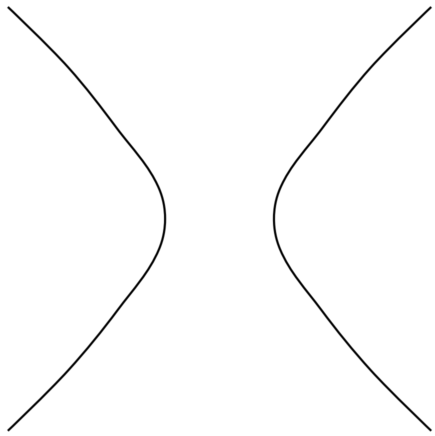


Figure 1

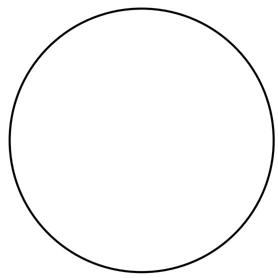


Figure 2

3. (a) Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3$ [7], dont l'inconnue x est un entier relatif, n'a pas de solution.
   (b) Montrer la propriété suivante : pour tous entiers relatifs a et b, si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et 7 divise b.
4. (a) Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. Montrer la propriété suivante : si le point A de coordonnées $(a\,;\,b\,;\,c)$ est un point du cône Γ alors a, b et c sont divisibles par 7.
   (b) En déduire que le seul point de Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet de ce cône.

Exercice 4 Paris, 1987

Dans un plan $\mathcal{P}$ de l'espace, on considère un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.
Soit Δ la droite passant par A orthogonale à $\mathcal{P}$ et S un point de Δ distinct de A. On note I le projeté orthogonal de A sur la droite (BS).
Pour tout point M du cercle $\mathcal{C}$ on note H le projeté orthogonal de A sur la droite (MS).

1. Placer les données précédentes sur une figure, Δ étant placée verticalement.
2. Prouver que H appartient à la sphère Σ de diamètre $[AS]$.
3. Dans cette question, on suppose que M est distinct de A et de B. Prouver que la droite (MB) est orthogonale au plan (AMS). En déduire que la droite (AH) est orthogonale au plan (BMS).
4. Montrer que H appartient au plan Π passant par I orthogonal à la droite (BS).
5. (a) Déterminer l'intersection Γ de la sphère Σ et du plan Π.
   (b) Prouver que l'ensemble décrit par H lorsque M parcourt $\mathcal{C}$ est égal à Γ. À cet effet, étant donné un point N' de Γ distinct de A, on pourra montrer que le plan $(AN'S)$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en A et en un autre point M.

Exercice 5 Antilles-Guyane, 1985

On se propose dans ce problème d'étudier l'ensemble, noté Σ, des points de l'espace équidistants de deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non coplanaires et orthogonales. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = \left(O\,;\,\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.
La droite $\mathcal{D}$ passe par le point A de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,1)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.
La droite $\mathcal{D}'$ passe par le point B de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,-1)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$.

1. Vérifier que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales et non coplanaires. Montrer que le point O appartient à Σ.
2. Montrer qu'une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = t\,, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 \end{array}\right.$$

   Soit M un point de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$. Calculer la distance de M à la droite $\mathcal{D}$.
3. Calculer de même la distance de M à la droite $\mathcal{D}'$.
4. En déduire que M appartient à Σ si et seulement si on a :

$$xy + 2z = 0.$$

5. Déduire de cette relation :
   (a) Que les intersections de Σ avec des plans orthogonaux à la droite (AB) sont en général des hyperboles. Préciser le cas d'exception.
   (b) La nature des intersections de Σ avec des plans orthogonaux à l'axe $(O\,;\,\overrightarrow{\imath})$ ou à l'axe $(O\,;\,\overrightarrow{\jmath})$.