1 Tirage simultané de 3 boules

Chaque tirage est une combinaison de 3 éléments pris dans un ensemble de 7 éléments : le nombre total de tirage est donc $\binom{7}{3}$.

1. Exemple numérique : choisissons $k = 5$.
   Pour obtenir un tirage dont le plus grand numéro est 5, nous devons choisir deux boules dont les numéros sont compris entre 1 et 4 . Voici la liste des possibilités :

   $$\{1,2\} \quad \{1,3\} \quad \{1,4\}$$

   $$\{2,3\} \quad \{2,4\} \quad \{3,4\}$$

   Il est équivalent de dire qu'il faut choisir 2 boules dont les numéros sont compris entre 1 et 4 et qu'il y a $\binom{4}{2}$ possibilités.

   Cas général. Pour obtenir un tirage dont le plus grand numéro est k, nous devons choisir deux boules dont les numéros sont compris entre 1 et $k-1$. Le nombre de possibilités est donc $\binom{k-1}{2}$.

2. Notons T_k l'ensemble des tirages dont le plus grand numéro est k et E l'ensemble de tous les tirages : T_k est une partie de E .
   - les parties T_k sont deux à deux disjointes : pour $j \neq k$ on a $T_j \cap T_k = \emptyset$.
   - d'autre part E est la réunion de tous les T_k lorsque $3 \leqslant k \leqslant 7$.

   Autrement dit les parties T_k forment une partition de E , ce qui entraîne :

   $$\sum_{k=3}^{7} \text{card}\, T_{\,k} = \text{card}\, E \iff \sum_{k=3}^{7} \binom{k-1}{2} = \binom{7}{3}$$

2 Sous-tangentes

1. On cherche d'abord l'équation réduite de la tangente au point M d'abscisse t. Sachant que l'exponentielle est dérivable et qu'elle est égale à sa dérivée, on obtient :

   $$y = e^t(x-t) + e^t$$

   L'abscisse de N est alors solution de $e^t(x-t) + e^t = 0 \iff x = t - 1$.
   La distance de P à N est enfin la valeur absolue de la différence de leurs abscisses :

   $$PN = |t - (t-1)| = 1$$

2. (a) On procède comme dans la question précédente. L'équation réduite de la tangente en M est :

   $$y = f'(t)(x-t) + f(t)$$

   L'abscisse de N est alors solution de $f'(t)(x-t)+f(t) = 0 \iff x = t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}$. Sachant f et f' strictement positives, on en déduit

   $$PN = \left| t - \left[t - \frac{f(t)}{f'(t)} \right] \right| = \frac{f(t)}{f'(t)}$$

   (b) La condition $PN = k$ se traduit par une équation différentielle :

   $$\text{pour tout réel } t : \quad \frac{f(t)}{f'(t)} = k \iff f(t) = k \cdot f'(t) \quad (E_k)$$

   (c) D'après le cours les solutions de (E_k) sont les fonctions $t \mapsto K \cdot e^{kt}$ où K est une constante réelle arbitraire.

3 Complexes : QCM

1. L'écriture algébrique de z tel que $\overline{z} + |z| = 6 + 2i$ est :

   ☒ $\frac{8}{3} - 2i$ ☐ $-\frac{8}{3} - 2i$ ☐ $\frac{8}{3} + 2i$ ☐ $-\frac{8}{3} + 2i$

2. L'ensemble des points d'affixe $z = x + iy$ (x et y réels) tels que $|z - 1| = |z + i|$ est la droite d'équation :

   ☐ $y = x - 1$ ☒ $y = -x$ ☐ $y = -x + 1$ ☐ $y = x$

3. Le nombre $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^n$ est réel si et seulement si n s'écrit :

   ☐ $3k + 1$ ☐ $3k + 2$ ☒ $3k$ ☐ $6k$

4. Une solution de l'équation $z = \dfrac{3 - z}{6 - z}$ est :

   ☐ $-2 - \sqrt{2}i$ ☒ $2 + \sqrt{2}i$ ☐ $1 - i$ ☐ $-1 - i$

5. Soit ABC un triangle équilatéral avec $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Si $z_A = i$ et $z_B = \sqrt{3}$, alors z_C est égal à :

   ☐ $-i$ ☐ $2i$ ☐ $\sqrt{3} + i$ ☒ $\sqrt{3} + 2i$

6. L'ensemble des points d'affixe $z = x + iy$ (x et y réels) tels que $\arg \dfrac{z + 2}{z - 2i} = \dfrac{\pi}{2}$ est inclus dans :

   ☐ La droite d'équation $y = -x$
   ☐ Le cercle de centre $I(1 + i)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$
   ☐ La droite d'équation $y = x$
   ☒ Le cercle de diamètre $[AB]$ où $z_A = -2$ et $z_B = 2i$

4 Fonction irrationnelle et première bissectrice

1. (a) Il s'agit de prouver une éqivalence : on procède donc en deux temps.

   - Supposons d'abord que $\boxed{M \in (\Gamma)}$. Par hypothèse :
   $$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad y = x - 2\sqrt{x} + 1$$
   On a donc $\underline{x \geqslant 0}$.

   On remarque : $y = \left(1 - \sqrt{x}\right)^2$, ce qui entraîne $\underline{y \geqslant 0}$.

   On peut de plus écrire : $\sqrt{y} = \left|1 - \sqrt{x}\right|$. La racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, nous obtenons :
   $$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \left|1 - \sqrt{x}\right| = 1 - \sqrt{x}$$
   On en déduit $\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \iff \underline{\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1}$.

   - Supposons réciproquement : $\boxed{x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1}$.

   On remarque d'abord que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont compris entre 0 et 1. Puisque le carré est croissant sur $\mathbb{R}^+$, il en va de même pour x et y. En particulier $x \in [0, 1]$.

   On a : $y = \sqrt{y}^2 = \left(1 - \sqrt{x}\right)^2 = x - 2\sqrt{x} + 1$.

   Donc $\underline{M \text{ est bien un point de } (\Gamma)}$.

   - L'équivalence est prouvée.

   (b) Le symétrique de M par rapport à la droite d'équation $y = x$ est le point M' dont les coordonnées sont $x' = y$ et $y' = x$. Il suffit d'appliquer le résultat précédent :
   $$\begin{aligned} M \in \Gamma &\iff x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ &\iff y' \geqslant 0 \quad x' \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{y'} + \sqrt{x'} = 1 \\ &\iff x' \geqslant 0 \quad y' \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x'} + \sqrt{y'} = 1 \\ &\iff M' \in \Gamma \end{aligned}$$

2. (a) Par hypothèse la courbe passe par les points $A(0, 1)$ et $B(1, 0)$: ces deux points sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ puisque leurs coordonnées sont échangées. Donc cette droite est la médiatrice de $[AB]$.

   Supposons que Γ est un arc de cercle de centre I : ce point est équidistant de A et B et appartient donc à la droite d'équation $y = x$.

   Sachant $f'(1) = 0$, on peut affirmer que l'axe des abscisses est tangent à Γ en B. Le point I appartient donc à la perpendiculaire en B à l'axe des abscisses et son abscisse est $x_I = 1$.

   On en déduit les coordonnées de I : $x_I = y_I = 1$. Le rayon est donc $IA = IB = 1$.

   (b) Vérifions que le point $C\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ appartient à Γ : $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

   Calculons la distance IC :
   $$IC^2 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} + \frac{9}{16} = \frac{18}{16}$$
   On en déduit $IC = \frac{3\sqrt{2}}{4} \neq 1$. Donc (Γ) n'est pas un arc de cercle.

5 Exponentielle, Logarithme et tangentes

1. (a) Les coordonnées de A sont $x_A = 0$ et $y_A = e^0 = 1$. On sait que $(e^x)' = e^x$.
La droite D a donc pour équation : $y = e^0(x-0) + e^0 \iff \boxed{y = x+1}$.
Les coordonnées de B sont $x_B = 1$ et $y_B = \ln 1 = 0$. On sait que $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
La droite Δ a donc pour équation : $y = \dfrac{1}{1}(x-1) + \ln 1 \iff \boxed{y = x-1}$.
(b) Les droites D et Δ ont le même coefficient directeur , 1 , et sont donc <u>parallèles</u>.
Sachant que Δ a pour équation $y - x + 1 = 0$, nous pouvons calculer la distance de A à Δ :
$$d\,(A,\Delta) = \frac{|1-0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$
Puisque D et Δ sont parallèles, tout point de D est également à la distance $\sqrt{2}$ de Δ.
On vérifie de même que tout point de Δ est à la distance $\sqrt{2}$ de D.

2. (a) Montrons que la différence $d_1(x) = e^x - x - 1$ est toujours positive ou nulle. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel $d_1'(x) = e^x - 1$. Étudions le signe de cette dérivée en utilisant le fait que l'exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$:
$d_1'(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$
$d_1'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$
$d_1'(x) < 0 \iff e^x < 1 \iff x < 0$
On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$d_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$d_1(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

La fonction admettant un minimum en 0, on a pour tout x réel : $d_1(x) \geqslant d_1(0) = 0$.
(b) Montrons que la différence $d_2(x) = x - 1 - \ln x$ est toujours positive ou nulle. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $x > 0$: $d_2'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.
Puisque $x > 0$, cette dérivée est du signe de $x-1$. On en déduit le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$d_2'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$d_2(x)$	$\Vert$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

La fonction admettant un minimum en 1, on a pour tout x réel : $d_2(x) \geqslant d_2(1) = 0$.
(c) Intuitivement, si on relie M et N le segment coupe chaque tangente en M' et N'. On a donc $MN \geqslant M'N'$ et d'après la question précédente, on a $M'N' \geqslant \sqrt{2}$. Mais cela n'a rien de rigoureux.

Une démonstration précise du résultat.
Notons $M\left(t, e^t\right)$ où $t \in \mathbb{R}$ et $N\left(u, \ln u\right)$ où $u \in \mathbb{R}^{+*}$. Considérons un point $P(x,y)$ quelconque de (MN) et posons $\overrightarrow{MP} = \lambda\overrightarrow{MN}$.

