Exemple 1 : limite d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+x)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-x+1}{x+4}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-x+1}{x^2+x+1}$

Méthodes :

- Pour étudier la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction polynôme indéterminée, vous pouvez mettre le terme de plus haut degré en facteur.
  ATTENTION : cette méthode ne fonctionne que pour les limites en $+\infty$ ou $-\infty$.
  Vous pouvez aussi utiliser la règle suivante (en la citant) : "la limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ (ou $-\infty$) est égale à la limite de son terme de plus haut degré."
- Pour une fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynômes), on "factorise" le numérateur et le dénominateur.
  Vous pouvez aussi utiliser la règle suivante (en la citant) : "la limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ (ou $-\infty$) est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré."

SOLUTIONS :

1) En $-\infty$, la somme x^2+x est indéterminée du type "$\infty-\infty$".

On met le terme de plus haut degré en facteur : $x^2+x = x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$. On raisonne ainsi avec un produit :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{car} \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+x) = +\infty$.

Remarque : dans cet exemple, la factorisation $x^2+x = x(x+1)$ permet aussi de lever l'indétermination.

Autre méthode : la limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ (ou $-\infty$) est égale à la limite de son terme de plus haut degré. Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

2) On a la "factorisation" suivante : $\dfrac{3x^2-x+1}{x+4} = \dfrac{x^2\left(3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\dfrac{4}{x}\right)} = x\,\dfrac{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{4}{x}}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{4}{x}} = 3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc, par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\dfrac{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{4}{x}} = +\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-x+1}{x+4} = +\infty$.

Autre méthode : la limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ (ou $-\infty$) est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-x+1}{x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} 3x = +\infty$$

3) De même que ci-dessus : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-x+1}{x^2+x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} 3 = 3$

Exemple 2 : comment faire lorsque la fonction n'est pas polynomiale ?

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x})$ (F.I. du type "$\infty-\infty$")

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\,\mathbf{e}^{-x}$ (F.I. du type "$\infty\times 0$")

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\ln x)$ (F.I. du type "$\infty-\infty$")

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{x^2+1}$ (F.I. du type "$\dfrac{\infty}{\infty}$")

Méthodes :

Au moins deux possibilités :

- on se ramène à une limite de référence (cours ou formulaire)
- on essaye de "factoriser" par le terme dominant.

SOLUTIONS :

1) Il suffit d'écrire : $x - \sqrt{x} = \sqrt{x} \times \sqrt{x} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 1)$.

On a maintenant : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - 1) = +\infty$, donc par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 1) = +\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x}) = +\infty$

2) On sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha}\, \mathbf{e}^{-x} = 0$ pour tout $\alpha > 0$ (cours). Avec $\alpha = 2$, on obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\, \mathbf{e}^{-x} = 0$.

3) Il suffit d'écrire : $x - \ln x = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$ (Ultra classique !)

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (cours ou formulaire). Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$

Et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, on obtient, par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x) = +\infty$.

4) On écrit : $\dfrac{\mathbf{e}^x}{x^2 + 1} = \dfrac{\mathbf{e}^x}{x^2} \times \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ (ceci afin de se ramener à une limite de référence)

On sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{x^{\alpha}} = +\infty$ pour tout $\alpha > 0$ (formulaire). Avec $\alpha = 2$, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{x^2} = +\infty$.

En outre, la limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ (ou $-\infty$) est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$.

Donc par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{x^2} \times \dfrac{x^2}{x^2 + 1} = +\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{x^2 + 1} = +\infty$.

Exercices proposés :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\mathbf{e}^{2x} - \mathbf{e}^x)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x^3} + x^4\, \mathbf{e}^{-x}\right)$ (Penser à utiliser les limites de référence)

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\mathbf{e}^x}$ (Au fait : $\dfrac{1}{\mathbf{e}^x} = \mathbf{e}^{-x}$)

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\ln x}$ (Chercher d'abord la limite de l'inverse ...)

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} [\ln(2 - 2x) - \ln(1 - 2x)]$ (Penser à utiliser $\ln A - \ln B = ...$)

(Voir aussi l'exemple 2 de la fiche méthode "comportements asymptotiques")

Exercice plus difficile : (indétermination du type " $\dfrac{0}{0}$ ")

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$.

Étudier la limite de f en 2^+ et en 2^-.

Réponses des exercices proposés :

1) $+\infty$ 2) 0 3) 0 4) $+\infty$ 5) 0

Indication pour l'exercice plus difficile : chercher les racines de numérateur et le factoriser.