Recueil d'annales en Mathématiques

Terminale S – Enseignement obligatoire

Probabilités (discrètes et continues)

Frédéric Demoulin[1]

Dernière révision : 24 avril 2011

1. frederic.demoulin (chez) voila.fr

Tableau récapitulatif des exercices

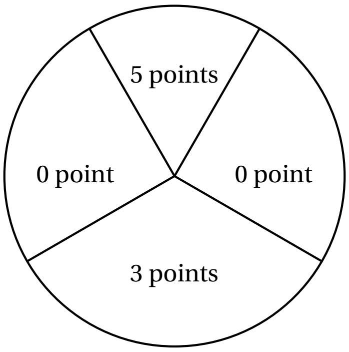
⋆ indique que cette notion a été abordée dans l'exercice

N°	Lieu	Date	R.O.C.	Q.C.M. V./F.	$p_B(A)$ Indép.	Variables aléatoires	Loi binomiale	Loi uniforme	Loi exponentielle	Géométrie	Suites
Session 2011											
1	Inde	avril 2011				⋆	⋆				
Session 2010											
2	Nouvelle-Calédonie	mars 2011			⋆		⋆				
3	Amérique du Sud	nov 2010			⋆						
4	Nouvelle-Calédonie	nov 2010			⋆	⋆					
5	Antilles-Guyane	sept 2010			⋆	⋆	⋆				
6	La Réunion	sept 2010		⋆							
7	Polynésie	sept 2010			⋆	⋆	⋆				
8	Amérique du Nord	juin 2010			⋆		⋆				
9	France	juin 2010		⋆	⋆		⋆		⋆		
10	Liban	juin 2010		⋆			⋆		⋆		
11	Inde	avril 2010				⋆	⋆		⋆		
Session 2009											
12	Asie	juin 2009			⋆		⋆				
13	Centres étrangers	juin 2009	⋆		⋆		⋆				
14	France	juin 2009	⋆		⋆	⋆					
15	La Réunion	juin 2009			⋆		⋆				
16	Liban	juin 2009		⋆	⋆				⋆		
17	Polynésie	juin 2009			⋆	⋆	⋆				
Session 2008											
18	Antilles-Guyane	juin 2008			⋆	⋆	⋆				
19	Asie	juin 2008			⋆						⋆
20	Centres étrangers	juin 2008			⋆						
21	France	juin 2008	⋆		⋆				⋆		
22	La Réunion	juin 2008			⋆		⋆				
23	Liban	juin 2008			⋆	⋆					
Session 2007											
24	Nouvelle-Calédonie	mars 2008			⋆	⋆	⋆				
25	Nouvelle-Calédonie	déc 2007			⋆	⋆			⋆		
26	Antilles-Guyane	sept 2007				⋆				⋆	
27	Polynésie	sept 2007			⋆						⋆
28	Amérique du Nord	juin 2007			⋆	⋆					⋆
29	Asie	juin 2007			⋆	⋆	⋆				
30	Liban	juin 2007			⋆						⋆
31	Polynésie	juin 2007			⋆	⋆	⋆				⋆
32	Inde	avril 2007				⋆	⋆				