Exprimons d'abord les coordonnées de P en fonction des paramètres t , u et λ :

$$x = t + \lambda(u-t) \qquad y = e^t + \lambda\left(\ln u - e^t\right)$$

- Étudions l'intersection de (MN) et de D . Il existe un point d'intersection si et seulement si λ est solution de :

  $$e^t + \lambda\left(\ln u - e^t\right) = t + \lambda(u-t) + 1 \iff \boxed{\lambda\left(e^t - t + u - \ln u\right) = e^t - t - 1}$$

  On a montré pour tout réel t : $e^t \geqslant t+1$ et pour tout $u>0$: $\ln u \leqslant u-1$.
  On en déduit : $e^t - t + u - \ln u \geqslant 2 > 0$. Par conséquent il existe toujours une valeur de λ qui est solution de l'équation et il existe toujours un point d'intersection $P = M'$ pour les droites (MN) et D .
  On a immédiatement : $\lambda = \dfrac{e^t - t - 1}{e^t - t + u - \ln u} \geqslant 0$
  On vérifie : $1 - \lambda = \dfrac{u + 1 - \ln u}{e^t - t + u - \ln u} \geqslant 0$
  Puisque $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, on sait que $\underline{M' \text{ est un point du segment } [MN].}$
- Étudions l'intersection de (MN) et de Δ . Il existe un point d'intersection si et seulement si λ est solution de :

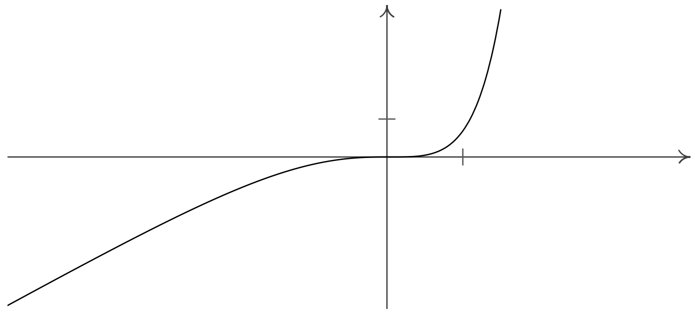
  $$e^t + \lambda\left(\ln u - e^t\right) = t + \lambda(u-t) - 1 \iff \boxed{\lambda\left(e^t - t + u - \ln u\right) = e^t - t + 1}$$

  De nouveau il existe toujours une valeur de λ qui est solution de cette équation et il existe toujours un point d'intersection $P = N'$ pour les droites (MN) et Δ .
  On a immédiatement : $\lambda = \dfrac{e^t - t + 1}{e^t - t + u - \ln u} \geqslant 0$
  On vérifie : $1 - \lambda = \dfrac{u - 1 - \ln u}{e^t - t + u - \ln u} \geqslant 0$
  Puisque $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, on sait que $\underline{N' \text{ est un point du segment } [MN].}$

On peut maintenant écrire $MN \geqslant M'N' \geqslant \sqrt{2}$.

6 Représentation graphique

1. Représentation de la fonction.



2. (a) On peut conjecturer que la fonction est croissante sur $[-5, 4]$

   (b) On peut conjecturer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution sur cet intervalle puisqu'il semble exister un point d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses.

3. (a) Posons $X = e^x$ et étudions le trinôme $X^2 - 2,1X + 1.1$.
   Son discriminant est $\Delta = 0,01 = 0,1^2$. Il a donc deux racines réelles :

   $$X_1 = \frac{2,1 - 0,1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{2,1 + 0,1}{2} = 1,1$$

   D'après le théorème sur le signe du trinôme, ce trinôme est positif ou nul lorsque $X \leqslant 1$ ou lorsque $X \geqslant 1,1$.
   On en déduit que $e^{2x} - 2,1e^x + 1.1 \geqslant 0$ si et seulement si :

   $$e^x \leqslant 1 \quad \text{ou} \quad e^x \geqslant 1,1 \iff x \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \geqslant \ln 1,1$$

   (b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel : :

   $$f'(x) = e^{2x} - 2,1e^x + 1.1$$

   Nous venons d'en étudier partiellement le signe. Voici le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$\ln 1,1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(\ln 1,1)$	$\nearrow$	

   (c) On a touvé une solution puisque $f(0) = 0$ .D'après les variations de f, on sait que pour tout $x < 0$ et tout $x \in]0, \ln 1, 1[$, on a $f(x) < 0$.
   D'autre part, on sait que f est dérivable donc continue, et strictement croissante sur $[\ln 1, 1; \ln 2]$: cette fonction réalise donc une bijection de cet intervalle sur l'intervalle image $[f(\ln 1, 1); f(\ln 2)]$. On vérifie que 0 appartient à l'intervalle image puisque

   $$f(\ln 1, 1) \approx -0,00016 < 0 \quad \text{et} \quad f(\ln 2) \approx 0,16 > 0$$

   Donc l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule dans $[\ln 1, 1; \ln 2]$.
   Enfin $x > \ln 2 \Longrightarrow f(x) > f(\ln 2)$ montre qu'il n'y a pas d'autre solution.
   En résumé, l'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions.

4. On vérifie :

   $$f(-0,05) \approx -0,00016 \quad f(\ln 1,1) \approx -0,00016 \quad f(0,15) \approx 0,00008$$

   Il est donc raisonnable de prendre $-0,0002 \leqslant y \leqslant 0,0001$

7 Suites

1. VRAI
   Par hypothèse, on a pour tout n : $u_n \geqslant 0$. On en déduit $1+u_n > 0$ puis $v_n \geqslant 0$.
   On calcule $1 - v_n = \dfrac{1}{1+u_n}$. La remarque précédente entraîne $1 - v_n > 0$ et donc $v_n \leqslant 1$.
2. VRAI
   Par hypothèse, (u_n) a une limite finie que l'on note l : les théorèmes sur les limites nous garantissent $l \geqslant 0$.
   Le théorème sur la limite d'une somme nous donne $\lim 1+u_n = 1+l > 0$. Puisque ce nombre est différent de 0, on peut appliquer le théorème sur la limite d'un quotient : $\lim v_n = \dfrac{l}{1+l}$.
3. VRAI
   On a montré $1 - v_n = \dfrac{1}{1+u_n}$ ce qui implique $v_n = 1 - \dfrac{1}{1+u_n}$. Calculons la différence :

   $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{1+u_n} - \frac{1}{1+u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} - u_n}{(1+u_n)\,(1+u_{n+1})}$$

   Puisque (u_n) est croissante, nous avons pour tout n : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Nous en déduisons $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ et (v_n) croissante.
4. FAUX
   Un contrexemple est obtenu en posant pour tout n : $u_n = n$. Cette suite est bien positive. On a dans ce cas $v_n = \dfrac{n}{1+n} = 1 - \dfrac{1}{1+n}$ et les théorèmes sur les limites et les opérations nous donnent $\lim v_n = 1$.
   Donc la suite (v_n) est convergente, alors que la suite (u_n) est divergente.

8 Géométrie dans l'espace : QCM

1. Si $A \neq B$ l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left|\left|\overrightarrow{MA}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{MB}\right|\right|$ est :

   ☐ l'ensemble vide ☒ un plan ☐ une sphère

2. Si $E\,(0\,;1\,;-2)$ et $F\,(2\,;1\,;0)$, le coordonnées du barycentre G de $(E\,;1)$ $(F\,;3)$ sont :

   ☐ $G\,(6\,;4\,;-2)$ ☒ $G\,(1,5\,;1\,;-0,5)$ ☐ $G\,(0,5\,;1\,;1,5)$

3. Soit d la droite de représentation paramétrique $x = 2 - t \quad y = 3t \quad z = -3$ où $t \in \mathbb{R}$.
   Si $A\,(2\,;3\,;-3)$, $B\,(2\,;0\,;-3)$ et $C\,(0\,;6\,;0)$, alors :

   ☐ $d = (AB)$ ☐ $d = (BC)$ ☒ $d \neq (AB) \quad d \neq (BC) \quad d \neq (CA)$

4. Les droites de représentations paramétriques respectives :
   $x = 2 + t \quad y = 1 - t \quad z = 1 + t$ où $t \in \mathbb{R}$
   $x = -t' \quad y = -2 - 1,5t' \quad z = 3 + t'$ où $t' \in \mathbb{R}$
   admettent comme point commun :

   ☐ $I\,(3\,;0\,;2)$ ☒ $J\,(2\,;1\,;1)$ ☐ $K\,(0\,;2\,;-3)$

5. Les droites de représentations paramétriques respectives :
   $x = 1 \quad y = 1 + 2t \quad z = 1 + t$ où $t \in \mathbb{R}$
   $x = 3 - 2t' \quad y = 7 - 4t' \quad z = 2 - t'$ où $t' \in \mathbb{R}$
   sont :

   ☐ parallèles ☐ sécantes ☒ non coplanaires

6. La droite de représentation paramétrique :
   $x = -4t \quad y = 1 + 3t \quad z = 2 + 2t$ où $t \in \mathbb{R}$
   et le plan d'équation $x - 2y + 5z - 1 = 0$ sont :

   ☐ orthogonaux ☒ parallèles ☐ ni orthogonaux ni parallèles

7. L'ensemble des points tels que $x - y + 2z - 1 = 0$ et $-2x - 4y + 4z + 1 = 0$ est :

   ☐ l'ensemble vide ☒ une droite ☐ un plan

9 Fonctions trigonométriques et équations

1. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables et pour tout x réel : $f'(x) = -\sin x + 1$.

   On sait que la fonction sinus est majorée par 1 , ce qui entraîne $f' \geqslant 0$ et f croissante sur $\mathbb{R}$.

   - Localisation des solutions .

     On vérifie $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$ et $f(0) = 1 > 0$. Puisque f est croissante, on a :

     $$x < -\frac{\pi}{2} \Longrightarrow f(x) \leqslant f\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0 \quad \text{et} \quad x > 0 \Longrightarrow f(x) \geqslant f(0) > 0$$

     L'équation $f(x) = 0$ ne peut donc avoir de solution en dehors de l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

   - Étude sur l'intervalle I .

     Le sinus étant croissant sur I, on peut écrire :

     $$-1 \leqslant \sin x \leqslant 0 \iff 1 \leqslant 1 - \sin x \leqslant 2$$

     Donc f est strictement croissante sur I. Puisqu'elle est continue (car dérivable), elle réalise une bijection de I sur l'intervalle image $\left[f\left(-\frac{\pi}{2}\right), f(0)\right] = \left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$. L'intervalle image contenant la valeur 0, l'équation $f(x) = 0$ a une solution α et une seule dans I.

   - Valeur approchée.

     On procède par balayage :

     $f(-0,8) \approx -0,10 < 0$ et $f(-0,7) \approx 0,06 > 0$ $\Longrightarrow$ $-0,8 < \alpha < -0,7$

     $f(-0,74) \approx -0,002 < 0$ et $f(-0,73) \approx 0,02 > 0$ $\Longrightarrow$ $-0,74 < \alpha < -0,73$

     $f(-0,74) \approx -0,002 < 0$ et $f(-0,739) \approx 0,0001 > 0$ $\Longrightarrow$ $-0,74 < \alpha < -0,739$

     On peut donc écrire $\alpha \approx -0,739$ à 10^{-3} près.

2. On pose pour tout x réel : $g(x) = \sin x - \frac{x}{2}$.

   (a) On déduit de $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ l'encadrement $-1 - \frac{x}{2} \leqslant g(x) \leqslant 1 - \frac{x}{2}$

   On vérifie $1 - \frac{x}{2} < 0 \iff x > 2$. Donc $x > 2 \Longrightarrow g(x) < 0$.

   On vérifie $-1 - \frac{x}{2} > 0 \iff x < -2$. Donc $x < -2 \Longrightarrow g(x) > 0$.

   On en déduit que les solutions de $g(x) = 0$ sont comprises entre -2 et 2.

   (b) Étudions maintenant les variations de g sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ qui contient $[-2, 2]$. Calculons la dérivée : $g'(x) = \cos x - \frac{1}{2}$.

   Elle s'annule lorsque $\cos x = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire pour $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.

   Nous savons d'autre part que le cosinus est strictement croissant sur $[-\pi, 0]$ et strictement décroissant sur $[0, \pi]$. On en déduit :

   $$\cos x > \frac{1}{2} \iff -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$$

   Nous pouvons dresser le tableau de variations de g :

x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$g\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$\nearrow$	$g\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\searrow$	$\frac{-\pi}{2}$

Dans ce tableau $g\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6}$ et $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{6}$

Sur $\left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right]$, g est strictement croissante et s'annule en 0 : on a donc exactement une solution sur cet intervalle.

