

## FICHE MÉTHODE : POSITIONS RELATIVES DE DEUX COURBES

Sont traités dans cette fiche les problèmes de positions relatives de deux courbes ou d'une courbe par rapport à une droite. (Une droite n'étant qu'une courbe particulière)

### Exemple 1 :

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies par :  $f(x) = x^2$  ;  $g(x) = x$ .

On note  $C_f$  et  $C_g$  les courbes respectives de ces fonctions.

Étudier, sur  $[0 ; +\infty[$ , les positions relatives des courbes  $C_f$  et  $C_g$ .

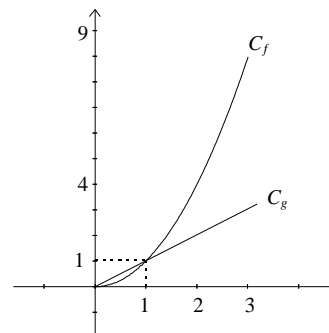
### SOLUTION :

Pour cela, on étudie le **signe** de la différence  $f(x) - g(x)$  :

$$f(x) - g(x) = x^2 - x = x(x - 1)$$

Tableau de signes :

$x$	0	1	$+\infty$	Calculs et justifications des signes
$x$	0	+	+	
$x - 1$		-	0	$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$
$f(x) - g(x)$	0	-	0	+



On a donc :  $f \leq g$  sur  $[0 ; 1]$  et  $f \geq g$  sur  $[1 ; +\infty[$ .

Graphiquement :  $C_f$  est en dessous de  $C_g$  sur  $[0 ; 1]$  et  $C_f$  est au dessus de  $C_g$  sur  $[1 ; +\infty[$ .

(Moralité : un nombre  $A$  n'est pas toujours inférieur à  $A^2$ ... C'est vrai si  $A \in [1 ; +\infty[$  mais faux si  $A \in [0 ; 1]$ )

### Exemple 2 :

Soient  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = (x - 1)^3 + x$ .

On note  $C_f$  sa courbe représentative et  $T$  la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse  $x_0 = 1$ .

Étudier la position relative de  $C_f$  par rapport à  $T$ .

### SOLUTION :

La fonction  $f$  est de la forme :

$$f = u^3 + v$$

$$\text{avec } \begin{cases} u(x) = x - 1 \\ v(x) = x \end{cases}$$

On a donc :

$$f' = 3u'u^2 + v'$$

Ce qui donne :

$$f'(x) = 3(x - 1)^2 + 1$$

L'équation de la tangente  $T$  à  $C_f$  au point d'abscisse  $x_0$  est donnée par la formule :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Avec  $x_0 = 1$ , nous obtenons :

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

On a :  $f(1) = 1$  et  $f'(1) = 1$ .

D'où une équation de  $T$  :

$$y = x$$

La position relative de  $C_f$  par rapport à  $T$  est donnée par le **signe** de la différence  $f(x) - x$  :

$$f(x) - x = (x - 1)^3 = (x - 1)^2 (x - 1)$$

On a donc :  $f(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

C'est-à-dire :  $f(x) \geq x \Leftrightarrow x \geq 1$

Conclusion : la courbe  $C_f$  est au dessus de  $T$  sur  $]1 ; +\infty[$  et donc en dessous de  $T$  sur  $]-\infty ; 1]$ .

Remarque : cet exemple illustre le cas où la courbe "traverse" sa tangente. On appelle ceci "un point d'inflexion".

Exercice supplémentaire : tracer, soigneusement,  $C_f$  et  $T$  de l'exemple ci-dessus.

Exercices proposés :

1) Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\varphi(x) = e^x - (x + 1)$ .

Dresser le tableau de variation de  $\varphi$ . En déduire le signe de la fonction  $\varphi$ .

En déduire que la courbe de la fonction exponentielle est située **au dessus** de la droite d'équation  $y = x + 1$ .

2) Soit  $f$  la fonction définie, sur  $]2 ; +\infty[$ , par :  $f(x) = \ln(x - 2) - \ln(x + 1) + x$ .

On note  $C_f$  sa courbe représentative.

Démontrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à  $C_f$  en  $+\infty$ .

Étudier la position relative de  $C_f$  et  $\Delta$ .

(Voir aussi la fiche méthode : "comportements asymptotiques")

Question supplémentaire : justifier pourquoi la fonction  $f$  de l'exercice 2 ci-dessus est définie sur  $]2 ; +\infty[$ .

Réponses et/ou indications pour les exercices proposés :

1)  $\varphi'(x) = e^x - 1$ . Montrer que :  $\varphi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

On obtient ensuite facilement le tableau de variation de  $\varphi$ .

Pour obtenir le signe de  $\varphi$ , calculer  $\varphi(0)$ .

2) On trouve :  $f(x) - x = \ln(x - 2) - \ln(x + 1)$ .

Or, on a :  $x - 2 \leq x + 1$

D'après la propriété :  $A \leq B \Leftrightarrow \ln A \leq \ln B$  pour tous  $A$  et  $B$  de  $]0 ; +\infty[$ , on obtient :

Pour tout  $x \in ]2 ; +\infty[$  :  $\ln(x - 2) \leq \ln(x + 1)$

On en déduit, pour tout  $x \in ]2 ; +\infty[$  :  $f(x) - x \leq 0$

Donc :  $C_f$  est **en dessous** de  $\Delta$  sur  $]2 ; +\infty[$