Recueil d'annales en Mathématiques

Terminale S – Enseignement de spécialité

Similitudes planes

Frédéric Demoulin[1]

Dernière révision : 23 février 2010

Document diffusé via le site www.bacamaths.net de Gilles Costantini[2]

1. frederic.demoulin (chez) voila.fr
2. gilles.costantini (chez) bacamaths.net

Tableau récapitulatif des exercices

⋆ indique que cette notion a été abordée dans l'exercice

N°	Lieu	Année	ROC	QCM VF	Similitudes directes	Similitudes indirectes	Arith-métique	Bary-centres	Suites
Session 2009									
1	Amérique du Sud	nov 2009			⋆				
2	Polynésie	juin 2009	⋆		⋆				
3	Inde	avril 2009			⋆				⋆
Session 2008									
4	France	juin 2008			⋆		⋆		⋆
5	La Réunion	juin 2008			⋆	⋆	⋆		
Session 2007									
Session 2006									
Session 2005									
6	Nouvelle-Calédonie	nov 2005				⋆			
7	Amérique du Nord	juin 2005			⋆				
8	France	juin 2005			⋆			⋆	
9	Inde	avril 2005				⋆	⋆		
Session 2004									
10	Amérique du Sud	nov 2004			⋆		⋆		⋆
11	France	sept 2004			⋆				
12	Polynésie	sept 2004			⋆	⋆	⋆		
13	Amérique du Nord	juin 2004			⋆	⋆			
14	Antilles-Guyane	juin 2004			⋆				
15	Liban	juin 2004			⋆				
16	Polynésie	juin 2004			⋆				⋆
Session 2003									
17	Amérique du Sud	nov 2003			⋆		⋆		
18	Amérique du Nord	juin 2003			⋆				⋆
19	La Réunion	juin 2003			⋆		⋆		⋆
20	Polynésie	juin 2003			⋆	⋆			
21	Inde	avril 2003			⋆				
Session 2002									
22	Antilles-Guyane	sept 2002			⋆				
23	France	sept 2002			⋆		⋆		
24	Amérique du Nord	juin 2002			⋆		⋆		⋆
25	Antilles-Guyane	juin 2002			⋆	⋆			
26	La Réunion	juin 2002			⋆	⋆			
Session 2001									
27	Polynésie	sept 2001			⋆			⋆	
28	Asie	juin 2001			⋆	⋆			
29	Liban	juin 2001			⋆	⋆			
Session 2000									
30	Amérique du Sud	nov 2000			⋆				⋆
31	France	sept 2000			⋆	⋆			
32	Polynésie	sept 2000			⋆				
33	Amérique du Nord	juin 2000			⋆				
34	Centres étrangers	juin 2000			⋆	⋆			
35	France	juin 2000			⋆				
36	Liban	juin 2000			⋆		⋆		

N°	Lieu	Année	ROC	QCM VF	Similitudes directes	Similitudes indirectes	Arith-métique	Bary-centres	Suites
				Années 90					
37	Sportifs haut niveau	oct 1999			⋆	⋆			
38	Antilles-Guyane	sept 1999			⋆				
39	France	sept 1999			⋆	⋆			
40	La Réunion	juil 1999			⋆				
41	Antilles-Guyane	sept 1998			⋆				
42	Antilles-Guyane	juin 1998			⋆			⋆	⋆
43	France	1998			⋆				
44	Nouvelle-Calédonie	1998			⋆				
45	Amérique du Nord	juin 1996			⋆				
46	Centres étrangers 3	juin 1996			⋆			⋆	
47	France 1 bis	juin 1996			⋆				
48	France 2 bis	juin 1996			⋆				
49	La Réunion	sept 1995			⋆				
50	Amérique du Nord	juin 1995			⋆				
51	Djibouti	juin 1995			⋆			⋆	
52	Japon	juin 1995			⋆				
53	Sportifs haut niveau	1995			⋆			⋆	
54	Aix-Marseille	1991			⋆				
55	France	sept 1990			⋆				⋆
56	Espagne	1990			⋆				
				Années 80					
57	Paris	1989			⋆				⋆
58	Amérique du Nord	1985			⋆				
59	Extrême-Orient	1984			⋆				

Session 2009

Amérique du Sud, novembre 2009 (5 points)

On considère un carré direct $ABCD$ (c'est à dire un carré $ABCD$ tel que $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$) de centre I.

Soit J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[DA]$.
Γ_1 désigne le cercle de diamètre $[AI]$ et Γ_2 désigne le cercle de diamètre $[BK]$.

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s telle que $s(A) = I$ et $s(B) = K$.
2. Montrer que les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points distincts : le point J et le centre Ω de la similitude directe s.
3. a. Déterminer les images par s des droites (AC) et (BC). En déduire l'image du point C par s.
   b. Soit E l'image par s du point I. Démontrer que E est le milieu du segment $[ID]$.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Démontrer que les points A, Ω et E sont alignés (on pourra considérer la transformation $t = s \circ s$).

Partie B

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct $\left(A\ ;\ \dfrac{1}{10}\overrightarrow{AB}\ ;\ \dfrac{1}{10}\overrightarrow{AD}\right)$.

1. Donner les affixes des points A, B, C et D.
2. Démontrer que la similitude directe s a pour écriture complexe :
$$z' = \frac{\mathrm{i}}{2}z + 5 + 5\mathrm{i}$$
3. Calculer l'affixe ω du centre Ω de s.
4. Calculer l'affixe z_E du point E et retrouver l'alignement des points A, Ω et E.
5. Démontrer que les droites (AE), (CL) et (DJ) sont concourantes au point Ω.

Polynésie, juin 2009 (5 points)

Partie A – Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.
On supposera connu le résultat suivant : « une application f du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $b \in \mathbb{C}$ ».
Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$, unité graphique 2 cm.
On note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives :

$$z_A = 2\text{i},\ z_B = 2,\ z_C = 4+6\text{i},\ z_D = -1+\text{i}\ \text{ et }\ z_E = -3+3\text{i}$$

1. Placer les points sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure des questions.
2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. Soit f la similitude plane directe telle que $f(A) = D$ et $f(B) = A$.
   a. Donner l'écriture complexe de f.
   b. Déterminer l'angle, le rapport et le centre Ω de cette similitude.
   c. Montrer que le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude f.
   d. En déduire la nature du triangle DAE.
4. On désigne par (Γ_1) le cercle de diamètre $[AB]$ et par (Γ_2) le cercle de diamètre $[AD]$.
   On note M le second point d'intersection du cercle (Γ_1) et de la droite (BC), et N le second point d'intersection du cercle (Γ_2) et de la droite (AE).
   a. Déterminer l'image de M par la similitude f.
   b. En déduire la nature du triangle ΩMN.
   c. Montrer que $MB \times NE = MC \times NA$.

Inde, avril 2009 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.
Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = \mathrm{i}$ et $z_B = 1 + 2\mathrm{i}$.

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe S telle que :

$$S(O) = A \text{ et } S(A) = B$$

2. Montrer que l'écriture complexe de S est :

$$z' = (1 - \mathrm{i})z + \mathrm{i}$$

Préciser les éléments caractéristiques de S (on notera Ω le centre de S).
On considère la suite de points (A_n) telle que :

$$\begin{cases} A_0 \text{ est l'origine du repère} \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ A_{n+1} = S(A_n) \end{cases}$$

On note z_n, l'affixe de A_n (on a donc $A_0 = O$, $A_1 = A$ et $A_2 = B$).

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = 1 - (1 - \mathrm{i})^n$.
   b. Déterminer, en fonction de n, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$.
   Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}\,;\,\overrightarrow{A_n A_{n+1}}\right)$.
   c. En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n.
   Construire les points A_3 et A_4.
4. Quels sont les points de la suite (A_n) appartenant à la droite (ΩB) ?

Session 2008

France, juin 2008 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 - \mathrm{i}$ et $z_B = 7 + \dfrac{7}{2}\mathrm{i}$.

1. On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $4x + 3y = 1$.
   Démontrer que l'ensemble des points de $\mathscr{D}$ dont les coordonnées sont entières est l'ensemble des points $M_k(3k+1\,;\,-4k-1)$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs.
2. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe de centre A qui transforme B en $M_{-1}(-2\,;\,3)$.
3. Soit s la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe :
   $$z' = \frac{2}{3}\mathrm{i}z + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\mathrm{i}$$
   Déterminer l'image de A par s, puis donner la nature et les éléments caractéristiques de s.
4. On note B_1 l'image de B par s et pour tout entier naturel n non nul, B_{n+1} l'image de B_n par s.
   a. Déterminer la longueur AB_{n+1} en fonction de AB_n.
   b. À partir de quel entier n le point B_n appartient-t-il au disque de centre A et de rayon 10^{-2} ?
   c. Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels A, B_1 et B_n sont alignés.

La Réunion, juin 2008 (5 points)

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\ \overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)$.
   Soient A, B et C les points d'affixes respectives :
   $$z_A = 2+\text{i},\quad z_B = 5+2\text{i}\ \text{ et }\ z_C = \text{i}$$
   s_1 désigne la symétrie d'axe (AB).
   a. Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' telle que :
   $$z' = \left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\text{i}\right)\overline{z}+\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\text{i}\right)$$
   b. En déduire l'affixe de C', symétrique de C par rapport à (AB).
   c. Démontrer que l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite $\mathcal{D}$ d'équation $4x+3y=1$.
   d. Vérifier que le point C' appartient à $\mathcal{D}$.
2. a. Démontrer que les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont sécantes en un point Ω dont on précisera l'affixe ω.
   b. On désigne par s_2 la symétrie d'axe $\mathcal{D}$ et par f la transformation définie par $f = s_2 \circ s_1$. Justifier que f est une similitude directe et préciser son rapport.
   c. Déterminer les images des points C et Ω par la transformation f.
   d. Justifier que f est une rotation dont on donnera le centre.
3. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n 'aboutit pas.*
   a. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x\,;\ y)$ solutions de l'équation : $4x+3y=1$.
   b. Déterminer les points de $\mathcal{D}$ à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9.

Session 2005

Nouvelle-Calédonie, novembre 2005 (5 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$. Unité graphique : 4 cm.

Partie A

1. Placer les points I, J, H, A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_I = 1, \quad z_J = \text{i}, \quad z_H = 1+\text{i}, \quad z_A = 2, \quad z_B = \frac{3}{2}+\text{i}, \quad z_C = 2\text{i} \quad \text{et} \quad z_D = -1$$

2. Soit E le symétrique de B par rapport à H. La perpendiculaire à la droite (AE) passant par C et la parallèle à la droite (OC) passant par D se coupent en F.

   Placer E et F et vérifier que le point F a pour affixe $z_F = -1+\dfrac{1}{2}\text{i}$.
3. Montrer que les triangles OAB et OCF sont isométriques.

Partie B

On considère la transformation f du plan, d'écriture complexe : $z' = -\text{i}\,\overline{z}+2\text{i}$.