Sur $\left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$, g est continue (car dérivable) et strictement décroissante : elle réalise donc une bijection de cet intervalle sur l'intervalle image $\left[g(\pi), g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$. L'intervalle image contient 0 puisque $g(\pi) = -\dfrac{\pi}{2} < 0$ et $g\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6} > 0$. Par conséquent l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution β sur cet intervalle.

Puisque g est impaire, l'équation $g(x) = 0$ a aussi exactement une solution $-\beta$ sur l'intervalle $\left[-\pi, -\dfrac{\pi}{3}\right]$.

En résumé, on a trois solutions : $-\beta$, 0 et β .

(c) On procède par balayage.

$$
\begin{array}{lclcl}
g(1,8) \approx 0,07 > 0 & \text{et} & g(1,9) \approx -0,004 < 0 & \Longrightarrow & 1,8 < \beta < 1,9 \\
g(1,89) \approx 0,004 > 0 & \text{et} & g(1,9) \approx -0,004 < 0 & \Longrightarrow & 1,89 < \beta < 1,9 \\
g(1,895) \approx 0,0004 > 0 & \text{et} & g(1,896) \approx -0,0004 < 0 & \Longrightarrow & 1,895 < \beta < 1,896
\end{array}
$$

On peut donc écrire $\beta \approx 1,895$ à 10^{-3} près.

10 Équations de plans et calculs de distances

1. Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de l'espace. Il appartient à P si et seulement si :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \iff (x-1) \cdot -1 + y \cdot 1 + (z-1) \cdot 1 = 0 \iff -x + y + z = 0$$

2. (a) Le plan P' admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux car $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 0$ et les plans P et P' sont donc perpendiculaires.

   (b) Par application du cours :

$$d = \frac{|-0+1+1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$d' = \frac{|0 + 2 \cdot 1 - 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

3. (a) On résout le système formé par les deux équations cartésiennes :

$$\begin{cases} -x + y + z & = & 0 \\ x + 2y - z + 1 & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y & = & -z \\ x + 2y & = & z - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y & = & -z \\ 3y & = & -1 \end{cases}$$

   On en déduit une représentation paramétrique de la droite d'intersection D :

$$\begin{cases} x & = & -\dfrac{1}{3} + t \\ y & = & -\dfrac{1}{3} \\ z & = & t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

   (b) La droite (D) admet donc pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   La droite (MH) est perpendiculaire à D lorsque

$$\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \iff \left(-\frac{1}{3} + t - 0\right) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{3} - 1\right) \cdot 0 + (t-1) \cdot 1 = 0 \iff t = \frac{2}{3}$$

   On en déduit $\mathrm{H}\left(\frac{1}{3} ; -\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

   (c) On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{MH}\left(\frac{1}{3} ; -\frac{4}{3} ; -\frac{1}{3}\right)$.

   On en déduit $MH^2 = \frac{18}{9} = 2$ et on vérifie $d^2 + d'^2 = \frac{12}{9} + \frac{6}{9} = 2$.

11 Partage d'une aire

1. Puisque la fonction est positive et continue, l'aire du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses , les droites $t = 0$ et $t = x$ est :

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^x e^{t-1}\,dt = \left[e^{t-1}\right]_0^x = e^{x-1} - \frac{1}{e}$$

Notons $H_x\,(x, 0)$. L'aire du triangle IM_xH_x est :

$$\mathcal{A}_2 = \frac{H_xM_x \cdot H_xI}{2} = \frac{e^{x-1}\cdot(1-x)}{2}$$

On en déduit $g(x) = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \dfrac{e^{x-1}\cdot(3-x)}{2} - \dfrac{1}{e}$.

2. La fonction g est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$:

$$g'(x) = \frac{e^{x-1}\cdot(3-x) - e^{x-1}}{2} = \frac{e^{x-1}\cdot(2-x)}{2}$$

L'exponentielle est strictement positive et $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 2 - x > 0$. Donc g' est strictement positive et g est strictement croissante sur $[0, 1]$.

3. (a) Nous avons $M_0\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$. Notons $N_0\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$.

   Par définition $g(0)$ est l'aire du triangle IOM_0 c'est-à-dire la moitié de l'aire du rectangle OIN_0M_0. Puisque ce rectangle est inclus dans Δ, son aire est majorée par celle de Δ qui est égale à $g(1) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$. On a donc :

$$2g(0) \leqslant g(1) \iff g(0) \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt$$

   (b) La fonction g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[0, 1]$: elle réalise donc une bijection de $[0, 1]$ sur l'intervalle image $[g(0), g(1)]$.

   Considérons la moitié de l'aire de Δ c'est-à-dire $\dfrac{g(1)}{2} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$. Ce nombre est majoré par $g(1)$ car $g(1) \geqslant 0$. Nous avons montré qu'il était minoré par $g(0)$: il appartient donc à l'intervalle image.

   On en déduit que l'équation $g(x) = \dfrac{g(1)}{2}$ admet une solution α et une seule dans $[0, 1]$.

4. Calculons d'abord $\dfrac{g(1)}{2} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{e}\right) \approx 0,31606$. On procède ensuite par balayage.

$$\begin{array}{lclcl}
g(0,3) \approx 0,303 < \dfrac{g(1)}{2} & \text{et} & g(0,4) \approx 0,346 > \dfrac{g(1)}{2} & \Longrightarrow & 0,3 < \alpha < 0,4 \\
g(0,33) \approx 0,315 < \dfrac{g(1)}{2} & \text{et} & g(0,34) \approx 0,319 > \dfrac{g(1)}{2} & \Longrightarrow & 0,33 < \alpha < 0,34 \\
g(0,331) \approx 0,3157 < \dfrac{g(1)}{2} & \text{et} & g(0,332) \approx 0,3161 > \dfrac{g(1)}{2} & \Longrightarrow & 0,331 < \alpha < 0,332
\end{array}$$

On peut donc écrire $\alpha = 0,331$ à 10^{-3} près par défaut.

12 Équation différentielle en électricité

A. Solutions d'une équation différentielle

1. La solution générale de l'équation $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$ est $y = -\dfrac{b}{a} + Ke^{at}$ où K est une constante réelle arbitraire.

   La condition $f(0) = 0$ se traduit par $0 = -\dfrac{b}{a} + K \iff K = \dfrac{b}{a}$.

   Il existe donc une fonction f et une seule qui est solution de l'équation différentielle et vérifie $f(0) = 0$.

2. La fonction $f(t) = \dfrac{3}{5}\left(1 - e^{-10t}\right)$ vérifie $f(0) = 0$ car $e^0 = 1$.

   Pour tout réel t , on a : $f'(t) = \dfrac{3}{5} \cdot 10e^{-10t} = 6e^{-10t}$.

   Pour tout réel t , on a : $-10f(t) + 6 = -6\left(1 - e^{-10t}\right) + 6 = 6e^{-10t} = f'(t)$.

   Donc f est la solution de $(\mathcal{A})$ qui vérifie $f(0) = 0$.

B. Établissement du courant dans une bobine

1. La fonction intensité est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{2}i' + 5i = 3 \iff i' = -10i + 6 \qquad (\mathcal{A})$$

   D'autre part l'intensité est nulle à l'instant $t = 0$ se traduit par $i(0) = 0$. On déduit de la partie précédente : $i(t) = \dfrac{3}{5}\left(1 - e^{-10t}\right)$

2. On sait $\lim\limits_{t \to +\infty} -10t = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$.

   Le théorème sur la limite d'une fonction composée entraîne alors $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-10t} = 0$.

   Les théorèmes sur la limite d'une somme et d'un produit de fonctions entraînent ensuite $\lim\limits_{t \to +\infty} i(t) = \dfrac{3}{5}$.

13 Étude d'une suite selon deux méthodes

1. La fonction f est définie sur I car $-4 \notin I$. Elle est dérivable sur I en tant que fonction rationnelle et pour tout $x \in I$:

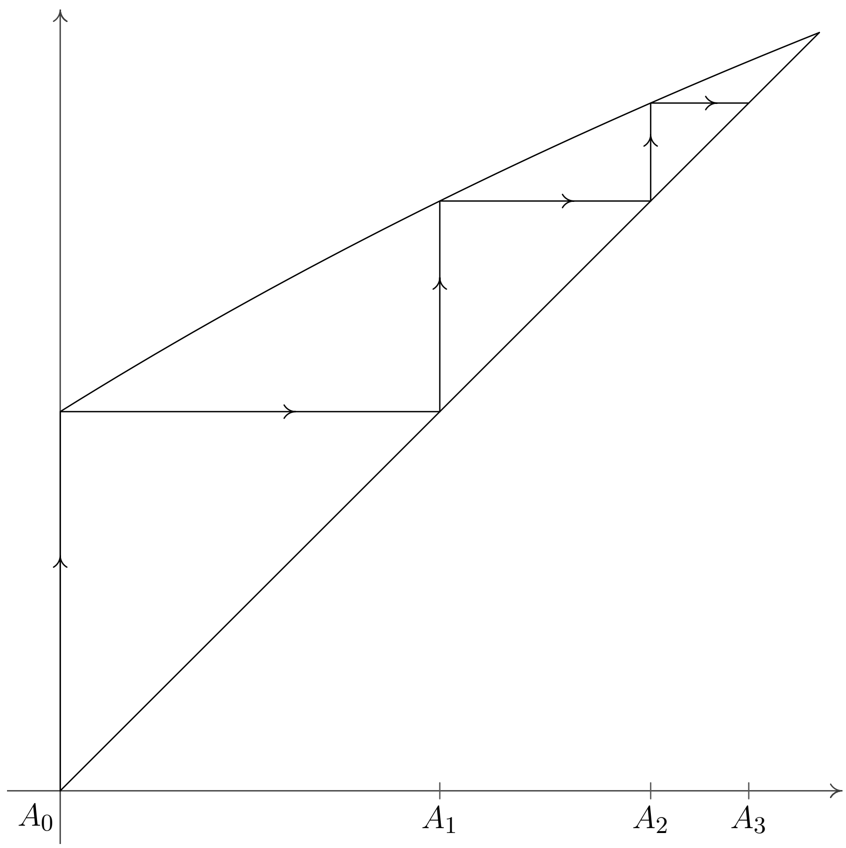
$$f'(x) = \frac{3(x+4) - (3x+2)}{(x+4)^2} = \frac{10}{(x+4)^2} > 0$$

Puisque f' est strictement positive, f est strictement croissante sur I. Puisqu'elle est dérivable, f est continue sur cet intervalle. Donc $f(I) = [f(0), f(1)] = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \subset I$.

On en déduit que pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in I$.

2. On procède par récurrence sur n.
   - Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 0 \in I$ et la propriété est vérifiée.
   - Supposons que pour un entier n donné on ait $u_n \in I$. Nous savons que $u_{n+1} = f(u_n)$ et en appliquant la résultat de la question précédente, nous obtenons $u_{n+1} \in I$.
   - Conclusion : pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_n \in I$.

3. (a) Représentation graphique.



   (b) On peut conjecturer que (u_n) est croissante et convergente vers 1 .

