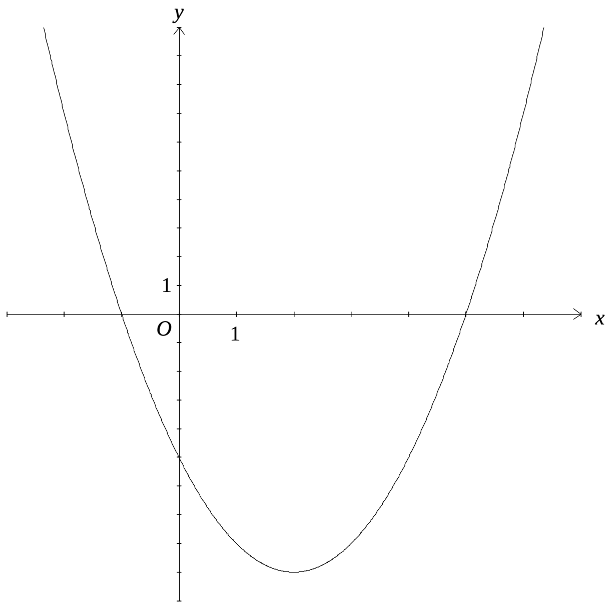
Exemple 1 : *équation d'une parabole*

Soit P une parabole dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Son équation est de la forme :

$$y = a\,x^2 + bx + c$$

À l'aide de renseignements obtenus sur le graphique, déterminer les coefficients a, b et c.



SOLUTION :

Notons f la fonction polynôme du second degré représentée par P.

On lit facilement les deux racines : $\alpha = -1$ et $\beta = 5$

Or, on sait que : $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$.

On a donc : $f(x) = a(x + 1)(x - 5)$.

En développant : $f(x) = a(\,x^2 - 4x - 5)$.

Par ailleurs, on lit facilement : $f(0) = -5$. Or, $f(0) = -5a$. On a donc : $a = 1$.

Conclusion : $f(x) = \;x^2 - 4x - 5$ ($a = 1$; $b = -4$ et $c = -5$)

Exemple 2 : *fonction comportant une exponentielle*

On considère une fonction f définie, sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = (a\,x^2 + bx + c)\,\mathbf{e}^{-x}$.

On note C sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On sait que la courbe C passe par le point $A(0\,;\,1)$ et qu'elle admet une tangente parallèle à (Ox) au point d'abscisse 1. On sait aussi que $f\,'(0) = -6$.

Déterminer les coefficients a, b et c.

SOLUTION :

La condition "C passe par $A(0\,;\,1)$" se traduit par : $f(0) = 1$, c'est-à-dire : $c = 1$.

Pour exploiter les deux autres conditions, calculons la dérivée $f\,'$ de f :

La fonction f est du type : $\quad f = uv \quad$ avec $\begin{cases} u(x) = ax^2 + bx + c \\ v(x) = \mathbf{e}^{-x} \end{cases}$

On a donc : $\quad f\,' = u'v + uv'$

Ce qui donne : $\quad f\,'(x) = (2ax\; + b)\;\mathbf{e}^{-x} + (a\,x^2 + bx + c) \times (-\,\mathbf{e}^{-x})$

Factorisons par $\mathbf{e}^{-x}$, puis réduisons : $f\,'(x) = (-a\,x^2 + (2a - b)x + (b - c))\,\mathbf{e}^{-x}$

La condition "C admet une tangente parallèle à (Ox) au point d'abscisse 1" se traduit par : $f\,'(1) = 0$

D'où : $\quad (-a + (2a - b) + (b - c)\;\;\mathbf{e}^{-1} = 0$

C'est-à-dire : $\quad (a - c)\;\;\mathbf{e}^{-1} = 0$

Or, $\mathbf{e}^{-1} \neq 0$ donc : $\quad a = c = 1$

Et enfin la condition $f'(0) = -6$ donne : $b - c = -6$ d'où $b = c - 6 = -5$

Conclusion : $f(x) = (x^2 - 5x + 1)\,\mathbf{e}^{-x}$ $(a = 1 ; b = -5$ et $c = 1)$

Remarque : il faut, en général, autant de conditions qu'il y a de coefficients à déterminer.

Exercices proposés :

1) Une parabole P passe par les points $A(1 ; 4)$, $B(-1 ; 12)$ et $C(2 ; 9)$. Déterminer une équation de P.

(Voir aussi la fiche méthode : "résolution de systèmes")

2) Une parabole P passe par les points $A(-1, 1)$ et admet en $B(2, -2)$ une tangente dont le coefficient directeur égal à 5. Déterminer une équation de P.
3) Une droite D passe par les points $A(1 ; 4)$ et $B(-1 ; 2)$. Déterminer une équation de D
4) Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = A\,\mathbf{e}^{x} + B\,\mathbf{e}^{-2x}$

   On sait que $f'(0) = 1$ et que $\int_{-\ln 3}^{\ln 3} f(x)\,\mathrm{d}x = 32$. Déterminer A et B.

Exercice plus difficile

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathbf{e}^{x}}$

On veut déterminer une primitive de f. Pour cela, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - f(x).$$

1. Calculer une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = -1 - \ln 2$.

Réponses des exercices proposés :

1) $y = 3x^2 - 4x + 5$ 2) $y = 2x^2 - 3x - 4$ 3) $y = x + 3$ 4) $A = 7$ et $B = 3$

Indication pour l'exercice plus difficile :

Réduire au même dénominateur l'écriture de $g(x)$. On obtient ainsi la forme $\dfrac{u'}{u}$.