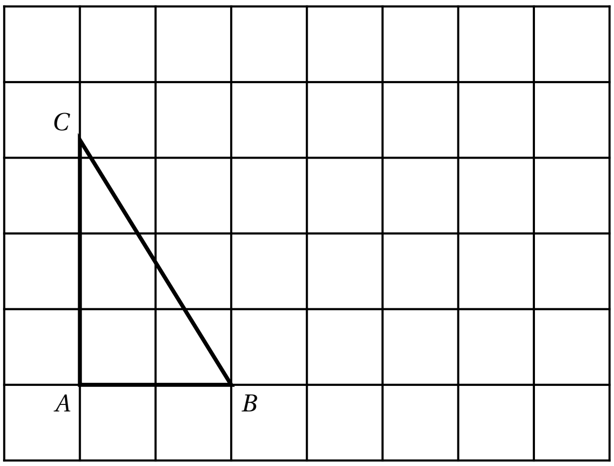
1. Déterminer les images des points O, A, B par f.
2. a. Montrer que f est une similitude. Est-ce une isométrie ?
   b. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   c. La transformation f est-elle une symétrie axiale ?
3. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Donner l'écriture complexe de t et celle de sa réciproque t^{-1}.
4. On pose $s = f \circ t^{-1}$.
   a. Montrer que l'écriture complexe de s est : $z' = -\text{i}\,\overline{z}+1+\text{i}$.
   b. Montrer que I et J sont invariants par s. En déduire la nature de s.
   c. En déduire que f est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser.

Exercice 1 Amérique du Nord, juin 2005 (5 points)

La figure jointe en fin d'énoncé sera complétée au cours de l'exercice et remise avec la copie. On y laissera apparents les traits de construction.

Dans le plan orienté, on donne le triangle ABC tel que $AB = 2$, $AC = 1+\sqrt{5}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

1. a. *Démonstration de cours* : démontrer qu'il existe une seule similitude directe S transformant B en A et A en C.
   b. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.
2. On appelle Ω le centre de S. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[AB]$ et à la droite (BC). Construire le point Ω.
3. On note D l'image du point C par la similitude S.
   a. Démontrer l'alignement des points A, Ω et D ainsi que le parallélisme des droites (CD) et (AB). Construire le point D.
   b. Montrer que $CD = 3+\sqrt{5}$.
4. Soit E le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).
   a. Expliquer la construction de l'image F du point E par S et placer F sur la figure.
   b. Quelle est la nature du quadrilatère $BFDE$?



Exercice 2 France, juin 2005 (5 points)

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de la figure donnée en annexe. Cette annexe sera à rendre avec la copie.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\ \overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)$. Le quadrilatère $MNPQ$ est un quadrilatère non croisé et de sens direct. Les triangles MRN, NSP, PTQ et QUM sont des triangles rectangles isocèles, extérieurs au quadrilatère $MNPQ$ et de sens direct (les sommets des angles droits étant respectivement les points R, S, T et U).

Partie A

On désigne par m, n, p et q, les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1. Soit f la similitude directe de centre M qui transforme N en R.
   a. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude f.
   b. On désigne par r l'affixe du point R. Démontrer que $r = \frac{1+\mathrm{i}}{2}m + \frac{1-\mathrm{i}}{2}n$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ (on pourra éventuellement utiliser l'écriture complexe de la similitude f).

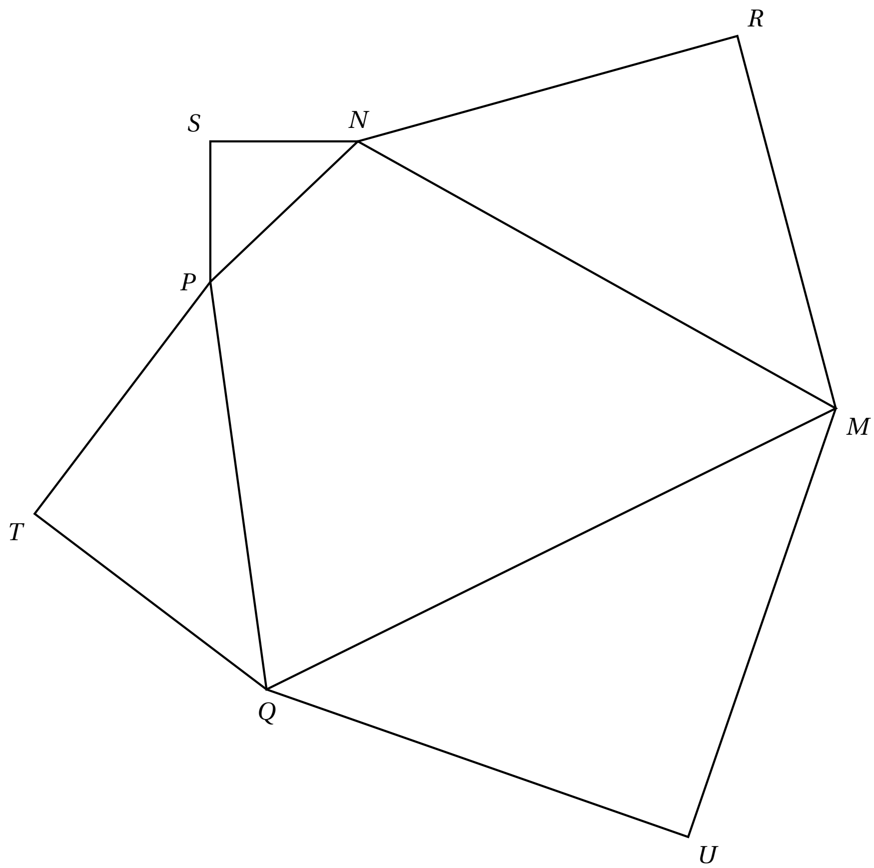
   On admettra que l'on a également les résultats $s = \frac{1+\mathrm{i}}{2}n + \frac{1-\mathrm{i}}{2}p$, $t = \frac{1+\mathrm{i}}{2}p + \frac{1-\mathrm{i}}{2}q$ et $u = \frac{1+\mathrm{i}}{2}q + \frac{1-\mathrm{i}}{2}m$, où s, t et u désignent les affixes respectives des points S, T et U.
2. Démontrer que les quadruplets (M, N, P, Q) et (R, S, T, U) ont le même isobarycentre.
3. a. Démontrer l'égalité $u - s = \mathrm{i}(t - r)$.
   b. Que peut-on en déduire pour les longueurs des segments $[RT]$ et $[SU]$, d'une part, et pour les droites (RT) et (SU), d'autre part ?

Partie B

Cette partie sera traitée sans utilisation des nombres complexes.

1. Démontrer, en utilisant les résultats établis dans la partie **A**, qu'il existe une unique rotation g qui transforme R en S et T en U.
2. Décrire comment construire géométriquement le point Ω, centre de la rotation g. Réaliser cette construction sur la figure de l'annexe.

Annexe



Exercice 3 Inde, avril 2005

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$.
On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3+4\mathrm{i}}{5}\overline{z} + \frac{1-2\mathrm{i}}{5}.$$

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.
   Démontrer que : $\begin{cases} x' = \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \dfrac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$.
2. a. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   b. Quelle est la nature de l'application f ?
3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M d'affixe z tels que z' soit réel.
4. On cherche à déterminer les points de $\mathscr{D}$ dont les coordonnées sont entières.
   a. Donner une solution particulière $(x_0\,;\,y_0)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$.
   b. Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$.
5. On considère les points M d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$ tels que $x=1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'.
   Déterminer les entiers y tels que $\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

Exercice 4 Amérique du Sud, novembre 2004

Soit A_0 et B_0 deux points du plan orienté tels que $A_0B_0 = 8$. On prendra le centimètre pour unité.
Soit S la similitude de centre A_0, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$.
On définit une suite de points (B_n) de la façon suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ B_{n+1} = S(B_n).$$

1. Construire B_1, B_2, B_3 et B_4.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, les triangles $A_0B_nB_{n+1}$ et $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ sont semblables.
3. On définit la suite (l_n) par : pour tout entier naturel n, $l_n = B_nB_{n+1}$.
   a. Montrer que la suite (l_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.
   b. Exprimer l_n en fonction de n et de l_0.
   c. On pose $\Sigma_n = l_0 + l_1 + \cdots + l_n$. Déterminer la limite de Σ_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. a. Résoudre l'équation $3x-4y=2$ où x et y sont deux entiers relatifs.
   b. Soit Δ la droite perpendiculaire en A_0 à la droite (A_0B_0).
   Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, B_n appartient-il à Δ ?

Exercice 5 France, septembre 2004

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.
A et C sont deux points distincts du plan ; on note Γ le cercle de diamètre $[AC]$ et O le centre de Γ ; B est un point du cercle Γ distinct des points A et C.

Le point D est construit tel que le triangle BCD soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BD}\right) = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.
Le point G est le centre de gravité du triangle BCD.
Les droites (AB) et (CG) se coupent en un point M.

Partie A

1. Placer les points D, G et M sur la figure de la feuille annexe.
2. Montrer que les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment $[BC]$ et que le point G est le milieu du segment $[CM]$.
3. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre C transformant B en M.

Partie B

Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives -1 et 1.

Soit E le point construit pour que le triangle ACE soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AE}\right) = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

1. Calculer l'affixe du point E et construire le point E sur la feuille annexe.
2. Soit σ la similitude directe d'expression complexe $z' = \dfrac{3+\text{i}\sqrt{3}}{4}z + \dfrac{1-\text{i}\sqrt{3}}{4}$.
   Determiner les éléments caractéristiques de σ et en déduire que σ est la similitude réciproque de s.
3. Montrer que l'image E' du point E par σ pour affixe $-\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et montrer que le point E' appartient au cercle Γ.
4. On note $\mathscr{C}$ le lieu des points M lorsque le point B décrit le cercle Γ privé des points A et C.
   Montrer que le point E appartient à $\mathscr{C}$.
   Soit O' l'image du point O par la similitude s. Démontrer que le point O' est le centre de gravité du triangle ACE.
   En déduire une construction de $\mathscr{C}$.

Exercice 6 Polynésie, septembre 2004

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$. On prendra sur la figure 1 cm pour unité graphique.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1+\imath$, $3+2\imath$ et $\imath\sqrt{2}$.

1. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par :
   $$z' = \frac{1+\imath}{\sqrt{2}}\overline{z} - 1 + \imath\left(1+\sqrt{2}\right).$$
   a. Calculer les affixes des points $A' = f(A)$ et $C' = f(C)$.
   b. En déduire la nature de f et caractériser cette transformation.
   c. Placer les points A, B et C puis construire le point $B' = f(B)$.
2. a. Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.
   b. Montrer que la composée $g = f \circ h$ a pour écriture complexe $z'' = (1+\imath)\overline{z} - 1 + 3\imath$.
3. a. Soit M_0 le point d'affixe $2-4\imath$.
   Determiner l'affixe du point $M_0'' = g\left(M_0\right)$ puis vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_0''}$ sont orthogonaux.

b. On considère un point M d'affixe z. On suppose que la partie réelle x et la partie imaginaire y de z sont des entiers.
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux si, et seulement si $5x+3y=-2$.

c. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x+3y=-2$.

d. En déduire les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-6\,;6]$ tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux. Placer les points obtenus sur la figure.

