FICHE MÉTHODE : RÉSOLUTION DE SYSTÈMES

Exemple 1 : *systèmes linéaires*

Une parabole P passe par les points $A(1\ ;\ 5)$, $B(-2\ ;\ 3)$ et $C(3\ ;\ 8)$. Déterminer une équation de P

SOLUTION :

Une parabole a une équation de la forme : $y = a\,x^2 + bx + c$

En remplaçant x et y par les coordonnées de A, B et C, on obtient un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} a + b + c = 5 & (E_1) \\ 4a - 2b + c = 3 & (E_2) \\ 9a + 3b + c = 8 & (E_3) \end{cases}$$

Ce système peut se résoudre par la méthode de substitution.

Avec (E_1), exprimons a en fonction de b et c : $a = 5 - b - c$

En remplaçant a par $5 - b - c$ dans (E_2), on obtient :

$$4(5 - b - c) - 2b + c = 3$$

$$-6b - 3c = -17 \qquad (E_4)$$

En remplaçant a par $5 - b - c$ dans (E_3), on obtient :

$$9(5 - b - c) + 3b + c = 8$$

$$-6b - 8c = -37 \qquad (E_5)$$

On résout maintenant le système constitué des équations (E_4) et (E_5). (Système à 2 inconnues)

$$\begin{cases} 6b + 3c = 17 & (E_4) \\ 6b + 8c = 37 & (E_5) \end{cases}$$

En effectuant $(E_5) - (E_4)$, on obtient : $5c = 20$ d'où $c = 4$

On remplace c par 4 dans (E_4) : $6b + 12 = 17$ d'où $b = \dfrac{5}{6}$

On remplace c par 4 et b par $\dfrac{5}{6}$ dans (E_1) : $a + \dfrac{5}{6} + 4 = 5$ d'où $a = \dfrac{1}{6}$

Conclusion : une équation de P est : $y = \dfrac{1}{6}\,x^2 + \dfrac{5}{6}\,x + 4$

On vérifiera que P passe bien par A, B et C.

Exemple 2 : *système non linéaire*

Déterminer tous les couples $(x\ ;\ y)$ de nombres réels qui vérifient simultanément les deux équations :

$$\begin{cases} \ln(x^2) + \ln(y^2) = 2\ln 6 \\ \mathbf{e}^x = \dfrac{1}{\mathbf{e}^{1+y}} \end{cases}$$

SOLUTION :

Contraintes : $x \neq 0$ et $y \neq 0$

La deuxième équation est équivalente à : $\mathbf{e}^x\ \mathbf{e}^{1+y} = 1$

$$\mathbf{e}^{x+1+y} = 1$$

D'après la propriété : $\ln A = \ln B \Leftrightarrow A = B$ pour tous A et B de $]0\,;+\infty[$, on obtient :

$$\ln\ \mathbf{e}^{x+1+y} = \ln 1$$

$$x + y + 1 = 0$$

$$x + y = -1$$

Remplaçons y par $-1 - x$ dans la première équation.

$$\ln(x^2) + \ln((1+x)^2) = 2\ln 6 = \ln 36$$

D'après la relation : $\ln A + \ln B = \ln(AB)$ pour tous A et B de $]0\,;+\infty[$, la première équation s'écrit :

$$\ln(x^2(1+x)^2) = \ln 36$$

D'après la propriété : $\ln A = \ln B \Leftrightarrow A = B$ pour tous A et B de $]0\,;+\infty[$, on obtient :

$$x^2(1+x)^2 = 36$$

En factorisant : $$(x(1+x) - 6)(x(1+x) + 6) = 0$$

On obtient deux équations du second degré :

$$x^2 + x - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + x + 6 = 0$$

La seconde a un discriminant strictement négatif ($\Delta = -23$), donc n'a pas de solution.

La première a un discriminant $\Delta = 25$ et admet deux solutions distinctes : $x_1 = 2$ et $x_2 = -3$

Pour $x_1 = 2$, on trouve $y_1 = -1 - x_1 = -3$.

Pour $x_2 = -3$, on trouve : $y_2 = -1 - x_2 = 2$

Conclusion : il y a deux couples solutions : $S = \{(2\,;-3)\,;(-3\,;2)\}$

Exercices proposés :

1) Résoudre le système $\begin{cases} x - 3y = 2\ln 2 \\ x + y = 4\ln 2 \end{cases}$.

2) On pose $I = \displaystyle\int_0^{\ln 16} \frac{\mathbf{e}^x + 3}{\mathbf{e}^x + 4}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\ln 16} \frac{1}{\mathbf{e}^x + 4}\,\mathrm{d}x$. Calculer $I - 3J$ et $I + J$. Déduire de la question 1) les valeurs exactes de I et J

Réponses des exercices proposés :

1) $S = \{(\frac{7}{2}\ln 2\,;\,\frac{1}{2}\ln 2)\}$ 2) $I = \frac{7}{2}\ln 2$ et $J = \frac{1}{2}\ln 2$