

FICHE MÉTHODE : DÉTERMINER UNE PRIMITIVE

Dans toute cette fiche, si f est une fonction, on notera F l'une de ses primitives. La lettre c désignera une constante.

On rappelle que F est une primitive de f sur un **intervalle** I si : $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

On rappelle également qu'une primitive de $f + kg$ ($k \in \mathbb{R}$) est $F + kG$. (Linéarité)

Cas des fonctions polynômes

Une seule formule à connaître : si $f(x) = x^n$ alors $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$)

Exemple 1 :

Déterminer une primitive F de la fonction f définie, sur \mathbb{R} , par : $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 7x - 1$

SOLUTION :

$$F(x) = 3 \times \frac{x^4}{4} - 4 \times \frac{x^3}{3} + 7 \times \frac{x^2}{2} - x + c = \frac{3}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - x + c$$

Cas des fonctions usuelles

Une lecture "réciproque" des formules de dérivation des fonctions usuelles est suffisante pour déterminer une primitive. Rappelons ces formules :

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (\text{Condition : } x \neq 0) \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\text{Condition : } x > 0)$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (\text{Condition : } x > 0) \quad (e^x)' = e^x$$

Exemple 2 :

Déterminer une primitive F de la fonction f définie, pour $x \in]0 ; +\infty[$, par : $f(x) = \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} + 6e^x$

SOLUTION :

$$F(x) = 5 \times \ln x + 3 \times \frac{1}{x} + 6e^x + c = 5 \ln x + \frac{3}{x} + 6e^x + c$$

La notion de primitive n'est valable que sur un **intervalle**. Même si l'ensemble de définition d'une fonction f est \mathbb{R}^* , on ne cherche ses primitives que sur un intervalle (ici $]0 ; +\infty[$)

Cas des fonctions composées

Une bonne connaissance des formules de dérivation est, en générale, suffisante pour déterminer une primitive.

On rappelle ces formules : (valables lorsque u est une fonction dérivable)

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (\text{Condition : } u > 0) \quad \text{Une primitive de } \frac{u'}{u} \text{ est donc } \ln u$$

$$e^u = u' e^u \quad \text{Une primitive de } u' e^u \text{ est donc } e^u$$

$$(u^n)' = n u' u^{n-1} \quad (\text{Conditions : } u > 0 \text{ ou } n \in \mathbb{N}) \quad \text{Une primitive de } u' u^n \text{ est donc } \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (\text{Condition : } u > 0) \quad \text{Une primitive de } \frac{u'}{\sqrt{u}} \text{ est donc } 2\sqrt{u}$$

Exemple 3 :

Déterminer une primitive des fonctions f et g définies par : $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ et $g(x) = 3x e^{x^2}$

SOLUTIONS :

- Écrivons : $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2 + 1}$. Ainsi, f est de la forme : $f = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$.

Une primitive F de f est donc : $F = \frac{1}{2} \ln u + c$. Ce qui donne : $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c$

- Écrivons : $g(x) = \frac{3}{2} \times 2x e^{x^2}$. Ainsi, g est de la forme : $g = \frac{3}{2} \times u' e^u$ avec $u(x) = x^2$.

Une primitive G de g est donc : $G = \frac{3}{2} \times e^u + c$. Ce qui donne : $G(x) = \frac{3}{2} e^{x^2} + c$

Cas où l'on dérive une certaine fonction proposée dans l'énoncé

C'est un grand classique. On cherche une primitive d'une certaine fonction f . Pour cela, l'énoncé introduit une certaine fonction F et nous demande de la dériver. On constate alors que $F' = f$. On en déduit que F est une primitive de f .

Exemple 4 :

Soit f la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(2x - 2)$

On considère la fonction F définie sur $]1 ; +\infty[$ par :

$$F(x) = (x - 1)\ln(2x - 2) - x$$

Dériver F . En déduire que F est une primitive de la fonction f sur $]1 ; +\infty[$.

SOLUTION :

Dérivons la fonction F qui est de la forme : $F = uv - w$ avec $\begin{cases} u(x) = x - 1 \\ v(x) = \ln(2x - 2) \\ w(x) = x \end{cases}$

On a donc : $F' = u'v + uv' - w'$

On obtient, pour tout $x \in]1 ; +\infty[$: $F'(x) = \ln(2x - 2) + (x - 1) \times \frac{2}{2x - 2} - 1$

$$F'(x) = \ln(2x - 2) + (x - 1) \times \frac{2}{2(x - 1)} - 1$$

$$F'(x) = \ln(2x - 2) + 1 - 1 = \ln(2x - 2) = f(x)$$

Comme $F' = f$, on en déduit bien : F est une primitive de f sur $]1 ; +\infty[$

Primitive d'une fonction définie par une "condition initiale"

C'est un fait : si une fonction f admet une primitive F , alors elle en admet une infinité (il suffit de modifier la constante c). Cependant, si on impose une certaine condition (du type $y_0 = F(x_0)$ où x_0 et y_0 sont donnés), alors la primitive F est unique. (Et il faut déterminer la "bonne" constante c)

Exemple 5 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$.

Déterminer la primitive F de f telle que $F(-1) = 2$.

SOLUTION :

Les primitives F de f sont de la forme : $F(x) = x^3 + x^2 - 4x + c$

La condition $F(-1) = 2$ s'écrit : $2 = -1 + 1 + 4 + c$

D'où : $c = -2$

La primitive F recherchée est donc la fonction F définie par : $F(x) = x^3 + x^2 - 4x - 2$

Exercices proposés :

1) Trouver une primitive des fonctions f et g définies par : $f(x) = (3x^2 + 2)e^{(x^3+2x)}$ et $g(x) = e^{-2x} + \frac{3x}{x^2+1}$

2) On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 8\ln x - 4x + 4$.

Montrer que la fonction H définie sur $]0 ; +\infty[$ par $H(x) = x \ln x - x$ est une primitive de la fonction \ln .

En déduire la primitive F de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$ telle que $F(1) = -4$.

Réponses : 1) $F(x) = e^{(x^3+2x)} + c$ et $G(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + c$ 2) $F(x) = 8x \ln x - 2x^2 - 4x + 2$