N°	Lieu	Date	R.O.C.	Q.C.M. V./F.	$p_B(A)$ Indép.	Variables aléatoires	Loi binomiale	Loi uniforme	Loi exponentielle	Géométrie	Suites
Session 2006											
33	Nouvelle-Calédonie	mars 2007		$\star$	$\star$				$\star$		
34	Amérique du Sud	nov 2006			$\star$	$\star$	$\star$				
35	Nouvelle-Calédonie	nov 2006					$\star$				
36	France	sept 2006			$\star$		$\star$				
37	Polynésie	sept 2006			$\star$	$\star$					
38	Antilles-Guyane	juin 2006			$\star$		$\star$		$\star$		
39	Asie	juin 2006			$\star$						$\star$
40	Centres étrangers	juin 2006			$\star$		$\star$				$\star$
41	France	juin 2006			$\star$						
42	La Réunion	juin 2006			$\star$		$\star$				
43	Liban	juin 2006			$\star$	$\star$	$\star$		$\star$		
44	Polynésie	juin 2006			$\star$						$\star$
45	Amérique du Nord	mai 2006		$\star$		$\star$					
Session 2005											
46	Amérique du Nord	juin 2005			$\star$		$\star$				
47	Antilles-Guyane	juin 2005		$\star$	$\star$						
48	Asie	juin 2005			$\star$	$\star$	$\star$				
49	France	juin 2005			$\star$	$\star$					
50	La Réunion	juin 2005			$\star$						
51	Liban	juin 2005			$\star$	$\star$					
52	Polynésie	juin 2005			$\star$		$\star$				
Session 2004											
53	Nouvelle-Calédonie	mars 2005				$\star$	$\star$				
54	Amérique du Sud	nov 2004			$\star$						
55	France	sept 2004							$\star$		
56	Polynésie	sept 2004				$\star$	$\star$			$\star$	
57	Amérique du Nord	juin 2004				$\star$	$\star$				
58	Centres étrangers	juin 2004			$\star$						$\star$
59	France	juin 2004							$\star$		
60	La Réunion	juin 2004		$\star$	$\star$				$\star$		
61	Liban	juin 2004			$\star$		$\star$	$\star$			
62	Polynésie	juin 2004				$\star$	$\star$		$\star$		
63	Inde	avril 2004			$\star$	$\star$	$\star$				
Session 2003											
64	Amérique du Sud	nov 2003								$\star$	
65	Nouvelle-Calédonie	nov 2003				$\star$	$\star$				$\star$
66	Antilles-Guyane	sept 2003				$\star$	$\star$				
67	France	sept 2003			$\star$	$\star$	$\star$				
68	Amérique du Nord	juin 2003		$\star$			$\star$		$\star$		
69	Antilles-Guyane	juin 2003				$\star$	$\star$		$\star$		
70	Centres étrangers	juin 2003				$\star$	$\star$		$\star$		
71	La Réunion	juin 2003		$\star$	$\star$	$\star$	$\star$		$\star$		
72	Liban	juin 2003									$\star$
73	Polynésie	juin 2003					$\star$			$\star$	
Session 2002											
74	Nouvelle-Calédonie	mars 2003			$\star$		$\star$				$\star$
75	Amérique du Sud	nov 2002			$\star$						
76	Antilles-Guyane	sept 2002			$\star$						$\star$
77	France	sept 2002				$\star$					
78	Inde	avril 2002									
79	Amérique du Nord	juin 2002									
80	Asie	juin 2002									
81	Antilles-Guyane	juin 2002									
82	France	juin 2002								$\star$	$\star$
83	La Réunion	juin 2002									
84	Polynésie	juin 2002									

Inde, avril 2011 (5 points)

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

1. Le joueur lance une fléchette.
   On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.
   On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.
   On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.
   On a donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1$. Sachant que $p_5 = \frac{1}{2}p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3}p_0$, déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.
2. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.
   On note G_2 l'événement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».
   On note G_3 l'événement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».
   On note P l'événement : « le joueur perd la partie ».
   On note $p(A)$ la probabilité d'un événement A.
   a. Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p(G_2) = \frac{5}{36}$.
      On admettra dans la suite que $p(G_3) = \frac{7}{36}$.
   b. En déduire $p(P)$.
3. Un joueur joue six parties avec les règles données à la question 2.
   Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?
4. Pour une partie, la mise est fixée à 2 €.
   Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5 €. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 3 €. S'il perd, il ne reçoit rien.
   On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie. Les valeurs possibles pour X sont donc : -2, 1 et 3.
   a. Donner la loi de probabilité de X.
   b. Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Nouvelle – Calédonie, mars 2011 (4 points)

Chaque année, deux villages A et B organisent un concours sportif. Les concurrents tirent au sort un moyen de transport puis doivent relier le village A au village B le plus rapidement possible en utilisant ce moyen de transport et un parcours adapté. Pour le tirage, on utilise une urne contenant 4 jetons indiscernables au toucher. Sur un premier jeton figure la lettre V , sur le second la lettre R, sur le troisième la lettre P et sur le dernier la lettre L.