   (c) Calculons la différence :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4} = \frac{(1 - u_n)(u_n + 2)}{u_n + 4}$$

Puisque pour tout n , on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on en déduit $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Par conséquent la suite (u_n) est croissante.

(d) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 : elle est donc convergente vers un réel l.
De plus $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ implique $0 \leqslant l \leqslant 1$ par passage à la limite dans les inégalités.

(e) Nous savons $\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$.
D'autre part f est continue sur I et en appliquant le théorème sur la limite de la composée d'une suite et d'une fonction continue, on obtient : $\lim f(u_n) = f(l)$.
On en déduit $\boxed{l = f(l)}$. Résolvons cette équation :

$$l = \frac{3l+2}{l+4} \iff l^2 + l - 2 = 0$$

Cette équation a deux solutions évidentes : 1 et -2 .
Puisque $l \in I$, nous en déduisons $\boxed{l = 1}$.

4. (a) On calcule v_{n+1} en fonction de v_n :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{3u_n + 2 - (u_n + 4)}{3u_n + 2 + 2(u_n + 4)} = \frac{2u_n - 2}{5u_n + 10} = \frac{2}{5} \cdot \frac{u_n - 1}{u_n + 2} = \frac{2}{5} \cdot v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

(b) On a $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = -\dfrac{1}{2}$ et d'après le cours $\boxed{v_n = -\dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$.

(c) On remarque d'abord : $v_n = 1 - \dfrac{3}{u_n + 2} \iff \dfrac{3}{u_n + 2} = 1 - v_n$

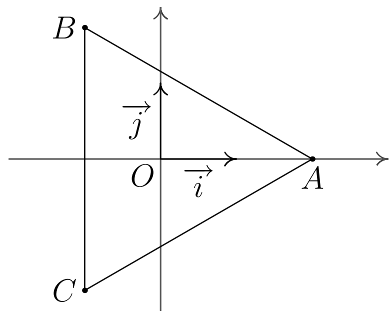
On en déduit : $u_n + 2 = \dfrac{3}{1 - v_n} \iff u_n = \dfrac{3}{1 - v_n} - 2 = \dfrac{1 + 2v_n}{1 - v_n}$.

D'où le résultat : $\boxed{u_n = \dfrac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n}}$.

(d) Sachant $-1 < \dfrac{2}{5} < 1$, on a $\lim \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$ et les théorèmes usuels sur les limites nous permettent de conclure que $\boxed{\lim u_n = 1}$.

14 Tétraèdre

1. Figure



2. Calcul des côtés :

$$AB^2 = (-3)^2 + \sqrt{3}^2 = 12 \qquad BC^2 = 0^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2 = 12 \qquad CA^2 = 3^2 + \sqrt{3}^2 = 12$$

   On a donc $AB = BC = CA$ et le triangle est équilatéral .
   Calcul de la distance de O aux trois points :

$$OA^2 = 2^2 = 4 \qquad OB^2 = (-1)^2 + \sqrt{3}^2 = 4 \qquad OC^2 = (-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 = 4$$

   On a donc $OA = OB = OC$ et O est le centre du cercle circoncrit au triangle.

3. (a) Le point $M(x, y, z)$ est équidistant de A et de B si et seulement si $AM^2 = BM^2$:

$$(x-2)^2 + y^2 + z^2 = (x+1)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 + z^2 \iff 3x - \sqrt{3}y = 0$$

   On obtient une équation du <u>plan médiateut de $[AB]$</u>.

   (b) Le point $N(x, y, z)$ est équidistant de B et de C si et seulement si $BN^2 = CN^2$:

$$(x+1)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 + z^2 = (x+1)^2 + \left(y + \sqrt{3}\right)^2 + z^2 \iff y = 0$$

   On obtient une équation du <u>plan médiateut de $[BC]$</u>.

   (c) Les points de l'espace équidistants des trois points ont des coordonnées qui vérifient :

$$\begin{cases} 3x - \sqrt{3}y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

   On obtient bien l'axe $\left(O\,;\overrightarrow{k}\right)$.

4. S'il existe, le point D est équidistant de A , B et C : il appartient donc à l'axe $\left(O\,;\overrightarrow{k}\right)$.
   Puisque sa troisième coordonnée est positive, ce point est unique.
   Montrons qu'il existe. Posons $D(0, 0, k)$ et appliquons le théorème de Pythagore au triangle rectangle AOD :

$$DA^2 = DO^2 + OA^2 = k^2 + 4$$

   Nous obtenons $DA^2 = AB^2 \iff k^2 + 4 = 12 \iff k = 2\sqrt{2}$.
   Par conséquent le point $D(0, 0, 2\sqrt{2})$ est l'unique point de l'espace dont la troisième coordonnée est positive qui est tel que le tétraèdre $ABCD$ est régulier.

5. (a) Remarquons d'abord que (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires et donc que M est distinct de A et de B. Appliquons la formule du cosinus :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos \widehat{AMB} \iff \cos \widehat{AMB} = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{MA \cdot MB} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}}{AM \cdot BM}$$

Par hypothèse, nous savons $\overrightarrow{CM} = \lambda \overrightarrow{CD}$, ce qui nous permet de calculer les coordonnées de M en fonction de λ :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x+1 & = & \lambda(0+1) \\ y+\sqrt{3} & = & \lambda(0+\sqrt{3}) \\ z & = & \lambda(2\sqrt{2}) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & \lambda - 1 \\ y & = & \sqrt{3}(\lambda - 1) \\ z & = & 2\sqrt{2}\lambda \end{array} \right.$$

On en déduit les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ et de $\overrightarrow{BM}$:

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} \lambda - 3 \\ \sqrt{3}(\lambda - 1) \\ 2\sqrt{2}\lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} \lambda \\ \sqrt{3}(\lambda - 2) \\ 2\sqrt{2}\lambda \end{pmatrix}$$

Calcul du produit scalaire :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = \lambda(\lambda - 3) + 3(\lambda - 1)(\lambda - 2) + (\lambda 2\sqrt{2})^2 = 12\lambda^2 - 12\lambda + 6$$

Maintenant, puisque C et D sont équidistants de A et B, ils appartiennent au plan médiateur de $[AB]$ et la droite (CD) est incluse dans ce plan : en particulier le point M appartient auusi au plan médiateur de $[AB]$. On en déduit :

$$AM \cdot BM = AM^2 = (\lambda - 3)^2 + 3(\lambda - 1)^2 + 8\lambda^2 = 12\lambda^2 - 12\lambda + 12$$

On obtient donc :

$$\cos \widehat{AMB} = \frac{12\lambda^2 - 12\lambda + 6}{12\lambda^2 - 12\lambda + 12} = \frac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)} = 1 - \frac{1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}$$

(b) Le trinôme $\lambda^2 - \lambda + 1$ n'a pas de racine puisque son discriminant est $\Delta = -3 < 0$. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$ et elle est dérivable en tant que fonction rationnelle. Pour tout réel λ , nous avons :

$$f'(\lambda) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\lambda - 1}{(\lambda^2 - \lambda + 1)^2}$$

Cette dérivée est donc du signe de $2\lambda - 1$ et nous pouvons dresser le tableau de variations de f :

λ	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(\lambda)$		$-$	0	$+$	
$f(\lambda)$		$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	

(c) Sur $[0, 1]$, le cosinus de $\widehat{AMB}$ atteint son minimum $\dfrac{1}{3}$ lorsque $\lambda = \dfrac{1}{2}$. Puisque le cosinus est décroissant sur $[0, \pi]$, l'angle $\widehat{AMB}$ atteint son maximum pour cette valeur de λ . Le point M est alors au milieu de $[CD]$

(d) Le maximum de $\widehat{AMB}$ est donc $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right) \approx 1,23$ radians. $\approx 70,53°$

15 Modèles d'évolution

1. Supposons que $\lim u_n = l \in \mathbb{R}$. La fonction f est une fonction polynôme : elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème sur la limite de la composée d'une suite et d'une fonction continue nous donne alors $\lim f(u_n) = f(l)$.
   D'autre part $\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$.
   D'après l'unicité de la limite d'une suite : $\boxed{f(l) = l}$.
2. Dans cette question $u_0 = 0,4$ et $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$.
   (a) On vérifie pour tout n : $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$. La suite (u_n) est dans ce cas décroissante.
   (b) On procède par récurrence sur n.
   - Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0,4$ et donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.
   - Supposons que pour un entier n donné nous ayons $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Montrons qu'il en va de même pour u_{n+1}.
     On a : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$. Nous pouvons effectuer le produit membre à membre des deux encadrements car tous les termes sont positifs ou nuls. Nous obtenons :
     $$0 \leqslant u_n(1 - u_n) \leqslant 1 \iff 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$
   - Conclusion : pour tout $n \geqslant 0$, on a $\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant 1}$.

   (c) La suite (u_n) est décroissante et minorée : elle converge donc vers un réel l qui est solution de :
   $$l = f(l) \iff l = l(1 - l) \iff l^2 = 0$$
   On en déduit $\boxed{\lim u_n = 0}$.
   (d) Sous ces hypothèses, la population de coccinelles va à terme vers son extinction.
3. Dans cette question $u_0 = 0,3$ et $u_{n+1} = 1,8u_n(1 - u_n)$.
   (a) La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ en tant que fonction polynôme.
   Pour tout $x \in [0,1]$, on a : $f'(x) = 1,8(1 - 2x)$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	0,45	$\searrow$	0

   On vérifie bien que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1,8}{4} = 0,45 \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.
   (b) Remarquons au préalable que d'après la question précédente :
   $$\text{pour tout } x \in I : 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$$
   Montrons maintenant par récurrence sur n que pour tout entier n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   - Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0,3$ et donc $0 \leqslant u_0 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

- Supposons que pour un entier n donné nous ayons $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$. Nous savons alors que $0 \leqslant f(u_n) \leqslant \frac{1}{2}$. On en déduit que u_{n+1} est compris entre 0 et $\frac{1}{2}$.
- Conclusion : pour tout $n \geqslant 0$, on a $\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}}$.

Calculons maintenant la différence : $u_{n+1} - u_n = 0,8u_n - 1,8u_n^2 = 0,2u_n(4 - 9u_n)$. Puisque la suite (u_n) est positive, cette différence est du signe de $4 - 9u_n$. Montrons maintenant par récurrence sur n que pour tout entier n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{4}{9}$.

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0,3$ et donc $0 \leqslant u_0 \leqslant \frac{4}{9} \approx 0,444$.
- Supposons que pour un entier n donné nous ayons $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{4}{9}$. Nous savons que f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

  On en déduit : $f(0) = 0 \leqslant f(u_n) = u_{n+1} \leqslant f\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{4}{9}$.

  Donc u_{n+1} est compris entre 0 et $\frac{4}{9}$.
- Conclusion : pour tout $n \geqslant 0$, on a $\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant \frac{4}{9}}$.

Nous en déduisons que $4 - 9u_n \geqslant 0$ puis que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
La suite (u_n) est donc <u>croissante</u>.