Exercice 7 Amérique du Nord, juin 2004

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.
Soient les points A, A', B et B' d'affixes respectives :

$$z_A = 1 - 2\imath, \quad z_{A'} = -2 + 4\imath, \quad z_B = 3 - \imath, \quad z_{B'} = 5\imath.$$

1. a. Placer les points A, A', B et B' dans le plan complexe. Montrer que $ABB'A'$ est un rectangle.
   b. Soit s la réflexion telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$. On note (Δ) son axe.
   Donner une équation de la droite (Δ) et la tracer dans le plan complexe.
   c. On note z' l'affixe du point M' image par s du point M d'affixe z.
   Montrer que :
$$z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\imath\right)\overline{z} + 2\imath - 1.$$
2. Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point P d'affixe z' définie par :
$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\imath\right)\overline{z} + 5 - \imath.$$
   a. On note C et D les images respectives de A et B par g ; déterminer les affixes de C et D et placer ces points dans le plan complexe.
   b. Soit Ω le point d'affixe $1 + \mathrm{i}$ et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2.
   Montrer que C et D sont les images respectives de A' et B' par h.
   c. Soit M_1 d'affixe z_1 l'image par h de M, d'affixe z. Donner les éléments caractéristiques de h^{-1} et exprimer z en fonction de z_1.
3. On pose $f = h^{-1} \circ g$.
   a. Déterminer l'expression complexe de f.
   b. Reconnaître f. En déduire une construction du point P, image par g d'un point M quelconque donné du plan.

Exercice 8 Antilles-Guyane, juin 2004

Dans le plan orienté, on considère un carré direct $ABCD$ de centre O. Soit P un point du segment $[BC]$ distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire Δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faire une figure.
2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   a. Précisez, en justifiant votre réponse, l'image de la droite (BC) par la rotation r.
   b. Déterminez les images de R et de P par r.
   c. Quelle est la nature de chacun des triangles ARQ et APS ?
3. On note N le milieu du segment $[PS]$ et M celui du segment $[QR]$. Soit s la similitude de centre A, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
   a. Déterminez les images respectives de R et de P par s.
   b. Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment $[BC]$ privé de B ?
   c. Démontrez que les points M, B, N et D sont alignés.

Exercice 9 Liban, juin 2004

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. On prendra 1 cm pour unité graphique.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = 2 + \imath, \quad z_B = 1 + 2\imath, \quad z_C = 6 + 3\imath, \quad z_D = -1 + 6\imath.$$

1. Représenter les points A, B, C et D.
2. Montrer qu'il existe une similitude directe f telle que $f(A) = B$ et $f(C) = D$.
   Montrer que cette similitude est une rotation, et préciser ses éléments caractéristiques.
3. Soit J le point d'affixe $3 + 5\imath$.
   Montrer que la rotation R de centre J et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B.
4. On appelle I le point d'affixe $1 + \imath$, M et N les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.
   Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la nature du quadrilatère $IMJN$.
5. On considère les points P et Q tels que les quadrilatères $IAPB$ et $ICQD$ sont des carrés directs.
   a. Calculer les affixes z_P et z_Q des points P et Q.
   b. Déterminer $\dfrac{IP}{IA}$ et $\dfrac{IQ}{IC}$ ainsi qu'une mesure des angles $\left(\overrightarrow{IA},\,\overrightarrow{IP}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IC},\,\overrightarrow{IQ}\right)$.
   En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(A) = P$ et $g(C) = Q$.
   c. En déduire que J est l'image de M par g. Que peut-on en déduire pour J ?

Exercice 10 Polynésie, juin 2004

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté a un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 3 cm.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = 3, \quad b = 1 + \frac{2}{3}\imath, \quad c = 3\imath \quad \text{et} \quad d = -\frac{1}{3}\imath.$$

1. Représenter les points A, B, C et D.
2. Déterminer l'angle ϑ et le rapport k de la similitude directe s transformant A en B et C en D.
3. Donner l'écriture complexe de s. En déduire l'affixe du centre I de s.
4. Soit M le point de coordonnées $(x\,;\,y)$ et $M'(x'\,;\,y')$ son image par s.
   Montrer que : $\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{3}y + 1 \\ y' = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3} \end{cases}$.
5. On construit une suite (M_n) de points du plan en posant

$$\begin{cases} M_0 &= A \\ M_{n+1} &= s(M_n), \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

   Pour tout entier naturel, on note z_n l'affixe du point M_n et on pose $r_n = |z_n - 1|$.
   a. Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que $IM_k \leqslant 10^{-3}$.

Exercice 11 Amérique du Sud, novembre 2003

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

On note r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{5}$.

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 3y = 5(15-x)$.
2. Soit I le point d'affixe 1.
   On considère un point A mobile sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O.
   Sa position initiale est en I.
   On appelle d la distance, exprimée en centimètres, qu'a parcourue le point A sur le cercle $\mathscr{C}$ après avoir subi p rotations r_1 et q rotations r_2 (p et q étant des entiers naturels).

   On convient que lorsque A subit la rotation r_1 (respectivement r_2), il parcourt une distance de $\frac{\pi}{3}$ cm (respectivement $\frac{\pi}{5}$ cm).
   Déterminer toutes les valeurs possibles de p et q pour lesquelles le point A a parcouru exactement deux fois et demie la circonférence du cercle $\mathscr{C}$ à partir de I.

Partie B

On note h_1 l'homothétie de centre O et de rapport 4 et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport -6. On pose $s_1 = r_1\circ h_1$ et $s_2 = r_2\circ h_2$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s_1 et s_2.
2. On pose : $S_m = s_1\circ s_1\circ\cdots\circ s_1$ (composée de m fois s_1, m étant un entier naturel non nul),
   $S'_n = s_2\circ s_2\circ\cdots\circ s_2$ (composée de n fois s_2, n étant un entier naturel non nul), et $f = S'_n\circ S_m$.

   a. Justifier que f est la similitude directe de centre O, de rapport $2^{2m+n}\times 3^n$ et d'angle $m\frac{\pi}{3}+n\frac{6\pi}{5}$.
   b. f peut-elle être une homothétie de rapport 144 ?
   c. On appelle M le point d'affixe 6 et M' son image par f.
   Peut-on avoir $OM' = 240$?
   Démontrer qu'il existe un couple d'entiers naturels unique $(m\,;\,n)$ tel que $OM' = 576$.
   Calculer alors la mesure principale de l'angle orienté $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{OM'}\right)$.

Exercice 12 Amérique du Nord, juin 2003

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A_0, A_1, A_2 d'affixes respectives $z_0 = 5-4\text{i}$, $z_1 = -1-4\text{i}$, $z_2 = -4-\text{i}$.

1. a. Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que $S(A_0) = A_1$ et $S(A_1) = A_2$.
   b. Établir que l'écriture complexe de S est $z' = \frac{1-\text{i}}{2}z + \frac{-3+\text{i}}{2}$.
   c. En déduire le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S.
   d. On considère un point M, d'affixe z avec $z\neq 0$, et son image M', d'affixe z'.
   Vérifier la relation : $\omega - z' = \text{i}(z-z')$; en déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.
2. Pour tout entier naturel n, le point A_{n+1} est défini par $A_{n+1} = S(A_n)$ et on pose $u_n = A_nA_{n+1}$.
   a. Placer les points A_0, A_1, A_2 et construire géométriquement les points A_3, A_4, A_5, A_6.

b. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

3. La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

   a. Exprimer v_n en fonction de n.

   b. La suite (v_n) est-elle convergente ?

4. a. Calculer en fonction de n le rayon r_n du cercle circonscrit au triangle $\Omega A_n A_{n+1}$.

   b. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que, pour tout entier naturel n : si $n > p$ alors $r_n < 10^{-2}$.

Exercice 13 La Réunion, juin 2003

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$. On prendra 1 cm pour unité graphique.
On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = -\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)z - 1 + \mathrm{i}\left(1+\sqrt{3}\right).$$

1. Montrer que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i. En déterminer le rapport et l'angle.
2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}\mathrm{i}$.
   Calculer ΩM_0 et donner une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_0}\right)$.
3. On considère la suite de points $(M_n)_{n\geqslant 0}$, définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

   a. Placer les points Ω, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

   b. Montrer par récurrence, pour tout entier naturel n, l'égalité : $z_n - \mathrm{i} = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - \mathrm{i})$.

   c. Pour tout entier naturel n, calculer ΩM_n puis déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega M_n \geqslant 10^2$.
4. On considère l'équation $(E) : 7x - 12y = 1$ où x et y sont deux entiers relatifs.

   a. Après avoir vérifié que le couple $(-5\,;-3)$ est solution, résoudre l'équation (E).

   b. Soit Δ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $\mathrm{Im}(z) = 1$ et $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$.
   Caractériser géométriquement Δ et le représenter.
   Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur $\vec{u}$. Préciser son plus petit élément.

Exercice 14 Polynésie, juin 2003

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$, d'unité graphique 2 cm.

On donne les points A, C, D et Ω, d'affixes respectives $1+\mathrm{i}$, 1, 3 et $2+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

Partie A

1. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω passant par A.

   a. Montrer que $\mathscr{C}$ passe par C et D.

   b. Montrer que le segment $[AD]$ est un diamètre de $\mathscr{C}$.

   c. Sur une feuille de papier millimétré, faire une figure en plaçant les points A, C, D, Ω et tracer $\mathscr{C}$. On note B la seconde intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite (OA).

   d. Montrer que le point O est extérieur au segment $[AB]$.

2. Montrer par un raisonnement géométrique simple que les triangles OAD et OCB sont semblables mais non isométriques.
3. Soit S la similitude qui transforme le triangle OCB en le triangle OAD.
   a. Montrer que S est une similitude indirecte différente d'une réflexion.
   b. Quel est le centre de S ?

Partie B

1. a. Déduire de la partie **A.2** que l'on a $OA \times OB = OC \times OD$.
   b. En déduire le module de l'affixe z_B du point B. Déterminer un argument de z_B.
2. Déterminer l'écriture complexe de S.
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S \circ S$.

Exercice 15 Inde, avril 2003

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

PREMIÈRE PARTIE

ABC est un triangle direct du plan orienté.
On désigne respectivement par I, J et K les milieux de $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.
Soit α un réel qui conduit à la réalisation de la figure jointe sur laquelle on raisonnera. Cette figure sera jointe à la copie.
d_1 est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle α.
d_2 est l'image de la droite (BC) par la rotation de centre J et d'angle α.
d_3 est l'image de la droite (CA) par la rotation de centre K et d'angle α.
A_1 est le point d'intersection de d_1 et d_3, B_1 celui de d_1 et d_2 et C_1 celui de d_2 et d_3.

1. On appelle H le point d'intersection de (BC) et d_1. Montrter que les triangles HIB et HB_1J sont semblables.
2. En déduire que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables.