Un concurrent tire au hasard un jeton :

- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre V, il effectuera le trajet à vélo ;
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre R, Il effectuera le trajet en roller ;
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre P, il effectuera le trajet à pied ;
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisira librement son mode de transport parmi les trois précédents.

On observe que lorsqu'un concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisit le vélo dans 70 % des cas, il choisit le roller dans 20 % des cas et il décide de faire le parcours à pied dans 10 % des cas.

1. Construire un arbre pondéré correspondant à la situation.

   Pour les questions suivantes, on donnera les résultats arrondis au millième.
2. Calculer la probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à vélo.
3. Sachant qu'un concurrent a effectué le trajet à vélo, quelle est la probabilité qu'il ait tiré le jeton sur lequel figure la lettre L ?
4. On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres.

   L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\dfrac{2}{3}$.

   Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste ».

Amérique du Sud, novembre 2010 (5 points)

Un internaute souhaite faire un achat par l'intermédiaire d'internet. Quatre sites de vente, un français, un allemand, un canadien et un indien présentent le matériel qu'il souhaite acquérir. L'expérience a montré que la probabilité qu'il utilise chacun de ces sites vérifie les conditions suivantes (les initiales des pays désignent les événements « l'achat s'effectue dans le pays ») :

$$p(F) = p(A), \quad p(F) = \frac{1}{2}p(C) \quad \text{et} \quad p(C) = p(I)$$

1. Calculer les quatre probabilités $p(F)$, $p(A)$, $p(C)$ et $p(I)$.
2. Sur chacun des quatre sites, l'internaute peut acheter un supplément pour son matériel. Ses expériences précédentes conduisent à formuler ainsi les probabilités conditionnelles de cet événement, noté S :

$$p_F(S) = 0,2 \quad ; \quad p_A(S) = 0,5 \quad ; \quad p_C(S) = 0,1 \quad ; \quad p_I(S) = 0,4$$

   a. Déterminer $p(S \cap A)$.
   b. Montrer que $p(S) = \dfrac{17}{60}$.
   c. L'internaute a finalement acheté un supplément. Déterminer la probabilité qu'il l'ait acheté sur le site canadien.

3. Sur 1 000 internautes ayant acheté ce matériel, on a établi la statistique suivante :

	Sites européens	Site canadien	Site indien
Effectif d'acheteurs	335	310	355

   a. On note respectivement f_1, f_2 et f_3 les fréquences associées aux effectifs précédents. On pose : $d^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=3}\left(f_k - \frac{1}{3}\right)^2$. Calculer d^2 puis $1\,000d^2$.
   b. On simule 3 000 fois l'expérience consistant à tirer un nombre au hasard parmi {1 ; 2 ; 3} avec équiprobabilité. Pour chacune de ces simulations, on obtient une valeur de $1\,000d^2$. Voici les résultats :

Minimum	Premier décile	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Neuvième décile	Maximum
0,000 5	0,076 3	0,211 1	0,488 45	0,940 1	1,510 4	5,925 6

   Au risque 10 %, peut-on considérer que le choix d'un site européen, nord-américain ou asiatique se fait de manière équiprobable ?

Nouvelle – Calédonie, novembre 2010 (4 points)

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
   a. Vérifier que $p(X = 0) = \dfrac{3}{10}$, puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
   c. Calculer la probabilité de l'événement suivant :
      A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».
2. On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante :
   si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte, on ne la remet pas.
   a. En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité des événements suivants :
      - B : « seule la première boule tirée est verte » ;
      - C : « une seule des deux boules tirées est verte ».
   b. Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?

