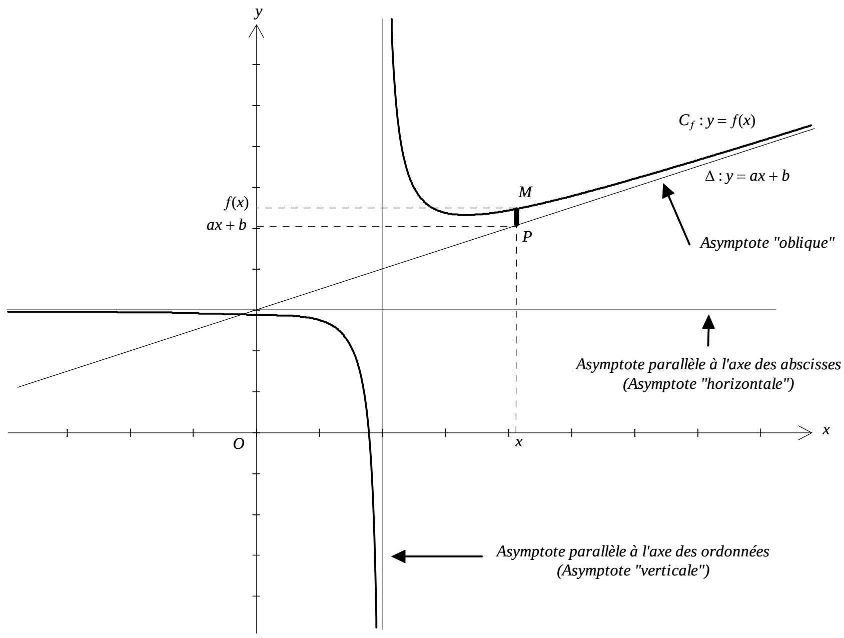
FICHE MÉTHODE : COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES

La notion d'asymptote à une courbe est liée à la notion de limite d'une fonction

Soit f une fonction représentée par une courbe C_f.

Dans les définitions suivantes, le symbole $\ast$ représente un "+" ou un "–" :

- Si la limite de f en a^* est **infinie**, alors on dit que la courbe C_f admet une asymptote "verticale" d'équation $x = a$.
- Si la limite de f en $\ast\infty$ est un nombre **fini** k, alors on dit que la courbe C_f admet une asymptote "horizontale" d'équation $y = k$ en $\ast\infty$.
- Si la limite en $\ast\infty$ des nombres $\boldsymbol{f(x) - (ax + b)}$ est **nulle**, alors on dit que la courbe C_f admet une asymptote "oblique" d'équation $y = ax + b$ en $\ast\infty$.



Pour l'asymptote oblique, il faut bien comprendre ce qui suit : les nombres $f(x) - (ax + b)$ représentent "l'écart vertical" entre la courbe C_f et la droite Δ aux points d'abscisses x (distance MP sur la figure).

Vocabulaire : on parle de l'asymptote **à une courbe** (et non à une fonction). C'est une notion **graphique**.

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = x\,\mathbf{e}^{-x}$.

On note C_f sa courbe représentative.

1) Étudier la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement.
2) Étudier la limite de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement.

SOLUTION :

1) On sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha\,\mathbf{e}^{-x} = 0$ pour tout $\alpha > 1$ (formulaire). Avec $\alpha = 1$, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathbf{e}^{-x} = 0$

   La limite de f en $+\infty$ est **finie**, donc la courbe C_f admet une asymptote "horizontale" en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

2) On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\mathbf{e}^{x}} = +\infty, \text{ puisque } \lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^{x} = 0^+. \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty. \end{cases}$$

   Donc, par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathbf{e}^{-x} = -\infty$.

   La limite de f en $-\infty$ n'est **pas finie**, donc la courbe C_f n'admet pas d'asymptote "horizontale" en $-\infty$.

Exemple 2 :

Soit f la fonction définie, sur $]2 ; +\infty[$, par : $f(x) = \ln(x - 2) - \ln(x + 1) + x$.

On note C_f sa courbe représentative.

1) Démontrer que la droite D d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à C_f.
2) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$.

SOLUTION :

1) Ici, il ne peut s'agir que de la limite en 2^+. (Car f est définie sur]2 ; +∞[). On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} (x-2) = 0^+, \text{ donc } \lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x-2) = -\infty. \text{ (Car } \lim\limits_{X\to 0^+} \ln X = -\infty) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} [-\ln(x+1)+x] = -\ln 3 + 2 \end{cases}$$

Donc, par addition, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$.

La courbe C_f admet donc une asymptote "verticale" D d'équation $x = 2$.

2) Nous devons étudier la limite en +∞ de la différence : $f(x) - x = \ln(x-2) - \ln(x+1)$.

La différence $\ln(x-2) - \ln(x+1)$ est indéterminée en +∞. (Forme "∞ – ∞")

D'après la relation : $\ln A - \ln B = \ln\dfrac{A}{B}$ pour tous A et B de]0 ; +∞[, nous obtenons :

$$\ln(x-2) - \ln(x+1) = \ln\frac{x-2}{x+1}$$

Le quotient $\dfrac{x-2}{x+1}$ est toujours indéterminé en +∞. (Forme "$\dfrac{\infty}{\infty}$")

En mettant le terme de plus haut degré en facteur, on obtient :

$$\frac{x-2}{x+1} = \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$)

Donc, par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+1} = 1$

Remarque : on obtient également ce résultat en utilisant la règle : "la limite d'une fonction rationnelle en +∞ est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré".

On en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{x-2}{x+1} = \ln 1 = 0$

Bilan : $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = 0$. Donc la droite Δ d'équation $y = x$ est bien asymptote "oblique" à C_f en +∞.

Exercices proposés

1) Soit C_m la fonction définie, sur ℝ, par : $C_m(q) = 0{,}8 + 4(1-2q)\,\mathbf{e}^{-2q}$

Étudier les limites de C_m en –∞ et en +∞. Interpréter graphiquement.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{\mathbf{e}^x - 1}$

Déterminer les limites de f en 0^+ et 0^-. Interpréter graphiquement.

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (2x-1)]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (2x-2)]$. Interpréter graphiquement.

Réponses des exercices proposés :

1) $\lim\limits_{q\to-\infty} C_m(q) = +\infty$. Pas d'asymptote "horizontale" en –∞.

$\lim\limits_{q\to+\infty} C_m(q) = 0{,}8$. Asymptote "horizontale" d'équation $y = 0{,}8$ en +∞.

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$. Asymptote "verticale" d'équation $x = 0$.

Deux asymptotes obliques. En +∞ : $y = 2x - 1$. En –∞ : $y = 2x - 2$.