DEUXIÈME PARTIE

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

A - Construction de la figure

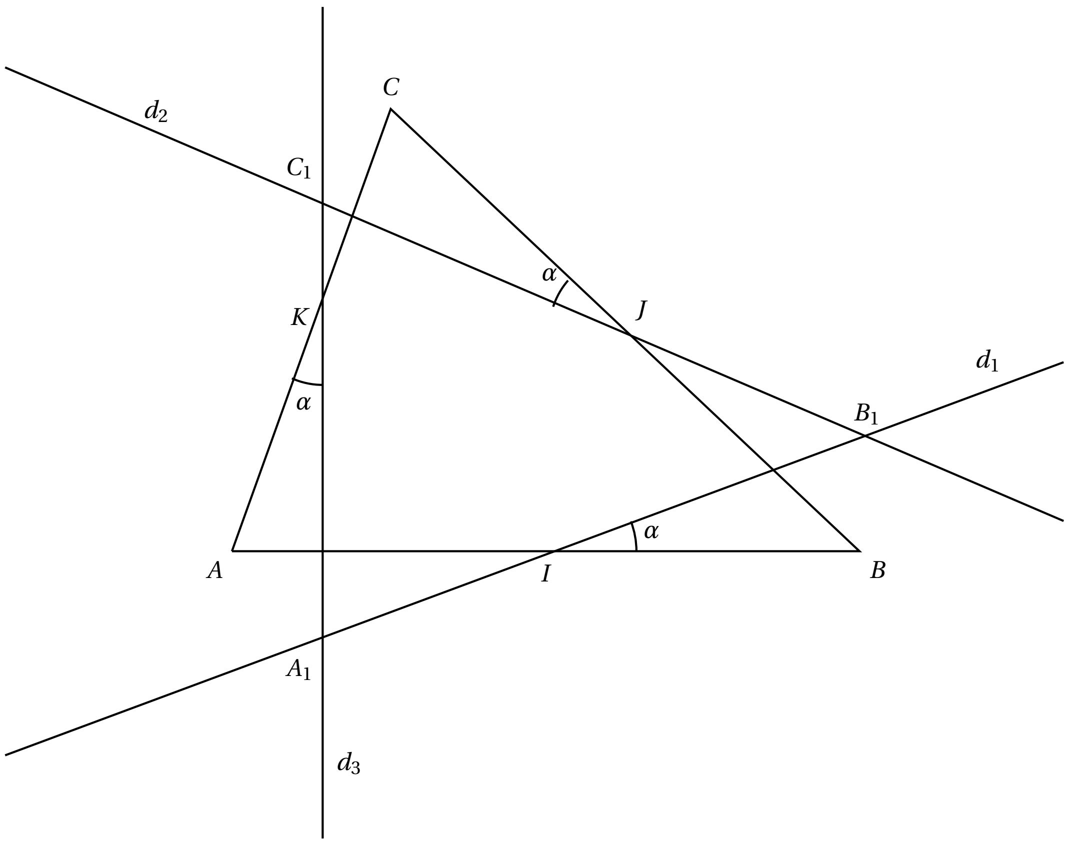
1. Placer les points $A(-4-6\imath)$, $B(14)$, $C(-4+6\imath)$, $A_1(3-7\imath)$, $B_1(9+5\imath)$ et $C_1(-3-\imath)$.
2. Calculer les affixes des milieux I, J et K des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. Placer ces points sur la figure.
3. Montrer que A_1, I, B_1 sont alignés.
   On admettra que B_1, J, C_1 d'une part et C_1, K, A_1 d'autre part sont alignés.
4. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{IB},\ \overrightarrow{IB_1}\right)$.
   On admettra que $\left(\overrightarrow{KA},\ \overrightarrow{KA_1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ *et que* $\left(\overrightarrow{JC},\ \overrightarrow{JC_1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
5. Quelle est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$?

B - Recherche d'une similitude directe transformant ABC en $A_1B_1C_1$

On admet qu'il existe une similitude directe s transformant les points A, B et C en A_1, B_1 et C_1.

1. Montrer que l'écriture complexe de s est $z' = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\imath\right) z + 2 - 2\imath$, où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point et de son image par s.
2. a. Déterminer le rapport et l'angle de s.
   b. Déterminer l'affixe du centre Ω de s.
3. Que représente le point Ω pour le triangle ABC ?

Le candidat joindra cette figure à sa copie



Exercice 16 Antilles-Guyane, septembre 2002

Dans le plan, on considère deux segments $[AC]$ et $[BD]$ tels que :

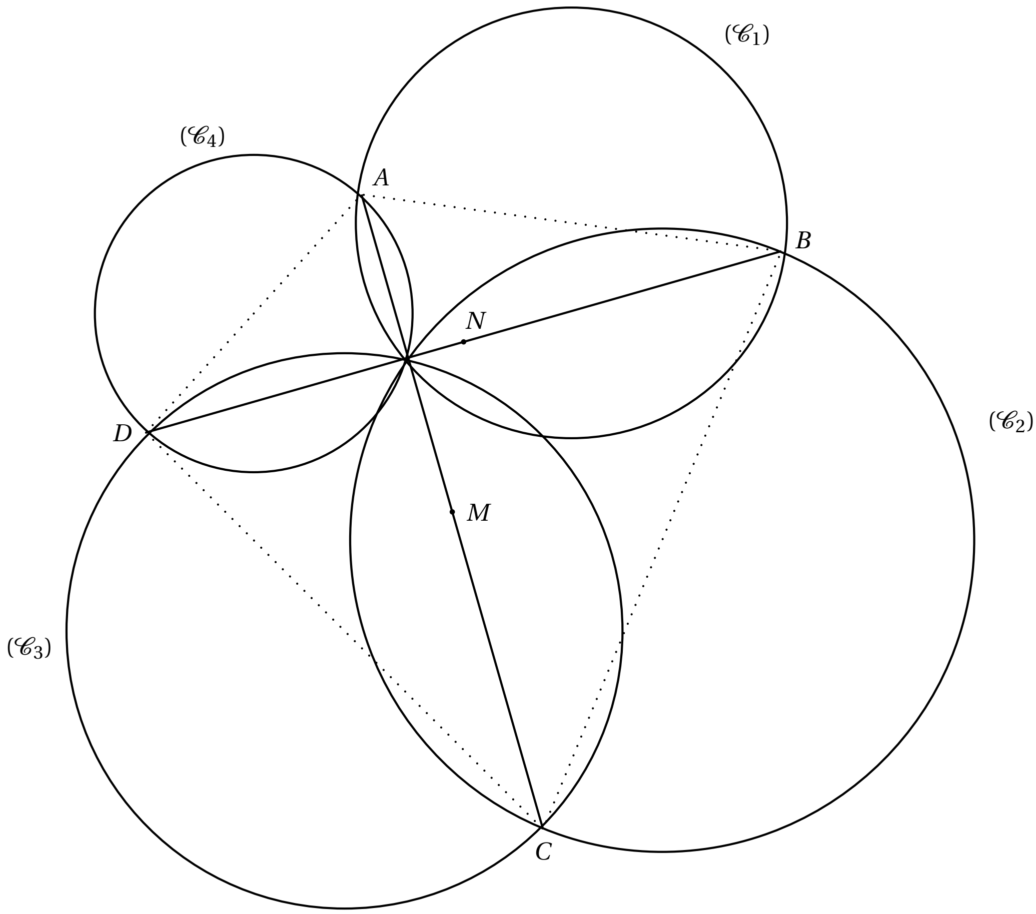
$$AC = BD \qquad \text{et} \qquad \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD}}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

On désigne par M le milieu de $[AC]$ et par N celui de $[BD]$. On appelle $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$, $(\mathscr{C}_3)$ et $(\mathscr{C}_4)$ les cercles de diamètres respectifs $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
On pourra s'aider de la figure ci-jointe.

1. a. Soit r la rotation qui transforme A en B et C en D. Quel est l'angle de r ?
   Montrer que le centre I de r appartient aux cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_3)$.
   b. Soit r' la rotation qui transforme A en D et C en B. Quel est l'angle de r' ?
   Montrer que le centre J de r' appartient aux cercles $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_4)$.

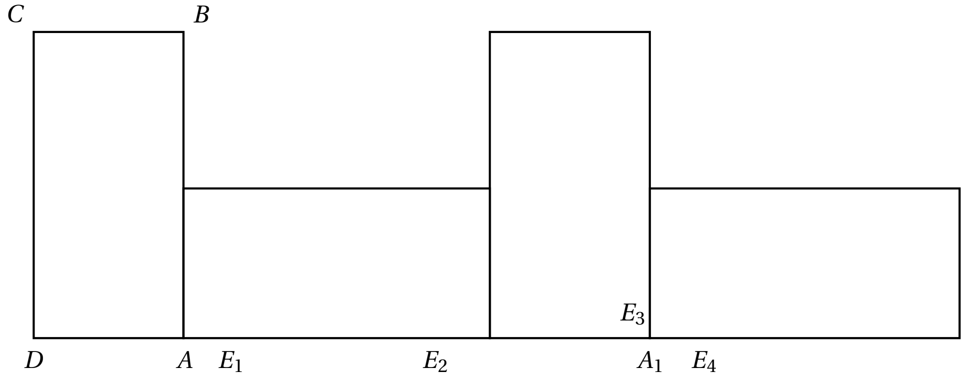
c. Quelle est la nature du quadrilatère $INJM$?
On désigne par P et R les points diamétralement opposés à I sur, respectivement, $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_3)$ et par Q et S les points diamétralement opposés à J sur, respectivement, $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_4)$.

2. Soit s la similitude directe de centre I, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
   a. Quelles sont les images par s des points D, N, B ?
   b. En déduire que J est le milieu de $[PR]$.



Exercice 17 France, septembre 2002

On considère un rectangle direct $ABCD$ vérifiant : $AB = 10$ cm et $AD = 5$ cm.



1. Faire une figure : construire $ABCD$, puis les images respectives M, N et P de B, C et D par la rotation r de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
2. a. Construire le centre Ω de la rotation r' qui vérifie $r'(A) = N$ et $r'(B) = P$. Déterminer l'angle de r'.
   b. Montrer que l'image de $ABCD$ par r' est $AMNP$.
   c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r^{-1} \circ r'$.
3. On considère les images successives des rectangles $ABCD$ et $AMNP$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{DM}$. Sur la demi-droite $[DA)$, on définit ainsi la suite de points $(A_k)_{k\geqslant 1}$ vérifiant, en cm, $DA_k = 5+15k$. Sur la même demi-droite, on considère la suite de points $(E_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant, en cm, $DE_n = 6,55n$.
   a. Déterminer l'entier k tel que E_{120} appartienne à $[A_k, A_{k+1}]$. Que vaut la longueur A_kE_{120} en cm ?
   b. On cherche dans cette question pour quelle valeur minimale n_0 le point E_{n_0} est confondu avec un point A_k.
   Montrer que si un point E_n est confondu avec un point A_k alors $131n - 300k = 100$.
   Vérifier que les nombres $n = 7\,100$ et $k = 3\,100$ forment une solution de cette équation.
   Déterminer la valeur minimale n_0 recherchée.

Exercice 18 Amérique du Nord, juin 2002

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ [unité graphique : 6 cm].
On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}.$$

On définit une suite de points (M_n) de la manière suivante : M_0 a pour affixe $z_0 = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On appelle z_n l'affixe de M_n.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. Placer les points M_0, M_1, M_2.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité :
   $$z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}.$$
   (On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.)
3. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p. Montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si et seulement si $(n-p)$ est multiple de 12.
4. a. On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs.
   Après avoir vérifié que le couple $(4;9)$ est solution, résoudre l'équation (E).
   b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$.