Antilles – Guyane, septembre 2010 (4 points)

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à $0{,}000\,1$ *près.*

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.
On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note :

- M l'événement : « l'animal est porteur de la maladie » ;
- T l'événement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
   a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
   b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est $0,058$.
3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?
4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?
5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.
   D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

   a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
   b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

La Réunion, septembre 2010 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question et la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

Dans une fête foraine, Luc décide de participer à un jeu qui se déroule de la manière suivante :
Luc tire au hasard un jeton dans une urne contenant quatre jetons rouges et deux jetons bleus.

- si le jeton tiré est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, sans remettre dans l'urne le premier jeton tiré, il tire au hasard un deuxième jeton dans l'urne ;
- si le deuxième jeton tiré est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, sans remettre dans l'urne les deux jetons précédents, il tire au hasard un troisième jeton dans l'urne ;
- si le troisième jeton est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, le jeu s'arrête et Luc a perdu.

1. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du deuxième tirage est :
   - $\frac{19}{15}$
   - $\frac{2}{5}$
   - $\frac{11}{15}$
   - $\frac{4}{15}$
2. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du troisième tirage est :
   - $\frac{1}{5}$
   - $\frac{1}{2}$
   - $\frac{2}{15}$
   - $\frac{1}{9}$
3. La probabilité que Luc gagne à ce jeu après avoir effectué au moins deux tirages est :
   - $\frac{3}{5}$
   - $\frac{4}{15}$
   - $\frac{7}{15}$
   - $\frac{1}{3}$
4. La probabilité que Luc gagne à ce jeu, sachant qu'il a obtenu un jeton rouge au premier tirage est :
   - $\frac{7}{10}$
   - $\frac{7}{15}$
   - $\frac{11}{15}$
   - $\frac{5}{9}$

Polynésie, septembre 2010 (5 points)

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner. Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.
On appelle N l'événement « la boule noire figure parmi les boules tirées » et G l'événement « le joueur gagne ».

1. a. Déterminer la probabilité de l'événement N.

   b. Démontrer que la probabilité de l'événement G est égale à $\dfrac{3}{10}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

   c. Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?

2. Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de m euros est demandée, où m est un réel strictement positif.

   Si le joueur gagne, il reçoit 4 euros.

   S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.

   S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.

   On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de m.

   c. On dit que le jeu est équitable si l'espérance mathématique de X est nulle.
   Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

3. Soit n un entier naturel non nul.
   On joue n fois à ce jeu sachant qu'après chaque partie les boules sont remises dans le sac.
   Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une fois est supérieure à $0,999$.

Amérique du Nord, juin 2010 (3 points)

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.
20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges.
Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?
2. On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge.

   Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\frac{2}{7}$.
3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).

   a. Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.

   b. Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à $0,99$.

France, juin 2010 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

1. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 sont blanches et 3 sont noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire est égale à :

   - $\dfrac{21}{40}$
   - $\dfrac{7}{10} \times \dfrac{6}{9} \times \dfrac{1}{3}$
   - $\dfrac{7}{10} \times \dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{3}$

2. De la même urne, on tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs avec remise. La probabilité d'avoir obtenu 3 boules noires et 2 boules blanches est égale à :

   - $\dfrac{3^3 \times 7^2}{10^5}$
   - $\dbinom{5}{2} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^2 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^3$
   - $\dbinom{5}{2} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^3 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^2$

3. De la même urne, on tire une seule boule. Si elle est blanche, on lance un dé cubique (dont les faces sont numérotées de 1 à 6). Si la boule est noire, on lance un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). On suppose les dés bien équilibrés. Le joueur gagne s'il obtient le numéro 1.

   Sachant que le joueur a gagné, la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche est égale à :

   - $\dfrac{7}{60}$
   - $\dfrac{14}{23}$
   - $\dfrac{\dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{6}}{\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4}}$

4. On note X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un nombre réel strictement positif). La probabilité de l'événement $1 \leqslant X \leqslant 3$ est égale à :

   - $\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-3\lambda}$
   - $\mathrm{e}^{-3\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}$
   - $\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\mathrm{e}^{-3\lambda}}$

Liban, juin 2010 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise (on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence).