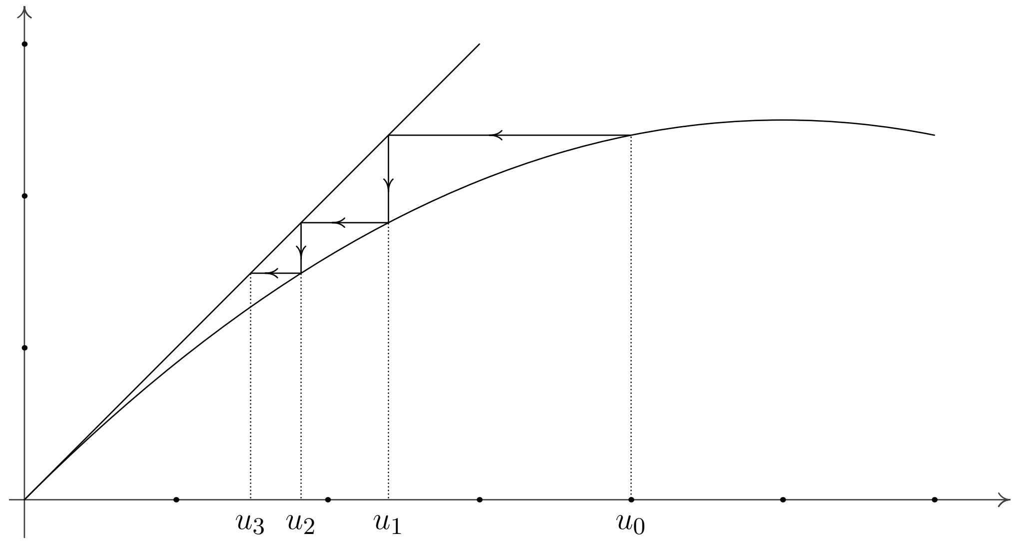
(c) La suite (u_n) est croissante et majorée : elle <u>converge</u> donc vers un réel l qui est solution de :

$$l = 1,8l(1 - l) \iff 1,8l^2 - 0,8l = 0 \iff 1,8l\left(l - \frac{4}{9}\right) = 0$$

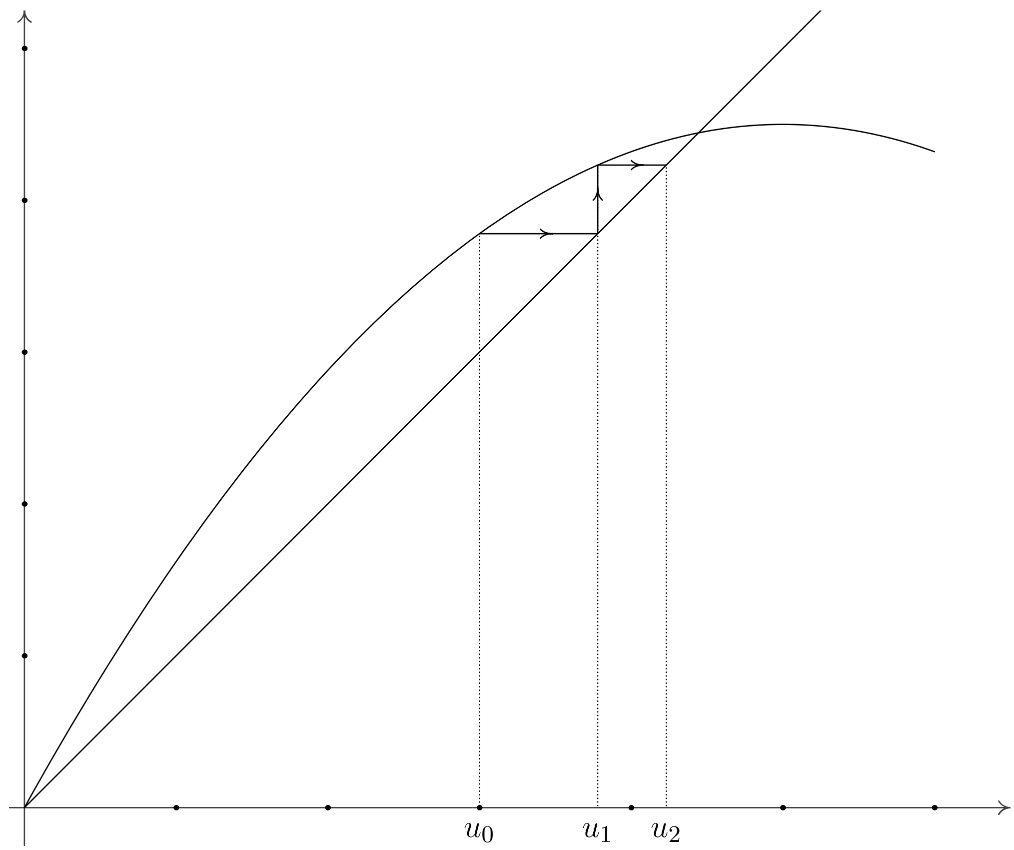
Les deux limites possibles sont $l = 0$ ou $l = \frac{4}{9}$. Puisque (u_n) est croissante, elle est minorée par $u_0 = 0,3$ et on a $l \geqslant 0,3$. On en déduit $\boxed{\lim u_n = \frac{4}{9}}$.

(d) Sous ces hypothèses, la population de coccinelles tendra à terme vers environ 444 000 individus .

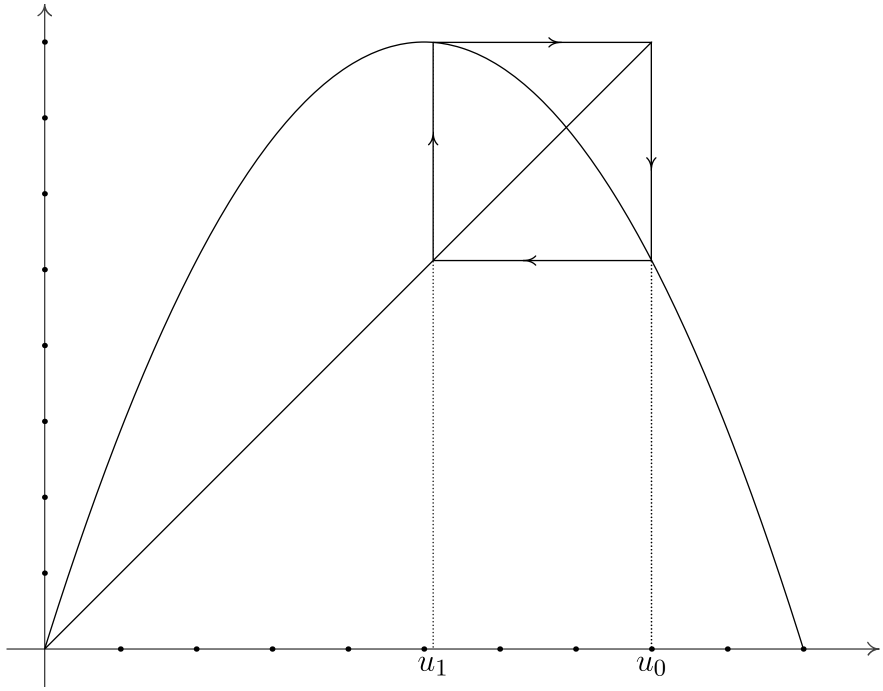
4. **1$^{\text{er}}$cas :** $u_0 = 0,4$ et $k = 1$.



2$^{\text{e}}$cas : $u_0 = 0,3$ et $k = 1,8$.



3$^{\text{e}}$cas : $u_0 = 0,8$ et $k = 3,2$.



Sous ces hypothèses, l'effectif de la population semble alterner chaque année entre deux valeurs qui sont approximativement 800 000 individus et 512 000 individus. Pour préciser les valeurs et le comportement de la suite, on peut utiliser un tableur ou une caculatrice.

16 Une pyramide dans le cube

1. Dans le repère choisi :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{i} \iff B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \iff C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

On en déduit les coordonnées du milieu I de $[BC]$: $I\begin{pmatrix}\dfrac{1+1}{2} = 1\\ \dfrac{0+1}{2} = 1/2\\ \dfrac{0+0}{2} = 0\end{pmatrix}$

On établit de même :

$D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ puis $H\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $K\begin{pmatrix}0\\1\\1/2\end{pmatrix}$

$E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ puis $F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}$

2. Déterminons d'abord une équation du plan (IKM) . Nous cherchons un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à ce plan, c'est-a-dire orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan, par exemple :

$$\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-1\\1/2\\1/2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}$$

Soit $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}\text{a}\\\text{b}\\\text{c}\end{pmatrix}$. Les coordonnées de ce vecteur sont solutions de :

$$\begin{cases} -a + b/2 + c/2 &= 0 \\ -a/2 - b/2 + c &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b + c &= 2a \\ -b + 2c &= a \end{cases} \iff \begin{cases} b + c &= 2a \\ 3c &= 3a \end{cases}$$

Ce système admet pour solutions tous les triplets (t, t, t) où t est un réel quelconque et nous pouvons prendre $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur normal au plan (IKM).

Un point $P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ quelconque de l'espace appartient à (IKM) si et seulement si :

$$\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \iff (x-1)\cdot 1 + (y - 1/2)\cdot 1 + z \cdot 1 = 0 \iff \boxed{x + y + z = 3/2}$$

On calcule maintenant les coordonnées de $J\begin{pmatrix}1/2\\1\\0\end{pmatrix}$, $L\begin{pmatrix}0\\1/2\\1\end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix}1\\0\\1/2\end{pmatrix}$.

Les coordonnées de ces trois points vérifient de façon immédiate l'équation $x + y + z = 3/2$: les six points I , J , K , L , M et N appartiennent donc au même plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z = 3/2$.

3. On vérifie $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{n}$. Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est bien normal au plan $\mathcal{P}$.
4. Puisque la droite (AG) est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$, le projeté orthogonal d'un point quelconque de $\mathcal{P}$ sur (AG) est le point d'intersection T de cette droite et de ce plan.

   Puisque T est un point de (AG) , on écrit $\overrightarrow{AT}=k\overrightarrow{AG}$ et on peut calculer les coordonnées de T en fonction du paramètres k : $T\begin{pmatrix}k\\k\\k\end{pmatrix}$. Puisque T est un point de $\mathcal{P}$, k est solution de :

   $$k+k+k=3/2 \iff k=1/2$$

   On en déduit que les six points de $\mathcal{P}$ se projettent orthogonalement sur (AG) en $T\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$.
5. Montrons que les points I , J , K , L , M et N appartiennent à un même cercle de centre T :

   $$\begin{array}{rcl} TI^2 &=& (1/2)^2+0^2+(-1/2)^2=1/2 \\ TJ^2 &=& 0^2+(1/2)^2+(-1/2)^2=1/2 \\ TK^2 &=& (-1/2)^2+(1/2)^2+0^2=1/2 \end{array}$$

   On a donc $\boxed{TI=TJ=TK=\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

   On vérifie ensuite que T est le milieu de $[IL]$, $[JM]$ et $[KN]$, ce qui implique $TL=TI$, $TM=TJ$ et $TN=TK$.

