Vocabulaire : soit $a \neq 0$. On appelle :

- Trinôme du second degré, l'expression : $a x^2 + bx + c$.
- Équation du second degré, toute équation se ramenant à la forme : $a x^2 + bx + c = 0$.
- Inéquation du second degré, toute inéquation se ramenant à la forme : $a x^2 + bx + c \geqslant 0$ (ou $>$ ou $\leqslant$ ou $<$).
- Fonction polynôme du second degré, toute fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, pouvant se ramener à la forme :

$$f(x) = a x^2 + bx + c.$$

- Parabole, la courbe représentant une fonction polynôme du second degré.
- Discriminant Δ, la quantité : $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Racines du trinôme du second degré ou solutions de l'équation du second degré, les réels x_1 et x_2 donnés par :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{lorsque } \Delta \geqslant 0$$

(Avec x_1 et x_2 éventuellement confondus lorsque $\Delta = 0$)

- Factorisation du trinôme du second degré, la factorisation : $a x^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ lorsque $\Delta \geqslant 0$.

Question préliminaire : pourquoi a-t-on supposé $a \neq 0$?

Exemple 1 : *équations incomplètes ou le calcul du discriminant est inutile (donc gain de temps ...)*

Résoudre les équations :

1) $3x - x^2 = 0$

2) $3x^2 - 1 = 0$

3) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} = -2$

SOLUTIONS :

1) On factorise par x : $\quad x(3 - x) = 0$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 3 - x = 0$$

D'où : $\quad S = \{0 \,;\, 3\}$

2) Notre équation peut s'écrire : $\quad \left(\sqrt{3}x\right)^2 - 1^2 = 0$

D'après l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ appliquée avec $a = \sqrt{3}\,x$ et $b = 1$, nous obtenons :

$$(\sqrt{3}\,x - 1)(\sqrt{3}\,x + 1) = 0$$

D'où : $\quad S = \{-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \,;\, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\}$

3) Avant tout, précisons que l'équation est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0 \,;\, 1\}$.

En réduisant au même dénominateur : $\quad \dfrac{(x-1)+x}{x(x-1)} = -2$

$$\frac{2x-1}{x(x-1)} = -2$$

En multipliant par $x(x - 1) \neq 0$: $\quad 2x - 1 = -2x(x - 1)$

Regroupons et réduisons : $\quad 2x^2 - 1 = 0$

En procédant comme en 2), on obtient : $\quad S = \{-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \,;\, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\}$

Exemple 2 : *méthodes pour résoudre des inéquations du second degré.*

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $-3\,x^2 + 7x - 2 \leqslant 0$

2) $x^2 + x + 1 \geqslant 0$

SOLUTIONS :

1) Calculons le discriminant du trinôme $-3\,x^2 + 7x - 2$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4 \times (-3) \times (-2) = 49 - 24 = 25$$

Le discriminant Δ est strictement positif. Donc le trinôme admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7+5}{-6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7-5}{-6} = 2$$

Au moins trois méthodes s'offrent maintenant à nous pour résoudre l'inéquation :

Méthode 1 : on factorise l'inéquation, puis on dresse un tableau de signes :

$$-3(x - \frac{1}{3})(x - 2) \leqslant 0$$

$$(-3x + 1)(x - 2) \leqslant 0$$

x	$-\infty$		$1/3$		2		$+\infty$	Calculs et justification des signes
signe de $-3x + 1$		$+$	0	$-$		$-$		$-3x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow -3x \geqslant -1 \Leftrightarrow 3x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant 1/3$
signe de $x - 2$		$-$		$-$	0	$+$		$x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2$
signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$		

Méthode 2 : on cite la règle "un trinôme est du signe de *a* sauf entre ses éventuelles racines"

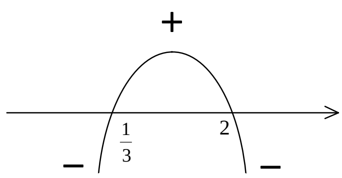
Dans notre cas, $a = -3$. Le trinôme est donc négatif sauf entre ses racines $\frac{1}{3}$ et 2.

(On retrouve alors directement la dernière ligne du tableau ci-dessus)

Méthode 3 : on détermine le signe du trinôme à l'aide d'une esquisse de la parabole :

Dans notre cas, la parabole est tournée vers le bas, car $a < 0$.

Là encore, on retrouve la dernière ligne du tableau.



Les 3 méthodes nous permettent de conclure :

$$S =]-\infty\,;\,\frac{1}{3}] \cup [2\,;\,+\infty[$$

2) Calculons le discriminant du trinôme $x^2 + x + 1$: $\Delta = ... = -3$. Le trinôme n'a pas de racines. (Et n'est donc pas factorisable...). Impossible d'appliquer la méthode 1 ci-dessus. D'après le règle "**un trinôme est du signe de *a* sauf entre ses éventuelles racines"**, notre trinôme est strictement positif, pour tout réel x. (Car a est positif). L'ensemble S des solutions de l'inéquation $x^2 + x + 1 \geqslant 0$ est donc : $S = \mathbb{R}$.

Exercices proposés :

1) Résoudre les inéquations : $-x^2 + 2x - 5 \leqslant 0$ et $-x^2 + 2x - 5 \geqslant 0$

2) Résoudre l'inéquation : $\dfrac{x^2 + 10x + 25}{-2x^2 - 7x - 3} \geqslant 0$

3) Soit f la fonction définie, sur $]2\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x - 2) - \ln(x + 1) + x$

Calculer sa dérivée $f\,'$. Démontrer que f est strictement croissante sur $]2\,;\,+\infty[$.

Réponses des exercices proposés :

1) $S = \mathbb{R}\,;\,S = \varnothing$ 2) $\{-5\} \cup]-3\,;\,-\frac{1}{2}[$ 3) $f\,'(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{(x-2)(x+1)} > 0$ pour tout $x \in]2\,;\,+\infty[$.