   Proposition 1 : « la probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7$ ».
2. Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda (\lambda > 0)$.
   On rappelle que pour tout réel $a > 0$: $p(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\, dt$.

   Proposition 2 : « le réel a tel que $p(X > a) = p(X \leqslant a)$ est égal à $\frac{\ln 2}{\lambda}$ ».
3. Soit le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$.
   Proposition 3 : « si l'entier naturel n est un multiple de 3, alors z^n est un réel ».
4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\ \vec{u}\,;\ \vec{v}\right)$, le point A d'affixe $a = 2 - i$ et le point B d'affixe $b = \frac{1+i}{2}a$.
   Proposition 4 : « le triangle OAB est rectangle isocèle ».
5. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\ \vec{u}\,;\ \vec{v}\right)$, à tout point M du plan d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{-10}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de z.
   Proposition 5 : « il existe un point M tel que O, M et M' ne sont pas alignés ».

Inde, avril 2010 (5 points)

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.
On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.
   a. Démontrer que $p(X=-1) = \dfrac{20n}{(n+10)(n+9)}$.
   b. Calculer, en fonction de n, la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X.
   c. Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut :
   $$E(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}$$
   d. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.
2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à $0,999$.
3. On suppose que $n = 1\,000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1 000 boules rouges.
   Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complètement défavorable et décide d' effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.
   Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi :
   $$\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ p(Z \leqslant k) = \int_0^k 0,01\mathrm{e}^{-0,01x}\,\mathrm{d}x$$
   On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.
   a. Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(Z \leqslant 50)$.
   b. Calculer la probabilité conditionnelle de l'événement : « le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche » sachant l'événement « le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche ».

Asie, juin 2009 (5 points)

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussettes auprès de trois fournisseurs $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ et $\mathscr{F}_3$.
Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.
La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$, le tiers par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ et le reste par le fournisseur $\mathscr{F}_3$.

Une étude statistique a montré que :

- 5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ ont un défaut ;
- 1,5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussettes ont un défaut.

1. On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.

   On considère les événements F_1, F_2, F_3 et D suivants :
   - F_1 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ » ;
   - F_2 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ » ;
   - F_3 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_3$ » ;
   - D : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».

   a. Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les événements précédents.
   Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cet expérience.

   b. Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ et présente un défaut.

   c. Calculer la probabilité de l'événement $F_2 \cap D$.

   d. En déduire la probabilité de l'événement $F_3 \cap D$.

   e. Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_3$, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?

2. L'entreprise conditionne les paires de chaussettes par lots de six paires.
   On considère que le stock est suffisamment grand pour assimiler le choix des six paires de chaussettes à des tirages indépendants, successifs avec remise.

   a. Calculer la probabilité que deux paires de chaussettes exactement d'un lot présentent un défaut ; on donnera un résultat arrondi au millième.

   b. Démontrer que la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus une paire de chaussettes d'un lot présente un défaut est égale à $0,983$.

Centres étrangers, juin 2009 (5 points)

1. **Restitution organisée de connaissances :**

   Prérequis : On rappelle que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

   Soient A et B deux événements associés à une expérience aléatoire

   a. Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$.

   b. Démontrer que, si les événements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les événements $\overline{A}$ et B le sont également.

2. **Application :** chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux événements indépendants :
   - R : « il n'entend pas son réveil sonner » ;
   - S : « son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».

   Il a observé que chaque jour de classe, la probabilité de R est égale $0,1$ et que celle de S est égale à $0,05$. Lorsque qu'au moins l'un des deux événements se produit, Stéphane est en retard au lycée sinon il est à l'heure.

   a. Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.

   b. Calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.

   c. Au cours d'une semaine, Stéphane se rend cinq fois au lycée. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants.

   Quelle est la probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine ? Arrondir le résultat à la quatrième décimale.