Exercice 19 Antilles-Guyane, juin 2002

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ (unité graphique : 4 cm).

1. On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives : $z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, $z_B = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$, $z_C = -1$, $z_D = -\mathrm{i}$ et $z_E = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
   a. Faire la figure.
   b. Montrer que $EA = ED$ et que $EB = EC$. Montrer que (OE) est la médiatrice du segment $[AD]$ et du segment $[BC]$.
   c. Déterminer les points K et L images respectives de A et de B par la translation t de vecteur $\overrightarrow{OI}$. Placer les points K et L sur la figure.

2. On considère l'application F qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
   a. Justifier l'égalité $F = R \circ S$ où S est la réflexion ou symétrie axiale d'axe (OI) et R une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
   b. Montrer que F est une réflexion dont on précisera l'axe.
3. Soit G l'application qui, à tout point M d'affixe z associe le point M'' dont l'affixe z'' est définie par la formule $z'' = \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} + 1$.
   Déterminer une application T telle que $G = T \circ F$. En déduire que G est un antidéplacement.

Exercice 20 La Réunion, juin 2002

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O~;~\overrightarrow{u}~;~\overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. Dans cette question, on considère l'application s du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -\mathrm{i}\overline{z}$.
   a. Montrer que s est une réflexion d'axe noté D et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $1 - \imath$.
   b. Soit D' la droite d'équation $y = -1$, on appelle s' la réflexion d'axe D'.
   Calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{w},~\overrightarrow{u}\right)$. Déterminer géométriquement la composée $r = s' \circ s$.
   c. Déterminer l'écriture complexe de r.
2. Dans cette question, on considére l'application p du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe $z_1 = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\mathrm{i}\overline{z} = \frac{z + z'}{2}$.
   a. Soit le point A d'affixe $z = 2 + \imath$, déterminer l'affixe du point A_1 image de A par p.
   b. Montrer que tout point M a son image M_1 située sur la droite d'équation $y = -x$.
   c. Définir géométriquement, en utilisant les questions précédentes, l'application p.
3. On considère l'application f définie par $f = s' \circ p$.
   a. Construire l'image A' du point A par f.
   b. Montrer que $s \circ p = p$ et en déduire que $f = r \circ p$.
   c. Montrer que tout point M du plan a son image par f sur une droite Δ, que l'on déterminera et que l'on représentera sur la figure.

Exercice 21 Polynésie, septembre 2001

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(A~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$, unité graphique 1 cm, on considère les points B, D définis par : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{v}$ et C tel que $ABCD$ soit un rectangle.
On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. Déterminer l'affixe z_E de E.
2. Déterminer les nombres réels a, b tels que le point F d'affixe $z_F = 6 - \imath$ soit le barycentre des points A, B, C affectés des cœfficients a, b et 1.
3. On considère la similitude s qui transforme A en E et B en F. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z', image de M par s.
   a. Exprimer z' en fonction de z.
   b. Déterminer le centre I, l'angle et le rapport de la similitude s.

c. Déterminer les images de C et de D par s.

d. Calculer l'aire de l'image par s du rectangle $ABCD$.

4. a. Déterminer l'ensemble Ω des points M du plan tels que :

$$\left\|6\overrightarrow{MA}-10\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=9.$$

b. Déterminer, en précisant ses éléments caractéristiques, l'image de Ω par s.

Exercice 22 Asie, juin 2001

On se place dans le plan, rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.

1. On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z'=\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}.$$

a. Exprimer $(f\circ f)(z)$ en fonction de z.

b. Montrer que $f=R\circ S$, où R est une rotation et S une symétrie axiale (on déterminera les éléments caractéristiques de ces deux applications R et S).

c. Décomposer R à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que f est une réflexion, dont on donnera l'axe (D_1). Réaliser une figure, en y représentant l'axe (D_1) (unité graphique : 2 cm).

2. On considère l'application g qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M'' d'affixe z'' telle que :

$$z''=\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

a. Déterminer une équation de l'ensemble des points invariants de g.

b. Montrer que $g=T\circ f$ où T est une translation (on précisera l'affixe du vecteur de la translation T).

c. Décomposer la translation T à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que g est une réflexion, d'axe noté (D_2).

d. Quelle est l'image par g du point A d'affixe $\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$?
En déduire une construction de la droite (D_2), qui n'utilise pas son équation, et l'illustrer en complétant la figure précédente.

Exercice 23 Liban, juin 2001

On suppose le plan rapporté au repère orthonormal direct $\left(\Omega\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$, unité graphique 3 cm.

Partie A

Soit trois droites D_1, D_2 et D_3, sécantes en Ω et de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{d_1}=\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{d_2}$ et $\overrightarrow{d_3}$ supposés unitaires et tels que $\left(\overrightarrow{d_1},\,\overrightarrow{d_2}\right)=\frac{\pi}{4}$ et $\left(\overrightarrow{d_1},\,\overrightarrow{d_3}\right)=-\frac{2\pi}{3}$.
On note S_1, S_2 et S_3 les réflexions d'axes respectifs D_1, D_2 et D_3, et f la composée $S_3\circ S_2\circ S_1$, de ces trois réflexions.

1. Tracer ces trois droites.
2. a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r=S_2\circ S_1$.

b. Caractériser la réflexion S telle que $r = S_3 \circ S$. On notera D l'axe de S et on en déterminera un point et un vecteur directeur $\overrightarrow{d}$. Tracer la droite D.

c. En déduire la nature de f et ses éléments caractéristiques.

3. Justifier que le point E d'affixe $z_E = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{12}}$ est un point de la droite D.
Déterminer les nombres complexes a et b tels que la forme complexe de f soit l'application f_1 définie sur $\mathbb{C}$ par $f_1(z) = a\overline{z} + b$.

Partie B

1. Choisir un point A sur D. On note B l'image de A par S_1 et C l'image de B par S_2.
Placer les points B et C.
2. Démontrer que A est l'image de C par S_3.
3. Que peut-on dire du point Ω pour le triangle ABC ?

Exercice 24 Amérique du Sud, novembre 2000

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2cm). On désigne par m un nombre réel. On considère la transformation T_m du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = (m + \mathrm{i})z + m - 1 - \mathrm{i}.$$

Partie A

1. Peut-on choisir m de telle sorte que T_m soit une translation ?
2. Déterminer le réel m de telle sorte que T_m soit une rotation. Préciser alors le centre et l'angle de cette rotation.

Partie B

Dans la suite de l'exercice on pose $m = 1$.

1. a. Calculer l'affixe du point Ω invariant par T_m.

   b. Pour tout nombre complexe z différent de 1, calculer $\dfrac{z'-1}{z-1}$.

   En interprétant géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z'-1}{z-1}$, démontrer que T_1 est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

   c. Démontrer que, pour tout nombre z on a : $z' - z = \imath(z-1)$. En déduire que si M est distinct de Ω, alors le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle en M.

2. On définit dans le plan une suite (M_n) de points en posant :

$$M_0 = O,\ M_1 = T_1(M_0),\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul : } M_n = T_1(M_{n-1}).$$

   a. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan muni du repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.

   b. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = \Omega M_n$. Démontrer que la suite (d_n) est une suite géométrique. Converge-t-elle ?

Exercice 25 France, septembre 2000

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O\,;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 4 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = 1, \quad b = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

1. a. Donner la forme exponentielle de c et la forme algébrique de d.
   b. Représenter les points A, B, C et D.
   c. Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un losange.
2. Montrer que les points D, A et C sont alignés.
3. Déterminer l'angle ϑ et le rapport k de la similitude directe s de centre O qui transforme A en C.
4. On note F et G les images par la similitude directe s des points D et C respectivement. Montrer que les points F, C et G sont alignés.
5. Déterminer l'affixe f du point F.
6. On considère la transformation φ qui à tout point M, d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}\overline{z} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

   Pour toute droite δ du plan, on notera σ_δ la symétrie orthogonale d'axe δ.

   a. Soit r la transformation qui à tout point M_1 d'affixe z_1, associe le point M_1' d'affixe z_1', telle que :

$$z_1' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z_1 + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

   Déterminer la nature de r et donner ses éléments caractéristiques.

   b. En utilisant les nombres complexes, donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{AB}\right)$, puis déterminer la droite Δ telle que :

$$r = \sigma_\Delta \circ \sigma_{(AO)}.$$

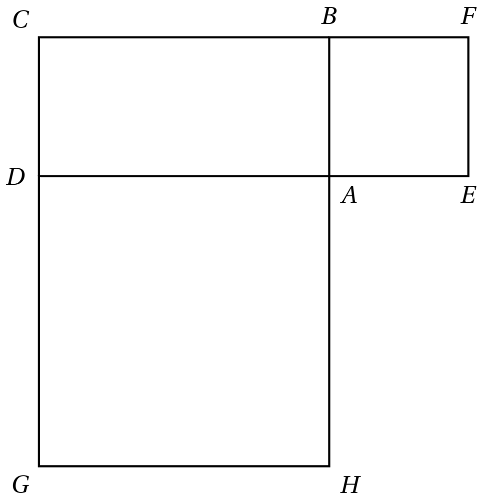
   c. Montrer que $\varphi = r \circ \sigma_{(AO)}$. En déduire la nature de φ.

Exercice 26 Polynésie, septembre 2000

Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un rectangle de sens direct, $AEFB$ et $ADGH$ sont des carrés de sens direct.

1. Le but de cette première question est de démontrer que les droites (AC), (EG) et (FH) sont concourantes.
   Pour cela on note I le point d'intersection des droites (EG) et (FH) et on introduit :
   - l'homothétie h_1 de centre I qui transforme G en E ;
   - l'homothétie h_2 de centre I qui transforme F en H.

   a. Déterminer l'image de la droite (CG) par l'homothétie h_1 puis par la composée $h_2 \circ h_1$.
   b. Déterminer l'image de la droite (CG) par la composée $h_1 \circ h_2$.
   c. Justifier l'égalité : $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$.
   En déduire que la droite (AC) passe aussi par le point I.



2. On se propose ici de démontrer que la médiane issue du sommet A du triangle AEH est une hauteur du triangle ABD. On note O le milieu du segment $[EH]$.
   a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AO}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AH}$.
   b. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BD}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BD}$ et conclure.
3. Dans cette question, on étudie la similitude directe S qui transforme A en B et D en A.
   On pose $AB = 1$ et $AD = k \quad (k > 0)$.
   a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude S.
   b. Déterminer l'image de la droite (BD), puis l'image de la droite (AO), par cette similitude S.
   c. En déduire que le point d'intersection Ω des droites (BD) et (AO) est le centre de la similitude S.

Exercice 27 Amérique du Nord, juin 2000

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct OAB, rectangle et isocèle en O.

On a donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On note R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et de même angle $\dfrac{\pi}{2}$ et S_O la symétrie de centre O.