   On a donc $\boxed{TL=TM=TN=\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

   Les six points appartiennent au cercle de centre T et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Montrons que les côtés de l'hexagone $IJKLMN$ mesurent tous $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   On vérifie d'abord l'égalité $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{TK}$ en calculant les coordonnées de ces deux vecteurs qui sont $\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\0\end{pmatrix}$ et on en déduit que $IJKT$ est un parallélogramme, ce qui implique :

   $$IJ=TK=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad JK=IT=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

   Puisque T est milieu de $[IL]$, on peut écrire $\overrightarrow{TL}=\overrightarrow{IT}=\overrightarrow{JK}$ et $TJKL$ est également un parallélogramme. Par conséquent :

   $$LK=TJ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

   On a démontré : $\boxed{IJ=JK=KL=\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Considérons maintenant dans le plan $\mathcal{P}$ la symétrie de centre T : cette transformation échange respectivement I et L , J et M ainsi que K et N. Or une symétrie centrale est une isométrie et on obtient :

$$LM = IJ \qquad MN = JK \quad \text{et} \quad NI = KL$$

On en déduit : $\boxed{LM = MN = NI = \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

6. Calculons d'abord l'aire du triangle équilatéral TIJ de côté $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

– sa base est $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

– sa hauteur est $h = a \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

– son aire est donc $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}$

On en déduit l'aire de la base de la pyramide qui est l'hexagone : $\boxed{6\mathcal{A} = \frac{3\sqrt{3}}{4}}$.

Calculons la distance du point $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+z-3/2 = 0$, c'est-à-dire la hauteur de la pyramide :

$$d = \frac{|1+1+1-3/2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{3/2}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

On en déduit le volume de cette pyramide :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

Le volume de la pyramide est donc égal aux trois huitièmes du volume du cube.

17 Fonctions vérifiant certaines conditions

1. (a) Les deux conditions $f(x) = 0$ et $f(\ln 2) = 0$ se traduisent par le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c & = & 0 \\ 4a+2b+c & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & -c \\ 4a+2b & = & -c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & -c \\ 2a & = & c \end{array}\right.$$

Ce système a pour solutions tous les triplets $\left(\dfrac{t}{2}, \dfrac{-3t}{2}, t\right)$ où $t \in \mathbb{R}$. Par exemple, $(1, -3, 2)$ est un triplet solution.

Écrivons pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = e^{2x}\left(a + \dfrac{b}{e^x} + \dfrac{c}{e^{2x}}\right)$.

Par application des théorèmes usuels sur les limites :

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} a + \frac{b}{e^x} + \frac{b}{e^{2x}} = a$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$

Par conséquent, lorsque $a > 0$, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

En conclusion, <u>la fonction $f(x) = e^{2x} - 3e^x + 2$ convient</u>.

(b) D'après le cours, nous savons que pour tout x et tout y strictement positifs :

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

En multipliant par un réel k, nous obtenons : $k\ln(xy) = k\ln x + k\ln y$. Nous pouvons donc poser $f(x) = k\ln x$ pour obtenir la condition $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Pour cette fonction : $f(2) = 4 \iff k\ln 2 = 4 \iff k = \dfrac{4}{\ln 2}$.

En conclusion, <u>la fonction $f(x) = \dfrac{4\ln x}{\ln 2}$ convient</u>.

(c) On sait que la valeur moyenne d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0 est égale à 0 . Vérifions le résultat pour $f(x) = x^3$:

$$\mu = \frac{1}{2 - -2}\int_{-2}^{2} x^3\, dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{2} = \frac{2^4 - (-2)^4}{16} = 0$$

En conclusion, <u>la fonction $f(x) = x^3$ convient</u>.

2. (a) OUI

Par définition, une primitive de g' est g et $\displaystyle\int_0^1 g'(x)\, dx = g(1) - g(0)$. La condition de l'énoncé se traduit par : $g(1) - g(0) = 0 \iff g(1) = g(0)$.

Or nous lisons graphiquement que les deux points de la courbe d'abscisses 0 et 1 ont la même ordonnée 0.

(b) OUI

Notons m le minimum de la fonction. Pour tout $x \in [0, 1]$: $g(x) \geqslant m$.

Intégrons cette inégalité sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 g(x)\, dx \geqslant \int_0^1 m\, dx = [mx]_0^1 = m$$

Or, on observe graphiquement que $m > -\dfrac{1}{2}$.

18 Suites : QCM

On considère trois suites telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

1. Si la suite (v_n) tend vers $-\infty$, alors :

   ☐ la suite (w_n) tend vers $-\infty$
   ☒ la suite (u_n) est majorée
   ☒ la suite (u_n) tend vers $-\infty$
   ☐ la suite (w_n) n'a pas de limite

2. Si $u_n \geqslant 1$, $w_n = 2u_n$ et $\lim u_n = l$, alors :

   ☐ $\lim v_n = l$
   ☐ la suite (w_n) tend vers $+\infty$
   ☒ $\lim (v_n - u_n) = l$
   ☒ on ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non

3. Si $\lim u_n = -2$ et $\lim w_n = 2$, alors :

   ☒ la suite (v_n) est majorée
   ☐ $\lim v_n = 0$
   ☐ la suite (v_n) n'a pas de limite
   ☒ on ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non

4. Si $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n^2}$ et $\lim w_n = \dfrac{2n^2 + 3}{n^2}$, alors :

   ☐ $\lim w_n = 0$
   ☒ $\lim v_n = 2$
   ☒ $\lim u_n = 2$
   ☐ la suite (v_n) n'a pas de limite

19 Étude d'une fonction

Partie A.

1. Soit pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $d(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$.

   Sa dérivée première est $d'(x) = e^x - 1 - x$ et sa dérivée seconde est $d''(x) = e^x - 1 = e^x - e^0$.

   Puisque l'exponentielle est strictement croissante : $d''(0) = 0$ et $x > 0 \Rightarrow d''(x) > 0$.

   Donc d' est strictement croissante : $d'(0) = 0$ et $x > 0 \Rightarrow d'(x) > 0$.

   Donc d est strictement croissante : $d(0) = 0$ et $x > 0 \Rightarrow d(x) > 0$.

   On en déduit pour tout $x > 0$: $1 + x + \dfrac{x^2}{2} < e^x \iff \dfrac{1}{x} + 1 + \dfrac{x}{2} < \dfrac{e^x}{x}$.

   Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}+1+\dfrac{x}{2} = +\infty$, le théorème des gendarmes "à gauche" donne : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty}$.

2. Écrivons pour tout $x > 0$: $\sqrt{x} = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$ et $e^{1-x} = \dfrac{e}{e^x}$. Nous en déduisons : $f(x) = \dfrac{e}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{x}{e^x}$.

   D'une part $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ implique $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e}{\sqrt{x}} = 0$.

   D'autre part, le résultat de la question précédente implique $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.

   Nous en déduisons $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

   L'axe des abscisses est donc asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

3. Nous avons pour tout $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{1-x} - \sqrt{x} \cdot e^{1-x} = \dfrac{e^{1-x}(1-2x)}{2\sqrt{x}}$.

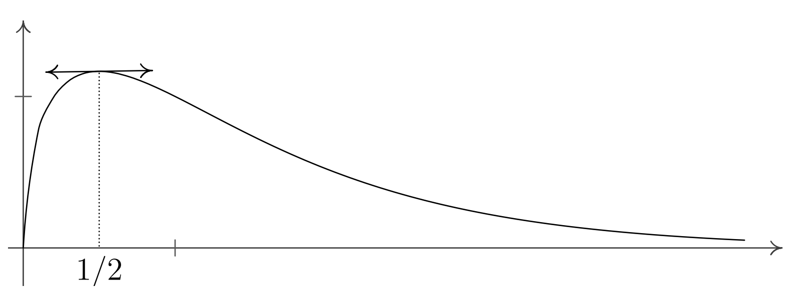
   Puisque e^{1-x} et $\sqrt{x}$ sont strictement positifs, cette dérivée est du signe de $1 - 2x$:

x	0		$1/2$		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$	

4. Nous en déduisons le tableau de variations de f :

x	0		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{e^{1/2}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0

5. Courbe représentative.



Partie B.

1. Puisque f est positive, u_n est l'aire du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations $x = n$ et $x = n + 1$. Cette aire est mesurée en unités d'aire (1 u.a. = 4 cm^2).
2. Sachant f décroissante sur $[1/2, +\infty[$, on peut encadrer f sur $[n, n+1]$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Pour tout $t \in [n, n+1]$: $f(n) \geqslant f(t) \geqslant f(n+1)$. Les intégrales définies respectent la relation d'ordre, ce qui implique :

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dt \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,dt \int_n^{n+1} f(n)\,dt \iff \boxed{f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)}$$

3. On déduit du résultat précédent pour tout $n \geqslant 1$: $u_{n+1} \leqslant f(n+1) \leqslant u_n$.
   La suite (u_n) est donc décroissante.
4. La suite (u_n) est positive donc minorée. Elle est de plus décroissante : elle est donc convergente. On a montré $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, ce qui implique $\lim f(n) = \lim f(n+1) = 0$. Alors, le théorème des gendarmes nous donne : $\boxed{\lim u_n = 0}$.

Partie C.

1. (a) Par application de la linéarité, le taux d'accroissement de F au point x est :

$$T(h) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

   On cherche la limite de ce taux lorsque h tend vers 0 .
   - Supposons $h > 0$. Le taux n'est autre que la valeur moyenne de f sur $[x, x+h]$. Puisque sur cet intervalle, f est minorée par $f(x+h)$ et majorée par $f(x)$, les inégalités de la moyenne nous donnent :

$$f(x+h) \leqslant T(h) \leqslant f(x)$$

   - Supposons $h < 0$. Sur $[x+h, x]$, f est minorée par $f(x)$ et majorée par $f(x+h)$. Appliquons les inégalités de la moyenne :

$$f(x) \leqslant \frac{1}{-h}\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt \leqslant f(x+h)$$

   On remarque $\displaystyle\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt = -\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ et on obtient : $f(x) \leqslant T(h) \leqslant f(x+h)$.

   On sait que f est continue et donc que $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$. Dans les deux cas, le théorème des gendarmes nous donne : $\lim\limits_{h\to 0} T(h) = f(x)$. Donc F est dérivable en x et son nombre dérivé est $f(x)$.
   Nous pouvons donc écrire $\boxed{F'(x) = f(x)}$ pour tout $x \in [1, +\infty[$.

   (b) Puisque f est strictement positive, F est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

2. (a) Pour tout $t \geqslant 0$, on peut écrire : $\left(\sqrt{t} - \sqrt{2}\right)^2 \geqslant 0$ .On obtient en développant :

$$t - 2\sqrt{2}\sqrt{t} + 2 \geqslant 0 \iff t + 2 \geqslant 2\sqrt{2}\sqrt{t}$$

(b) On en déduit : $\sqrt{t} \leqslant \dfrac{t+2}{2\sqrt{2}}$. En multipliant par $e^{1-t} > 0$, il vient une majoration de f sur $[1, x]$: $f(t) \leqslant \dfrac{t+2}{2\sqrt{2}} e^{1-t}$.

Intégrons cette inégalité sur $[1, x]$: $F(x) \leqslant \displaystyle\int_1^x \frac{(t+2)e^{1-t}}{2\sqrt{2}}\, dt$.

Par application de la linéarité, il vient : $\boxed{F(x) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \displaystyle\int_1^x (t+2)e^{1-t}\, dt}$.