France, juin 2009 (5 points)

I. *Cette question est une restitution organisée de connaissances.*

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leqslant n$, alors $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leqslant p \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

II. Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.
On tire simultanément deux jetons de ce sac.

1. a. On note A l'événement « obtenir deux jetons blancs ».
   Démontrer que la probabilité de l'événement A est égale à $\dfrac{7}{15}$.

   b. On note B l'événement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs ».
   Calculer la probabilité de B.

   c. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X.

La Réunion, juin 2009 (5 points)

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Dans cette question, les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.

   On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée.

   On note A l'événement « le sac présente le défaut a » et B l'événement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des événements A et B sont respectivement $p(A) = 0,02$ et $p(B) = 0,01$; on suppose que ces deux événements sont indépendants.

   a. Calculer la probabilité de l'événement C « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b ».

   b. Calculer la probabilité de l'événement D « le sac est défectueux ».

   c. Calculer la probabilité de l'événement E « le sac ne présente aucun défaut ».

   d. Sachant que le sac présente le défaut a, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b ?

2. On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est égale à $0,03$.

   On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

   a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b. Quelle est la probabilité de l'événement « au moins un sac est défectueux » ? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.

   c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

   Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

Liban, juin 2009 (3 points)

Pour chacune des trois questions, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie, sans justification.
Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On désigne par A et B deux événements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité p.
   On sait que $p(A \cup B) = \frac{4}{5}$ et $p\left(\overline{A}\right) = \frac{3}{5}$.
   La probabilité de l'événement B est égale à :

   a. $\frac{2}{5}$ b. $\frac{2}{3}$ c. $\frac{3}{5}$ d. $\frac{1}{2}$

2. On note X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,04$.
   On rappelle que, pour tout réel t positif, la probabilité de l'événement $(X \leqslant t)$, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par $p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
   La valeur approchée de $p(X > 5)$ à 10^{-2} près par excès est égale à :

   a. $0,91$ b. $0,18$ c. $0,19$ d. $0,82$

3. Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.
   S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$; s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{9}{10}$.
   Je sors mon chien ; la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à :

   a. $\frac{9}{10}$ b. $\frac{27}{40}$ c. $\frac{3}{4}$ d. $\frac{27}{28}$

Polynésie, juin 2009 (4 points)

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6 % sont défectueux.
Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite.
Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.
On note :

- D l'événement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;
- R l'événement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

1. Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. a. Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.

   b. On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.

   Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.
3. Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,894 2.
4. Quatre contrôles successifs indépendants sont maintenant réalisés pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé.

   Un lecteur MP3 est :

   - commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs ;
   - détruit s'il est rejeté au moins deux fois ;
   - commercialisé sans le logo sinon.

   Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 s'élève à 50 €.

   Son prix de vente est de 120 € pour un lecteur avec logo et 60 € pour un lecteur sans logo.

   On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque lecteur MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

   b. Calculer à 10^{-2} près l'espérance mathématique de G. Donner une interprétation de ce résultat.

Antilles – Guyane, juin 2008 (5 points)

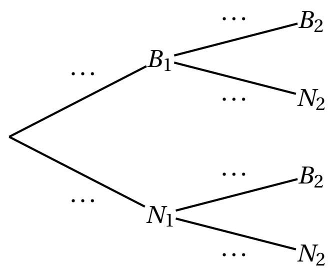
On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient k boules blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.
U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2. On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

On note B_1 (respectivement N_1) l'événement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_1 ».
On note B_2 (respectivement N_2) l'événement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_2 ».

1. a. Recopier et compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-dessous :



   Montrer que la probabilité de l'événement B_2 est égale à $\dfrac{3k+6}{4k+12}$.

   Dans la suite on considère que $k = 12$.
   Les questions 2 et 3 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

2. Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve.
   Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros.
   Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.
   a. Montrer que les valeurs possibles de X sont 4 et -8.
   b. Déterminer la loi de probabilité de la variable X.
   c. Calculer l'espérance mathématique de X.
   d. Le jeu est-il favorable au joueur ?