On place un point C, non situé sur la droite (AB), on trace les carrés $BEDC$ et $ACFG$ directs. On a donc $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

1. a. Déterminer $S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$ composée des réflexions d'axes (AB) et (AO).
   b. En écrivant R_B sous la forme d'une composée de deux réflexions, démontrer que $R_A \circ R_B = S_O$.
2. a. Déterminer l'image de E par $R_A \circ R_B$.
   b. En déduire que O est le milieu du segment $[EG]$.
   c. On note R_F et R_D les rotations de centres respectifs F et D et de même angle.
   Étudier l'image de C par la transformation $R_F \circ S_O \circ R_D$.
   Déterminer la transformation $R_F \circ S_O \circ R_D$.
   d. Placer H le symétrique de D par rapport à O.
   Démontrer que $R_F(H) = D$. Démontrer que le triangle FOD est rectangle et isocèle en O.

Exercice 28 Centres étrangers, juin 2000

Dans le plan orienté, on considère un losange $ABCD$ tel que $AB = BC = CD = DA = 5$ et $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{3}$.
On désigne par I, J, K, L et O les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ et $[BD]$.
On note (Δ) la médiatrice de $[AB]$ et (Δ') la médiatrice de $[CD]$.

1. Soit f l'isométrie du plan définie par $f(A) = B,\ f(B) = O,\ f(D) = C$.
   a. Prouver que f est un antidéplacement.
   b. Démontrer que s'il existe un point M invariant par f, alors M est équidistant des points A, B, C, D.
   c. L'isométrie f admet-elle un point invariant ?
2. Soit σ la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et r la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.
   a. Démontrer que $f = r \circ \sigma$.
   b. A-t-on $f = \sigma \circ r$?
3. Soit s_1 la symétrie orthogonale d'axe (BC).
   a. Déterminer l'axe de la symétrie orthogonale s_2, telle que $r = s_2 \circ s_1$.
   b. En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = s_1 \circ t_1$, où t_1 est une translation que l'on précisera.
4. Soit t_2 la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; on note t_2^{-1} sa réciproque et on pose $g = t_2^{-1} \circ f$.
   a. Déterminer $g(D),\ g(I),\ g(O)$. En déduire la nature précise de la transformation g.
   b. Démontrer que $f = t_2 \circ g$. A-t-on $f = g \circ t_2$?

Exercice 29 France, juin 2000

Dans le plan orienté, on considère deux points A et B et le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.
Pour la figure, on prendra comme unité de longueur le centimètre et $AB = 16$. Cette figure sera complétée au fur et à mesure.
Soit un point C, distinct de A, tel que $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
La droite parallèle à (BC) passant par E coupe la droite (AC) en F.
On appelle I le milieu de $[BC]$, J le milieu de $[EF]$ et D le point d'intersection des droites (EC) et (BF).
On note h_A l'homothétie de centre A qui transforme B en E et h_D l'homothétie de centre D qui transforme E en C.

1. Déterminer $h_A(C)$ puis $h_D(F)$.
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $h_D \circ h_A$ puis de $h_A \circ h_D$.
3. On appelle E' l'image de E par h_A et E'' l'image de E' par h_D.
   Représenter E', puis construire E'' en justifiant la construction.
4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h_D \circ h_A \circ h_A \circ h_D$.
5. Montrer que le quadrilatère $BECE''$ est un parallélogramme.
6. On appelle (Δ) l'ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AM}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
   (Δ) est donc une demi-droite ouverte d'origine A.
   Pour la suite, les points A, B, E sont fixes et le point C décrit (Δ).
   Déterminer et construire le lieu géométrique (Δ'') du point E''.

Exercice 30 Liban, juin 2000

1. Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$. Soient A et B les points d'affixes respectives $a = 1+\text{i}$; $b = -4-\text{i}$. Soit f la transformation du plan $\mathscr{P}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.
   a. Exprimer z' en fonction de z.
   b. Montrer que f admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
2. On se place dans le cas où les coordonnées x et y de M sont des entiers naturels avec $1 \leqslant x \leqslant 8$ et $1 \leqslant y \leqslant 8$. Les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ de M' sont alors : $x' = 3x+2$ et $y' = 3y-1$.
   a. On appelle G et H les ensembles des valeurs prises respectivement par x' et y'. Écrire la liste des éléments de G et H.
   b. Montrer que $x' - y'$ est un multiple de 3.
   c. Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité. On se propose de déterminer tous les couples $(x'\ ;\ y')$ de $G \times H$ tels que $m = x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60.
   d. Montrer que dans ces conditions, le nombre $x' - y'$ est un multiple de 6. Le nombre $x' - y'$ peut-il être un multiple de 30 ?
   e. En déduire que, si $x'^2 - y'^2$ est un multiple non nul de 60, $x' + y'$ est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples $(x'\ ;\ y')$ qui conviennent.
   En déduire les couples $(x\ ;\ y)$ correspondant aux couples $(x'\ ;\ y')$ trouvés.

Années 90

Exercice 31 Sportifs de haut niveau, octobre 1999

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

1. On note A, B et C les points d'affixes respectives $2\imath$, $-1+4\imath$ et $5+2\imath$.
   On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{BC}$, la symétrie S d'axe (AB) et la transformation $f = t \circ S$.
   On désigne par A' et B' les images respectives de A et B par f. Calculer les affixes de A' et B' et placer les points A, B, C, A' et B' sur une figure.
2. On rappelle que l'écriture complexe d'un antidéplacement est de la forme $z' = a\overline{z}+b$ où a et b sont deux nombres complexes et $|a| = 1$.
   À tout point M d'affixe z, f associe le point M' d'affixe z'.
   Justifier que f est un antidéplacement et démontrer que :
   $$z' = \frac{-3-4\imath}{5}\overline{z}+\frac{38-6\imath}{5}.$$
3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f. La transformation f est-elle une symétrie ?
4. On appelle D le point d'affixe $3+6\imath$, Δ la médiatrice de $[BD]$ et S' la symétrie d'axe Δ.
   a. Montrer que les droites Δ et (AB) sont parallèles. Déterminer $S \circ S$.
   b. Montrer que $f \circ S'$ est la translation, notée t', de vecteur $\overrightarrow{DC}$. En déduire que $f = t' \circ S'$.

Exercice 32 Antilles-Guyane, septembre 1999

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\ \vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath}\right)$.
On donne le point $A(6\,;0)$ et le point $A'(0\,;2)$.
À tout point M de l'axe des abscisses différent de A on associe le point M' tel que :

$$AM = A'M' \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{A'M'}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\text{mod } 2\pi).$$

On admet l'existence et l'unicité de M'.
On réalisera une figure avec, pour unité graphique 0,5 cm et pour cette figure, on prendra -4 pour abscisse de M.

1. Soit M un point de l'axe des abscisses différent de A.
   a. Placer le point M' sur la figure.
   b. Pour cette question on pourra donner une démonstration purement géométrique ou utiliser les nombres complexes.
   Démontrer qu'il existe une unique rotation, dont on précisera le centre, noté I et l'angle, qui transforme A en A' et M en M'.
   Placer I sur la figure.
   c. Démontrer que la médiatrice de $[MM']$ passe par I.
2. On veut déterminer et construire les couples de points $(M\,;\ M')$ vérifiant la condition supplémentaire $MM' = 20$.
   a. Calculer IM et démontrer qu'il existe deux couples solutions : $(M_1\,;M_1')$ et $(M_2\,;M_2')$.
   b. Placer ces quatre points sur la figure.

Exercice 33 France, septembre 1999

Soit le repère orthonormal direct $\left(O\,;\ \vec{u}\,;\ \vec{v}\right)$ du plan complexe. Les points A, B et C sont définis par leurs affixes respectives :

$$z_A = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3}\,;\ z_B = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}\,;\ z_C = 2 + \sqrt{3} + 3\mathrm{i}.$$

1. Faire la figure en choisissant pour unité graphique 2 cm. (On placera l'origine sur la gauche de la feuille).
2. Prouver que OAB est un triangle équilatéral direct. Soit G le centre de gravité du triangle OAB. Déterminer l'affixe z_G de G.
   Dans la suite de l'exercice, on étudie deux isométries transformant $[OA]$ en $[GC]$.
3. Soit a et b deux nombres complexes et R l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = az + b$.
   a. Déterminer a et b pour que $R(O) = G$ et $R(A) = C$.
   b. Prouver que R est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.
   c. Prouver que les droites (OA) et (GC) sont perpendiculaires. Que peut-on dire des points G, B et C ?
   d. Construire, en justifiant la construction, l'image du triangle OAB par R.
4. Soit a' et b' deux nombres complexes et f l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = a'\overline{z} + b'$.
   a. Déterminer a' et b' pour que $f(O) = G$ et $f(A) = C$.
   b. Soit I le milieu du segment $[OG]$. Déterminer le point $f(I)$. f est-elle une réflexion ?
   c. Construire en justifiant la construction, l'image du triangle OAB par f.

Exercice 34 La Réunion, juillet 1999

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On considère l'application f qui, à chaque point M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
On désigne par A et B les points d'affixes respectives $-\text{ı}$ et ı.

1. Soit C_1 le cercle de centre A et de rayon 1, privé de O.
   a. Pour tout nombre complexe z non nul, démontrer que :
   $$|z' + \text{ı}| = |z'| \quad \text{équivaut à} \quad |z + \text{ı}| = 1.$$
   b. En déduire l'ensemble C_1', image de C_1 par f.
   c. Tracer C_1 et C_1' sur une même figure.
2. Soit C_2 le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
   a. Montrer que, pour tout nombre complexe z non nul,
   $$|z' - \text{ı}|^2 = 2 \quad \text{équivaut à} \quad |z + \text{ı}|^2 = 2 \quad \text{(on pourra utiliser } |Z|^2 = Z\overline{Z}).$$
   b. En déduire l'ensemble C_2', image de C_2 par f.
   c. Tracer C_2 et C_2' sur la figure précédente.
3. a. Donner l'écriture complexe de la similitude directe σ de centre Ω d'affixe $1 + \text{ı}$, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   b. Montrer que $\sigma \circ f$ est l'application qui, à chaque point M d'affixe z non nulle, associe le point M'' d'affixe z'' telle que $z'' = \dfrac{2\text{ı} + (3 - \text{ı})\overline{z}}{\overline{z}}$.
   c. À l'aide des questions précédentes, déterminer les ensembles Γ_1 et Γ_2 images respectives de C_1 et C_2 par $\sigma \circ f$.
   d. Tracer les ensembles Γ_1 et Γ_2 sur la figure précédente.

Exercice 35 Antilles-Guyane, septembre 1998

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$.
On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure les points introduits dans le texte (unité graphique : 2 cm).

1. a. Résoudre l'équation $(E) : z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.
   b. On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + \text{ı}$ et $z_2 = \sqrt{3} - \text{ı}$ et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2 ; placer M et N sur la figure.
   c. Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{w} = -2\vec{u}$. Placer P et Q sur la figure. Montrer que $MNPQ$ est un carré.
2. Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.
   Placer ces points sur la figure.
   Calculer les affixes de R et de S. Montrer que S appartient au segment $[MN]$.
3. On pose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$.
   a. Montrer que $1 + \alpha^2 = 4\alpha$ et $1 - \alpha^2 = 2\alpha\sqrt{3}$.
   b. Exprimer les affixes z de $\overrightarrow{PR}$ et z' de $\overrightarrow{PS}$ en fonction de α.

c. Montrer que $|z| = |z'|$ et $\dfrac{z}{z'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

d. Déduire des questions précédentes la nature du triangle PRS.