(c) Posons $u(t) = t + 2$ et $v(t) = -e^{1-t}$. Ces deux fonctions sont dérivables et nous avons : $u'(t) = 1$ et $v'(t) = e^{1-t}$. Ces deux dérivées sont continues (car elles-mêmes dérivables). Nous pouvons donc appliquer le théorème d'intégration par parties :

$$\int_1^x (t+2)e^{1-t}\, dt = \left[-(t+2)e^{1-t}\right]_1^x - \int_1^x -e^{1-t}\, dt$$

Nous en déduisons :

$$\int_1^x (t+2)e^{1-t}\, dt = \left[-(t+2)e^{1-t}\right]_1^x - \left[e^{1-t}\right]_1^x = \left[-(t+3)e^{1-t}\right]_1^x$$

D'où le résultat : $\displaystyle\int_1^x (t+2)e^{1-t}\, dt = -(x+3)e^{1-x} + 4e^0 = \boxed{4 - (x+3)e^{1-x}}$.

(d) Puisque F est croissante, pour tout $x \geqslant 1$: $F(x) \geqslant F(1) = 0$.

Appliquons maintenant (b) et (c) : $F(x) \leqslant \dfrac{4 - (x+3)e^{1-x}}{2\sqrt{2}}$.

Puisque $(x+3)e^{1-x} > 0$, il vient : $F(x) \leqslant \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

En conclusion, nous avons prouvé : $\boxed{0 \leqslant F(x) \leqslant \sqrt{2}}$.

3. D'après la linéarité : $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} = \displaystyle\int_1^n f(t)\, dt = F(n)$.

D'après (d), nous pouvons dire que la suite (S_n) est bornée.
Calculons la différence de deux termes consécutifs : $S_{n+1} - S_n = u_n \geqslant 0$.
La suite (S_n) est donc croissante . Étant de plus majorée (par $\sqrt{2}$) , elle est convergente vers un réel L. D'après (d) : $0 \leqslant F(n) = S_n \leqslant \sqrt{2}$.

Par passage à la limite dans ces inégalités, nous obtenons $\boxed{0 \leqslant L \leqslant \sqrt{2}}$.

20 La diagonale du cube

1. On utillise la relation de Chasles et les propriétés du produit scalaire :
$$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EA}\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\right)=-\overrightarrow{AE}^2+\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF}$$
Puisque $\overrightarrow{EA}\perp\overrightarrow{EF}$, il vient : $\boxed{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{AF}=-a^2}$.
De la même façon, on peut écrire :
$$\begin{array}{rclcl}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} & = & \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}\right) & =\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BF} & =\boxed{a^2}\\ \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AF} & = & \overrightarrow{BC}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}\right) & =\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BF} & =\boxed{0}\end{array}$$
2. On additionne les trois produits scalaires de la question précédente :
$$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AF}=-a^2+a^2+0\iff\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AF}=0$$
Les deux vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont donc orthogonaux.
On prouve de même que $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux.
3. Puisque $\overrightarrow{EC}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (AFH), il est orthogonal à tout vecteur de ce plan : la droite (EC) est donc perpendiculaire au plan (AFH).
Le projeté orthogonal de E sur (AFH) est donc le point d'intersection de (EC) et de (AFH) : il s'agit donc du point I.
4. (a) Calculons le produit scalaire :
$$\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EH}\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\right)=\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{EF}=0$$
Les droites (EH) et (AF) sont donc orthogonales.
Puisque I est un point de (EC), écrivons : $\overrightarrow{EI}=k\overrightarrow{EC}$. Calculons le produit scalaire en appliquant le résultat de la question 2 :
$$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AF}=0$$
Les droites (EI) et (AF) sont donc orthogonales.
(b) En utilisant les deux résultats précédents, on obtient :
$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{AF}\cdot\left(\overrightarrow{EI}-\overrightarrow{EH}\right)=\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EI}-\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EH}=0$$
Les droites (AF) et (HI) sont donc orthogonales.
(c) On procède de la même façon en trois étapes :
$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AH} & = & \overrightarrow{EF}\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}\right)=\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EH}=0\\ \overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AH} & = & k\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AH}=0\end{array}$$
En utilisant les deux résultats précédents, on obtient :
$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AH}\cdot\left(\overrightarrow{EI}-\overrightarrow{EF}\right)=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{EI}-\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{EF}=0$$
Les droites (AH) et (FI) sont donc orthogonales.
5. Nous venons de prouver dans les deux questions précédentes que (HI) et (FI) sont deux hauteurs du triangle AFH : le point I est donc l'orthocentre de ce triangle.

21 Géométrie dans l'espace : barycentre et volume

1. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ puis leur produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-4) = 8 - 16 + 8 = 0$$

Le triangle ABC est donc <u>rectangle en A</u>.

2. (a) Calculons les deux produits scalaires suivants :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SO} & = & 2 \cdot (-4) + 4 \cdot 0 + (-2) \cdot (-4) = -8 + 8 = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SO} & = & 4 \cdot (-4) + (-4) \cdot 0 + (-4) \cdot (-4) = -16 + 16 = 0 \end{array}$$

<u>Le vecteur $\overrightarrow{SO}$ est donc orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$</u> .

(b) Puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, le vecteur $\overrightarrow{SO}$ est normal au plan (ABC). Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de l'espace. Il appartient au plan (ABC) si et seulement si :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{SO} = 0 \iff (x+1) \cdot (-4) + y \cdot 0 + (z-1) \cdot (-4) = 0 \iff \boxed{x + z = 0}$$

3. (a) Nous cherchons trois réels a , b et c tels que :

$$a + b + c \neq 0 \quad \text{et} \quad a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$$

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont deux à deux égales :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -a + b + 3c & = & 0 \\ 4b - 4c & = & 0 \\ a - b - 3c & = & 0 \end{array} \right.$$

Les première et troisième équations étant équivalentes et le système se réduit à :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -a + b + 3c & = & 0 \\ 4b - 4c & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a - b & = & 3c \\ b & = & c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 4c \\ b & = & c \end{array} \right.$$

Ses solutions sont les triplets $(4t, t, t)$ où $t \in \mathbb{R}$. En particulier $(4, 1, 1)$ est un triplet solution tel que $4 + 1 + 1 = 6 \neq 0$.

Conclusion : <u>O est barycentre du système $(A, 4)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$</u> .

(b) On sait que le barycentre de trois points appartient à tout plan contenant ces trois points. On peut aussi remarquer que les coordonnées de O vérifient de façon immédiate l'équation de (ABC) trouvée à la question 2 (b) .

4. Commençons par calculer AB et AC :

$$AB = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \quad \text{et} \quad AC = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Puisque ABC est rectangle en A , son aire est égale à : $\mathcal{A} = \dfrac{AB \cdot AC}{2} = 4\sqrt{18} = 12\sqrt{2}$.

Le point O est le projeté orthogonal de S sur ABC d'après les questions 2 (a) et 3 (b) . La hauteur du tétraèdre est donc $OS = 4\sqrt{2}$ et son volume est $\mathcal{V} = \dfrac{12\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{3} = \boxed{32}$.

22 Fonction irrationnelle et méthode d'Euler

Partie A.

Tableau numérique.

n	0	1	2	3	4	5
x_n	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_n	1	1,1	1,191	1,275	1,353	1,427

Partie B.

1. La condition $f(x)f'(x) = 1$ implique $f(x) \neq 0$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \geqslant 0$. La fonction f ne peut donc s'annuler.
2. Puisque f est dérivable, elle est continue. Or si $f(0) = 1$ et s'il existe $a > 0$ tel que $f(a) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires implique que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[0, a]$.
3. D'après la question précédente f ne peut prendre une valeur strictement négative : sinon elle s'annule et cela est en contradiction avec le résultat de la question 1.

   On en déduit $f \geqslant 0$. Puisque f ne peut s'annuler, on a bien $\boxed{f > 0}$.

Partie C.

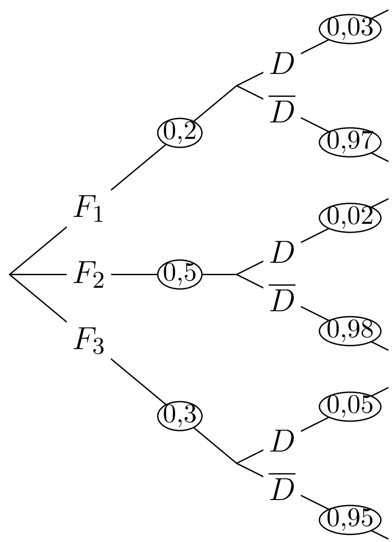
1. On sait que $\dfrac{u^2}{2}$ est une primitive de uu' sur I dès que u est dérivable sur I.
2. Puisque $\dfrac{f(x)^2}{2}$ et x doivent avoir toujours la même dérivée sur $I = [0, +\infty]$, elle diffèrent d'une constante sur cet intervalle :
$$\text{pour tout } x \geqslant 0 \quad \frac{f(x)^2}{2} = x + k \iff f(x)^2 = 2x + 2k$$
   On peut donc écrire pour tout $x \geqslant 0$: $f(x)^2 = 2x + C$ où C est une constante.
3. La condition $f(0) = 1$ se traduit par $C = 1$. On a donc $f(x)^2 = 2x + 1$. Puisque f est positive, on peut maintenant écrire pour tout $x \geqslant 0$: $\boxed{f(x) = \sqrt{2x+1}}$.
4. Tableau numérique.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x)$	1	1,095	1,183	1,265	1,342	1,414

   On constate la proximité des valeurs obtenues dans les deux tableaux : l'erreur est majorée par 0,02.

23 Probabilités et loi continue

1. Le texte donne
   $p(F_1) = 0,2 \qquad p(F_2) = 0,5 \qquad p(F_3) = 0,3$
   $p\left(\overline{D}\middle|_{F_1}\right) = 0,97 \quad p\left(\overline{D}\middle|_{F_2}\right) = 0,98 \quad p\left(\overline{D}\middle|_{F_3}\right) = 0,95$
   On en déduit en appliquant le cours :
   $p\left(D\middle|_{F_1}\right) = 0,03 \quad p\left(D\middle|_{F_2}\right) = 0,02 \quad p\left(D\middle|_{F_3}\right) = 0,05$
   On peut représenter les données par un arbre.



   (a) Puisque les trois événements F_1, F_2 et F_3 forment une partition de l'univers, on applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(D) &= p(D \cap F_1) + p(D \cap F_2) + p(D \cap F_3) \\ &= p(F_1)\,p\left(D\middle|_{F_1}\right) + p(F_2)\,p\left(D\middle|_{F_2}\right) + p(F_3)\,p\left(D\middle|_{F_3}\right) \\ &= 0,2 \cdot 0,03 + 0,5 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,05 \\ &= \boxed{0{,}031} \end{aligned}$$

   (b) On veut calculer $p\left(F_1\middle|_D\right) = \dfrac{p(D \cap F_1)}{p(D)}$. La probabilité de l'intersection a été calculée dans la question précédente. On en déduit : $p\left(F_1\middle|_D\right) = \dfrac{0,006}{0,031} = \dfrac{6}{31} \approx 0,194$

2. On répète 12 fois la même expérience -choisir une ampoule au hasard- en supposant les résultats indépendants. On reconnaît le schéma de Bernouilli où les paramètres sont :

$$n = 12 \qquad p = 0,031 \qquad q = 0,969$$

   On en déduit :

$$p(R) = \binom{12}{0} q^{12} + \binom{12}{1} p \cdot q^{11} = 0,969^{12} + 12 \cdot 0,031 \cdot 0,969^{11} \approx \boxed{0{,}948}$$

3. On a en général :

$$p(T \leqslant x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

On en déduit : $p(T \geqslant x) = 1 - p(T \leqslant x) = e^{-\lambda x}$.