Exercice 36 Antilles-Guyane, juin 1998

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.
On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{2}\mathrm{i}z + \frac{1-3\mathrm{i}}{2}.$$

1. Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω, le rapport k et l'angle ϑ.
2. Soit M_0 le point d'affixe $1+4\sqrt{3}+3\mathrm{i}$. Pour tout entier naturel n, le point M_{n+1} est défini par $M_{n+1} = f(M_n)$.
   a. En utilisant la question **1.**, calculer ΩM_n en fonction de n.
   b. Placer le point M_0 et construire les points M_1, M_2, M_3 et M_4.
   c. À partir de quel rang n_0 a-t-on : « pour tout $n \geqslant n_0$, M_n appartient au disque de centre Ω et de rayon $r = 0,05$ » ?
3. a. Calculer M_0M_1.
   b. Pour tout entier naturel n, on note $d_n = M_nM_{n+1}$. Montrer que (d_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   c. On note $l_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_n$. Calculer l_n en fonction de n et en déduire la limite de l_n en $+\infty$.
4. Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'isobarycentre des points M_0, M_1, M_2, …, M_n.
   a. Montrer que pout tout $n > 0$, $\Omega G_n \leqslant \dfrac{16}{n+1}$.
   b. En déduire la position limite du point G_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 37 France, 1998

Dans le plan orienté, une unité étant choisie, on considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = \sqrt{2}$, $AD = 1$; $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un angle droit direct ; I désigne le milieu de $[AB]$.

Partie A

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que $MD^2 - MB^2 = 1$.

1. Vérifier que les points C et I appartiennent à $\mathscr{E}$.
2. a. Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}$.
   b. En déduire que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires.

Partie B

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(A\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$ avec :

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}.$$

Soit S une similitude directe qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az+b$, a et b étant des nombres complexes avec $a \neq 0$.

1. Déterminer les nombres a et b pour que $S(D) = C$ et $S(C) = B$.
2. Soit T la similitude directe qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = -\frac{\imath\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + \imath.$$

   Déterminer le rapport et l'angle de T.
3. Montrer que la similitude T transforme B en I.
4. En déduire une autre justification de l'orthogonalité des droites (BD) et (CI).
5. Montrer que le centre Ω de la similitude T est le point d'intersection des droites (BD) et (CI).

Exercice 38 Nouvelle-Calédonie, 1998

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ (unité graphique : 5 cm).
On considère les points A d'affixe $\sqrt{2}$ et B d'affixe i. Soit C le point tel que $OACB$ soit un rectangle. On note I le milieu du segment $[OA]$, J le milieu du segment $[BC]$ et K le milieu du segment $[AI]$.
Placer ces points sur une figure.

1. On considère la transformation s de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', tel que $z' = -\imath\dfrac{\sqrt{2}}{2}z + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \imath$.
   a. Démontrer que s est une similitude dont le centre Ω a pour affixe $\dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1}{3}\imath$ et dont on déterminera le rapport k et une mesure ϑ de l'angle.
   b. Déterminer les images par s des points O, A, B, C.
2. a. Calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}\right)$.
   En déduire que les points A, B, Ω sont alignés.
   b. Démontrer de même que les points I, C, Ω sont alignés.
   c. En déduire une construction de Ω. Placer Ω sur la figure.
3. a. Montrer que Ω appartient aux cercles Γ_1 et Γ_2 de diamètres respectifs $[BC]$ et $[AI]$.
   b. Démontrer que $\overrightarrow{J\Omega}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires.
   c. Démontrer que la droite (ΩO) est la tangente commune à Γ_1 et Γ_2.
   Représenter les cercles Γ_1, Γ_2 et la droite (ΩO) sur la figure.

Exercice 39 Amérique du Nord, juin 1996

Dans le plan orienté, on considère quatre points distincts A, B, C et D se succédant dans le sens trigonométrique sur un même cercle.
D'une manière générale, si M, N, P, Q sont quatre points tels que $M \neq N$ et $P \neq Q$, $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}\right)$ désigne une mesure en radians de l'angle de vecteurs $\left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}}\right)$.

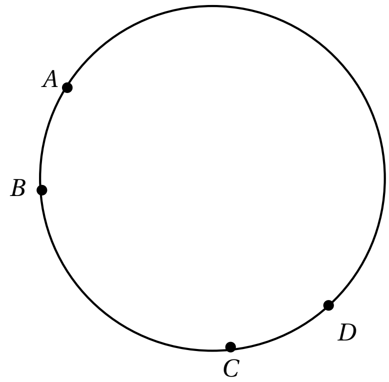
1. Soit S la similitude plane directe de centre A qui transforme C en D. On désigne par E l'image du point B.
   a. Montrer que $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DE}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \pmod{2\pi}$.
   b. Montrer que E est sur la droite (BD). Marquer le point E sur la figure.
   On admettra que E est sur le segment $[BD]$.
   c. Montrer que $AD \times BC = DE \times AC$.
2. a. Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}\right) \pmod{2\pi}$ puis que $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AC}{AB}$.

b. Soit S' la similitude directe de centre A qui transforme B en C.
Montrer que D est l'image de E par cette similitude.

c. Prouver que $AB \times CD = AC \times BE$.

3. Utiliser ce qui précède pour démontrer la relation :

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$



Remarque : *Cette relation est connue sous le nom de théorème de Ptolémée. Ptolémée était un mathématicien et astronome grec du IIe siècle après J.-C. ; il utilisait cette relation pour calculer les longueurs des cordes d'arc de cercle, ancêtres de nos rapports trigonométriques.*

Exercice 40 Centres étrangers groupe 3, juin 1996

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O\,;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$. Cet exercice propose l'étude de l'ensemble (C) des points M du plan dont les affixes vérifient :

$$|(1+\text{i})z-3+3\text{i}|^2+|z-6|^2=54.$$

1. **Première méthode**
   a. En posant $z = x + \text{i}y$, donner une équation cartésienne de (C).
   b. En déduire la nature de (C).
   c. Construire (C).
2. **Deuxième méthode**
   On désigne par s la similitude qui, au point M d'affixe z, associe le point $M_1 = s(M)$ d'affixe $z_1 = (1+\text{i})z-3+3\text{i}$ et on désigne par t la translation qui, au point M d'affixe z, associe le point $M_2 = t(M)$ d'affixe $z_2 = z-6$.
   a. Caractériser géométriquement ces deux transformations.
   b. Déterminer les antécédents respectifs S et T de O par s et t.
   c. Calculer le rapport $\dfrac{SM}{OM_1}$ puis le rapport $\dfrac{TM}{OM_2}$.
   d. En déduire que (C) est la ligne de niveau définie par :
   $$2SM^2 + TM^2 = 54.$$
   e. Calculer l'affixe du barycentre G du système $\{(S, 2), (T, 1)\}$.
   f. Montrer que l'ensemble (C) est défini par $MG^2 = 8$.
   g. En déduire la nature et les éléments qui déterminent (C).

Exercice 41 France 1 bis, juin 1996

Dans le plan orienté, on considère un triangle isocèle ABC tel que :

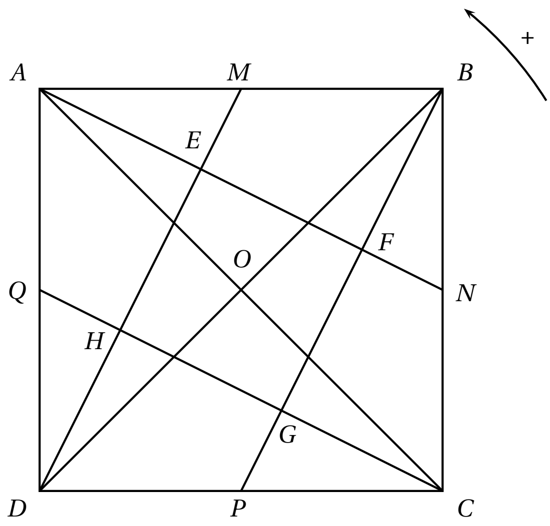
$$AB = AC \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Soit I le point tel que le triangle CAI soit isocèle rectangle avec $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}\right) = -\frac{\pi}{2}$. Pour la figure, que l'on complétera en traitant les questions, on prendra $AB = 5\,\text{cm}$.

1. On appelle r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On pose $f = r_C \circ r_A$.
   a. Déterminer les images par f de A et de B.
   b. Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre O. Placer O sur la figure.
   c. Quelle est la nature du quadrilatère $ABOC$?
2. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A en B. On appelle C' l'image de C par s, H le milieu du segment $[BC]$ et H' son image par s.
   a. Donner une mesure de l'angle de s.
   Montrer que C' appartient à la droite (OA).
   b. Donner l'image par s du segment $[OA]$ et montrer que H' est le milieu de $[OB]$.
   c. Montrer que $(C'H')$ est perpendiculaire à (OB).
   En déduire que C' est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

Exercice 42 France 2 bis, juin 1996

Dans le plan orienté, on considère la figure ci-après.
$ABCD$ est un carré de centre O et tel que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = -\frac{\pi}{2}$.
Les points M, N, P et Q sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
Le but de l'exercice est de prouver que le quadrilatère $EFGH$ est un carré, puis de comparer son aire à celle du carré $ABCD$.



Dans chacune des questions, on énoncera avec précision les propriétés utilisées.

1. **On se propose de démontrer que $EFGH$ est un carré.**
Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   a. Déterminer l'image par r du point N, puis celle du segment $[AN]$.
   Déterminer l'image par r du point P, puis celle du segment $[BP]$.
   En déduire $r(F)$ et la nature du triangle FOG.
   b. Expliquer alors comment terminer la démonstration demandée.
2. **Comparaison des aires des carrés $ABCD$ et $EFGH$.**
   a. Justifier les égalités $AE = EH = DH$ et $AE = 2QH$.
   b. Soit K l'image de H par la symétrie s de centre Q.
   Démontrer que $AEHK$ est un carré et comparer son aire à celle du triangle AED.
   c. En déduire le rapport entre les aires des carrés $ABCD$ et $EFGH$.
3. **Généralisation de la question 1.**
On suppose maintenant que les points M', N', P' et Q' vérifient respectivement les égalités :
$$\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BN'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CP'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DQ'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}.$$
On construit le quadrilatère $E'F'G'H'$ en traçant les droites (AN'), (BP'), (CQ') et (DM').
Que suffit-il de changer à la démonstration du **1.** pour démontrer que $E'F'G'H'$ est un carré ?

Exercice 43 La Réunion, septembre 1995

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
On désigne par r_A la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, r_B la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, r_C la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et par D et E les points tels que : $r_B(A) = D$ et $r_C(D) = E$.