   (a) Par application immédiate : $P_1 = e^{-1/2}$.

   (b) De même $P_2 = e^{-1}$.

   (c) L'intersection des événements $(T \geqslant 25000)$ et $(T \geqslant 50000)$ est égale à l'événement $(T \geqslant 50000)$. On a donc :

$$P_3 = \frac{P_2}{P_1} = e^{-1+1/2} = e^{-1/2}$$

24 Complexes et triangles équilatéraux directs

PREMIÈRE PARTIE

1. (a) $j = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   (b) $j^3 = e^{3\cdot\frac{2i\pi}{3}} = e^{2i\pi} = e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

   (c) $1 + j + j^2 = \dfrac{1 - j^3}{1 - j} = 0$ d'après la question précédente

   (d) $-j^2 = e^{i\pi}e^{2\cdot\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{7i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}}$

2. (a) Le triangle MNP est équilatéral direct si et seulement si M est l'image de P par la rotation de centre N et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   La traduction complexe de cette rotation est $z \mapsto z' = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - n) + n$

   Nous avons prouvé $e^{\frac{i\pi}{3}} = -j^2$. Nous pouvons donc écrire que MNP est équilatéral direct lorsque :

   $$m = e^{\frac{i\pi}{3}}(p - n) + n \iff m - n = -j^2(p - n)$$

   (b) La condition de la question précédente peut être transformée :

   $$m - n = -j^2(p - n) \iff m + (-1 - j^2)n + pj^2 = 0$$

   Nous avons prouvé $1 + j + j^2 = 0 \iff -1 - j^2 = j$. Nous pouvons donc affirmer que MNP est équilatéral direct si et seulement si $\boxed{m + nj + pj^2 = 0}$.

DEUXIÈME PARTIE

Notons o , a , b , c , d , e et f les affixes respectives des points O , A , B , C , D , E , et F.
Par hypothèse : $m = \dfrac{b + c}{2}$ $n = \dfrac{d + e}{2}$ $p = \dfrac{f + a}{2}$
Nous voulons calculer le nombre $Z = m + nj + pj^2$ et montrer qu'il s'annule. D'après la première partie, nous pourrons conclure que MNP est équilatéral direct.
Remarquons d'abord que : $Z = 0 \iff 2Z = 0$. Il suffit donc de montrer que $2Z$ s'annule. Nous obtenons d'abord :

$$2Z = (b + c) + j(d + e) + j^2(f + a) = (b + j^2a) + (c + jd) + (je + j^2f)$$

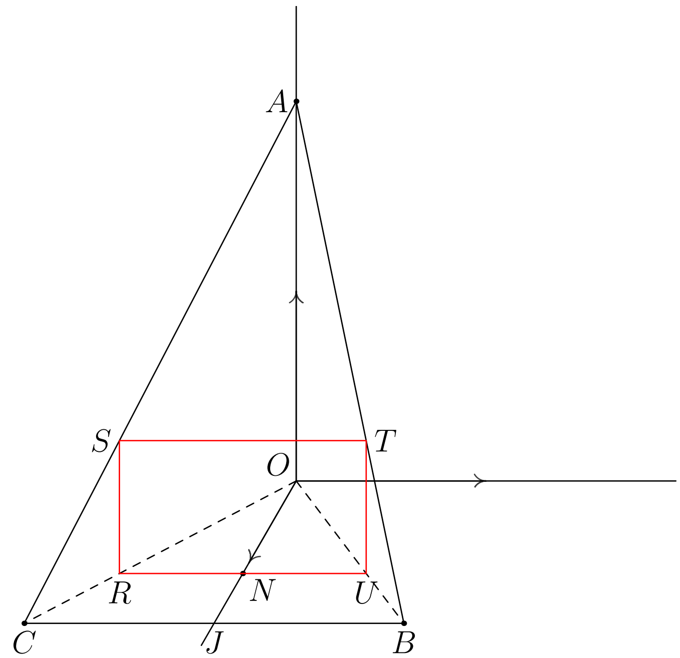
Le triangle BOA est équilatéral direct se traduit par : $b + jo + j^2a = 0 \iff b + j^2a = -jo$
Le triangle CDO est équilatéral direct se traduit par : $c + jd + j^2o = 0 \iff c + jd = -j^2o$
Le triangle OEF est équilatéral direct se traduit par : $o + je + j^2f = 0 \iff je + j^2f = -o$
Nous en déduisons : $2Z = -(1 + j + j^2)o$.
Nous avons démontré $1 + j + j^2 = 0$, ce qui entraîne $2Z = 0$ puis $Z = 0$ et enfin

$$\boxed{MNP \text{ est équilatéral direct}}$$

25 Tétraèdre, section plane et volume

Partie A

1. (a) Figure.



(b) On vérifie d'abord que O est équidistant des trois points A , B et C :

$$OA^2 = 2^2 = 4 \quad OB^2 = \sqrt{3}^2 + 1^2 = 4 \quad OC^2 = (-\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$$

On a donc $OA = OB = OC = 2$.
On vérifie ensuite que $\overrightarrow{OA}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \cdot \sqrt{3} + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \cdot (-\sqrt{3}) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0$$

Les triangles OAB et OAC sont donc isocèles rectangles en O .
On vérifie ensuite que $BC = 2$ et on en déduit que OBC est équilatéral .
Il reste maintenant à vérifier $AB^2 = OB^2 + OA^2 = OC^2 + OA^2 = AC^2 = 8$.
On en déduit : $AB = AC = 2\sqrt{2}$. Le triangle ABC est donc isocèle en A .

2. (a) On calcule les produits scalaires :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \sqrt{3} + 0 \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot (-2) = 0 \qquad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot \sqrt{3} + 0 \cdot (-1) + \sqrt{3} \cdot (-2) = 0$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est normal au plan (ABC) car il est ortogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

(b) Un point $M(x, y, z)$ quelconque de l'espace appartient à (ABC) si et seulement si :
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \iff x \cdot 2 + y \cdot 0 + (z - 2) \cdot \sqrt{3} = 0 \iff \boxed{2x + \sqrt{3}z - 2\sqrt{3} = 0}$

Partie B

1. On calcule les coordonnées de $J\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\\0\end{pmatrix}$ dont on déduit la distance $OJ = \sqrt{3}$.

   Puisque N est un point de $[OJ]$, on a bien $\boxed{0 \leqslant t = ON \leqslant OJ = \sqrt{3}}$.

2. Par hypothèse, $\overrightarrow{i}$ est normal à $\mathcal{P}$ et ce plan passe par N : on en déduit que $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $x = t$.

   (a) L'intersection de $\mathcal{P}$ et de (ABC) est l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions du système :

   $$\begin{cases} x & = & t \\ 2x + \sqrt{3}z & = & 2\sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & t \\ z & = & 2 - \dfrac{2t}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

   Il s'agit donc d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{j}$.
   On vérifie de la même façon que l'intersection de $\mathcal{P}$ et de (OBC) est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{j}$. Ces deux droites sont parallèles à (BC) puisque $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{j}$.
   Pour $t \neq 0$ les droites (ST) et (RU) sont bien définies et parallèles à (BC).
   Le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan $(O, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ car le vecteur $\overrightarrow{i}$ est normal à ces deux plans. Les droites d'intersection de ces deux plans avec(OAB) sont donc parallèles. De même les droites d'intersection de ces deux plans avec(OAC) sont parallèles.
   Pour $t \neq \sqrt{3}$ les droites (RS) et (UT) sont bien définies et parallèles à (OA).

   (b) Supposons $0 < t < \sqrt{3}$. D'après la question précédente $RSTU$ est un parallélogramme. Puisque (UT) est parallèle à (OA), le vecteur $\overrightarrow{UT}$ est normal au plan (OBC) : il est donc orthogonal au vecteur $\overrightarrow{RU}$ et le quadrilatère $RSTU$ est un rectangle.
   Pour $t = 0$ ou $t = \sqrt{3}$, le quadrilatère $RSTU$ se réduit à un segment.

   (c) Il s'agit de calculer RU et UT.
   Dans le cas où $t = 0$ on a : $R = U = O$ et $S = T = A$: $RU = 0$ et $UT = OA = 2$.
   Dans le cas où $t = \sqrt{3}$ on a : $T = U = B$ et $S = R = C$: $RU = BC = 2$ et $UT = 0$.
   On suppose maintenant $0 < t < \sqrt{3}$.
   Appliquons le théorème de Thalès au triangle OJB :

   $$\frac{ON}{OJ} = \frac{NU}{JB} \iff NU = \frac{t}{\sqrt{3}}JB$$

   En raisonnant de la même façon dans le triangle OJC nous obtenons $NR = \dfrac{t}{\sqrt{3}}JC$.
   Ces deux résultats entraînent $RU = \dfrac{t}{\sqrt{3}}BC = \boxed{\dfrac{2t}{\sqrt{3}}}$.
   On peut remarquer que cette relation est encore vraie pour $t = 0$ et $t = \sqrt{3}$.
   Appliquons le théorème de Thalès au triangle OAB :

   $$\frac{BU}{BO} = \frac{UT}{OA} \iff UT = 2 \cdot \frac{BU}{BO}$$

Nous en déduisons : $UT = 2 \cdot \left(1 - \dfrac{OU}{OB}\right) = \boxed{2\left(1 - \dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)}$.

On peut remarquer que cette relation est encore vraie pour $t = 0$ et $t = \sqrt{3}$.

3. (a) Puisque $RSTU$ est un rectangle lorsque $0 < t < \sqrt{3}$:

$$S(t) = RU \cdot UT = \frac{2t}{\sqrt{3}} \cdot 2\left(1 - \frac{t}{\sqrt{3}}\right) = \boxed{\frac{4t\left(\sqrt{3} - t\right)}{3}}$$

L'égalité s'étend aux cas $t = 0$ et $t = \sqrt{3}$.

(b) On écrit $S(t) = \dfrac{4}{3}\left(t\sqrt{3} - t^2\right)$ et on calcule la dérivée :

$$S'(t) = \frac{4}{3}\left(\sqrt{3} - 2t\right) = \frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - t\right)$$

D'où le tableau de variations de S :

t	0		$\sqrt{3}/2$		$\sqrt{3}$
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(c) La fonction S atteint donc son maximum pour $\boxed{t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

Dans ce cas $RU = UT = 1$ et $RSTU$ est un <u>carré</u>.

4. (a) Premier calcul du volume :

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \left(t\sqrt{3} - t^2\right)\, dt = \frac{4}{3}\left[\frac{t^2\sqrt{3}}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{3}\right) = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

(b) Second calcul du volume.

On calcule l'aire de OBC : $\mathcal{A} = \dfrac{OJ \cdot BC}{2} = \sqrt{3}$.

La hauteur correspondante est alors $h = OA = 2$.

On en déduit le volume du tétraèdre : $\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{A} \cdot h}{3} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$

(c) On trouve effectivement le même résultat par les deux méthodes.