1. Démontrer que $r_C \circ r_B \circ r_A$ est la symétrie centrale de centre B.
Préciser alors la position du point E.
2. On admet qu'il existe une seule similitude plane directe de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$ qui transforme A en B. On nomme $\mathscr{S}$ cette similitude.
Calculer le rapport $\dfrac{BD}{AE}$ ainsi qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD}\right)$.
En déduire que $\mathscr{S}(E) = D$.
3. Soit Ω le centre de la similitude $\mathscr{S}$.
Montrer que Ω appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et DBE. Construire Ω.
4. a. Démontrer que $\mathscr{S}$ transforme la droite (AC) en (CB).
   b. Démontrer que l'image par $\mathscr{S}$ du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre $[BD]$.
   En déduire que l'image de C par la similitude $\mathscr{S}$ est le point I, milieu du segment $[DE]$.

Exercice 44 Amérique du Nord, juin 1995

Soit O, A et B trois points distincts du plan orienté. On note ϑ une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$. On supposera que ϑ est compris strictement entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les rectangles $OPQA$ et $OBRS$ tels que :
$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$; $OP = 2OA$ et $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}\right) = \dfrac{\pi}{2}$; $OS = \dfrac{OB}{2}$.
Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (PB) et (QR) se coupent en un point que l'on note I, et que I appartient au cercle circonscrit au triangle $OBRS$.

1. Faire une figure avec les éléments cités ci-dessus.
2. Soit f la similitude directe de centre O, d'angle $\vartheta + \dfrac{\pi}{2}$ et de rapport $\dfrac{OB}{2OA}$.
   a. Déterminer les images par f des points O, P, A et en déduire celle du point Q.
   b. Grâce à ce qui précède, comparer les angles $\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OR}\right)$ ainsi que les rapports $\dfrac{OQ}{OP}$ et $\dfrac{OR}{OB}$.
3. On munit le plan d'un repère orthonormal direct dont l'origine est le point O et on note z_P, z_Q, z_B et z_R les affixes des points P, Q, B et R.
   a. Montrer que $\dfrac{z_Q}{z_P} = \dfrac{z_R}{z_B}$.
   b. Montrer que l'égalité : $\dfrac{z_R}{z_B} = \dfrac{z_R - z_Q}{z_B - z_P}$ équivaut à celle démontrée à la question précédente.
   c. En déduire l'existence du point I et la cocyclicité des points O, I, B, R.
   Conclure.

Exercice 45 Djibouti - Maroc - Tunisie, juin 1995

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O ; \vec{u} ; \vec{v}\right)$; unité graphique : 5 cm.
A, B, C désignent les points d'affixes respectives a, $\imath$ et -1. On note g l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, associe le point $g(M)$ d'affixe :

$$z' = \frac{a + z + \imath z}{3}.$$

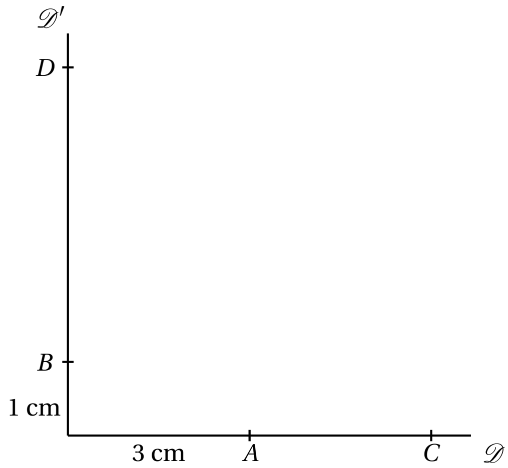
1. a. À tout point M d'affixe z, on fait correspondre le point M_1 d'affixe $\imath z$. On note M' l'isobarycentre des points A, M et M_1.
   Exprimer en fonction de z l'affixe de M'.
   b. Montrer que $g(B) = O$ si et seulement si $a = 1 - \imath$ et que, dans ces conditions, les points O, A, I sont alignés, I désignant le milieu de $[BC]$. Placer les points O, A, B, C, I sur une figure. Dans toute la suite de l'exercice, on prend $a = 1 - \imath$.
2. a. Prouver que g est une similitude directe dont on déterminera le centre Ω, le rapport et l'angle.
   b. Prouver que les points A, B, Ω sont alignés.
3. a. Déterminer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI}\right)$.
   Montrer que l'image de la droite (OB) par g est la droite (OI).
   b. Soit O' l'image de O par g. Montrer que la droite (OO') est l'image par g de la droite (BO).
   c. En déduire que les points I, O, O', A sont alignés.
4. Montrer que les points I et Ω appartiennent au cercle de diamètre $[BO']$.

Exercice 46 Japon, juin 1995

Dans le plan orienté, on considère deux droites orthogonales $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et quatre points distincts A, B, C et D tels que :
A et C sont sur $\mathscr{D}$
B et D sont sur $\mathscr{D}'$
$AC = BD$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ (2π)
$[AC]$ et $[BD]$ n'ont pas même milieu.

1. Un exemple de cette configuration est fourni par la figure jointe au sujet.
   Compléter cette figure au fil des questions et la joindre à la copie.
2. Justifier qu'il existe une rotation r_1 qui transforme A en B et C en D. Déterminer son angle α_1 et construire sur la figure son centre I. (On expliquera la construction.)

3. Justifier qu'il existe une rotation r_2 qui transforme D en A et B en C. Déterminer son angle α_2 et construire sur la figure son centre J. (On expliquera la construction.)
4. On désigne par M le milieu de $[AC]$ et N celui de $[BD]$. Déterminer la nature du quadrilatère $IMJN$.
5. Soit P le point diamétralement opposé à I sur le cercle de diamètre $[AB]$, et Q le point diamétralement opposé à I sur le cercle de diamètre $[CD]$.



   a. Déterminer les angles $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IP}\right)$, $\left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IQ}\right)$ et calculer les rapports $\dfrac{IP}{IA}$ et $\dfrac{IQ}{IC}$.
   b. Préciser l'angle et le rapport de la similitude de centre I qui transforme A en P et C en Q.
   c. En déduire que J est le milieu de $[PQ]$.

Exercice 47 Sportifs de haut niveau, 1995

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. On désigne par s l'application qui à tout point M de $\mathscr{P}$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'\,;\,y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -x - y + 2 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}.$$

1. Déterminer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M.
2. Démontrer que s est une similitude plane directe. Préciser son angle, son rapport et son centre I.
3. Soit g l'application qui à tout point M de $\mathscr{P}$ associe l'isobarycentre G des points M, $M' = s(M)$ et $M'' = s(M')$.
   a. Calculer, en fonction de l'affixe z de M, les affixes des points M'' et G.
   b. Démontrer que g est une similitude plane directe.
   Quel est son centre ?
   c. Déterminer l'affixe du point M_0 tel que $g(M_0)$ soit le point O.
   Reporter sur une figure les points M_0, M_0', M_0'' correspondants, ainsi que le point I, centre de la similitude s.

Exercice 48 Aix-Marseille, 1991

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. On note A le point d'affixe 2. Soit φ l'application de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe Z associe le point $M' = \varphi(M)$ d'affixe Z' définie par $Z' = \dfrac{3+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}Z + \dfrac{1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}$.

1. Déterminer :
   a. L'affixe de l'image $\varphi(A)$ du point A.
   b. L'affixe du point P tel que $\varphi(P) = 0$.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ.
   (On pourra utiliser les résultats de la question **1.**).
3. Lorsque le point M est distinct du point A :
   a. Démontrer que le triangle AMM', où $M' = \varphi(M)$, est rectangle en M'.
   b. Le point M et le milieu du segment $[AM]$ étant donnés, en déduire une construction au compas du point M'.

Exercice 49 France, septembre 1990

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon $R > 0$ et A le point de $\mathscr{C}$ d'affixe R.

Étant donné un entier $n \geqslant 2$, on note r la rotation de centre O d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$.

On considère la suite de points $(M_k)_{k\geqslant 0}$ de $\mathscr{C}$ définie par la relation de récurrence $M_{k+1} = r(M_k)$ et la condition initiale $M_0 = A$.

On note z_k l'affixe de M_k.

1. a. Pour tout $k \geqslant 0$, exprimer z_{k+1} en fonction de z_k.
   b. En déduire l'expression de z_k en fonction de k et n.
   c. Comparer M_n et M_0.
   d. Faire une figure lorsque $n = 16$ (on prendra $R = 4$ cm).
2. a. Prouver que, pour tout $k \geqslant 0$, $M_kM_{k+1} = 2R\sin\dfrac{\pi}{n}$.
   b. On note :
   $$L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_{n-1}M_n$$
   le périmètre du polygone régulier $(M_0, M_1, \ldots, M_n)$.
   Déterminer la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   Interpréter géométriquement le résultat ainsi obtenu.

Exercice 50 Espagne, 1990

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble (C) des points M de $\mathscr{P}$ d'affixe z vérifiant :
   $$\left|\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z - \sqrt{3} - \mathrm{i}\right| = 4.$$
2. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S transformant le point A d'affixe i en O origine du repère et transformant le point B d'affixe $\sqrt{3}$ en B' d'affixe $-4\mathrm{i}$.
   Préciser le centre, le rapport et l'angle de S.
3. En utilisant les résultats établis au **2.** retrouver l'ensemble (C) défini au **1.**

Exercice 51 Paris, 1989

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$, l'unité graphique étant 4 cm, on définit l'application f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = -jz + \imath, \quad \text{où} \quad j = \mathrm{e}^{\imath\frac{2\pi}{3}}.$$

1. Montrer que f admet exactement un point invariant Ω, dont on donnera l'affixe.
   Caractériser géométriquement f.
2. On définit dans $\mathscr{P}$ la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} M_0 = 0 \\ \text{pour tout } n,\ M_{n+1} = f(M_n) \end{cases}.$$

   a. Construire Ω, M_0, M_1, M_2.
   b. Pour tout entier n, on note z_n l'affixe de M_n, et on pose $Z_n = z_n - \mathrm{e}^{\imath\frac{\pi}{6}}$.
   Déterminer un nombre complexe a tel que, pour tout entier n :

$$Z_{n+1} = aZ_n.$$

   Mettre a sous forme trigonométrique et déterminer un entier p strictement positif tel que $a^p = 1$.
   c. Calculer Z_n, puis z_n en fonction de n. Calculer Z_{1989} et placer M_{1989} sur le dessin.

Exercice 52 Amérique du Nord, 1985

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $\left(O\,;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$, on considère l'application F qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = u^2 z + u - 1 \quad \text{où } u \text{ désigne un nombre complexe.}$$

1. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une translation ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.
2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ (en radians) ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une homothétie de rapport -2 ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.
4. Caractériser F lorsque $u = 1 - \imath$.

Exercice 53 Extrême-Orient, 1984

La notation tan désigne la fonction tangente.
Soit $a \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et f_a l'application du plan complexe dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = (1 + \imath \tan a)\, z - \imath \tan a.$$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_a.
2. Soit A le point d'affixe 1 et M un point distinct de A.
   Montrer que si a n'est pas nul alors AMM' est un triangle rectangle.
3. Soit B un point du plan.
   a. Déterminer l'ensemble des points $f_a(B)$ quand a décrit $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.
   b. Déterminer l'ensemble des antécédents de B par f_a quand a décrit $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.