3. Un joueur participe n fois de suite à ce jeu.
   Au début de chaque épreuve, l'urne U_1 contient 12 boules blanches et 3 noires, et l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 noire.
   Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.
   Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'événement B_2 soit supérieure ou égale à $0,99$.

Asie, juin 2008 (5 points)

On considère plusieurs sacs de billes $S_1, S_2, \ldots, S_n$ tels que :
- le premier, S_1, contient 3 billes jaunes et 2 vertes ;
- chacun des suivants, S_2, $S_3, \ldots, S_n$ contient 2 billes jaunes et 2 vertes.

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivante :
- on tire au hasard une bille dans S_1 ;
- on place la bille tirée de S_1 dans S_2, puis on tire au hasard une bille dans S_2 ;
- on place la bille tirée de S_2 dans S_3, puis on tire au hasard une bille dans S_3 ;
- etc.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note E_n l'événement : « la bille tirée dans S_n est verte » et on note $p(E_n)$ sa probabilité.

1. Mise en évidence d'une relation de récurrence
   a. D'après l'énoncé, donner les valeurs de $p(E_1)$, $p_{E_1}(E_2)$ et $p_{\overline{E_1}}(E_2)$.
   En déduire la valeur de $p(E_2)$.
   b. À l'aide d'un arbre pondéré, exprimer $p(E_{n+1})$ en fonction de $p(E_n)$.
2. Étude d'une suite
   On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{5} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{2}{5} \quad \text{pour tout } n \geqslant 1. \end{cases}$
   a. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 1.
   b. Démontrer que (u_n) est croissante.
   c. Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
3. Évolution des probabilités $p(E_n)$
   a. À l'aide des résultats précédents, déterminer l'évolution des probabilités $p(E_n)$.
   b. Pour quelles valeurs de l'entier n a-t-on : $0,49999 \leqslant p(E_n) \leqslant 0,5$?

Centres étrangers, juin 2008 (4 points)

Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :

- les ingénieurs ;
- les opérateurs de production ;
- les agents de maintenance.

Il y a 8 % d'ingénieurs et 82 % d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production.

Partie A

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel dc cette entreprise.
On note :

- M l'événement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance » ;
- O l'événement : « le personnel interrogé est un opérateur de production » ;
- I l'événement : « le personnel interrogé est un ingénieur » ;
- F l'événement : « le personnel interrogé est une femme ».

1. Construire un arbre pondéré correspondant aux données.
2. Calculer la probabilité d'interroger :
   a. un agent de maintenance ;
   b. une femme agent de maintenance ;
   c. une femme.

Partie B

Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne.
Pour cela une alarme est prévue ; des études ont montré que sur une journée :

- la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à $0,002$;
- la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à $0,003$;
- la probabilité qu'une panne se produise est égale à $0,04$.

On note :

- A l'événement : « l'alarme se déclenche » ;
- B l'événement : « une panne se produit ».

1. Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à $0,037$.
2. Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

France, juin 2008 (5 points)

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où X est un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout $t \geqslant 0$, $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
La fonction R définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $R(t) = p(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Restitution organisée de connaissances
   a. Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
   b. Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que, pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $p_{X>t}(X > t+s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.
2. Dans cette question, on prend $\lambda = 0{,}000\,26$.
   a. Calculer $p(X \leqslant 1\,000)$ et $p(X > 1\,000)$.
   b. Sachant que l'événement $(X > 1\,000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'événement $(X > 2\,000)$.
   c. Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

La Réunion, juin 2008 (5 points)

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} *près.*

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à $0,1$.

1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.
   a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
   b. Calculer la probabilité des événements suivants :
      A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;
      B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;
      C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».
2. En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut.
   On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'événement « le stylo présente un défaut » et E l'événement « le stylo est accepté ».
   a. Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.
   b. Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.
   c. Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à $0,022$ à 10^{-3} près.
3. Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés.

   Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos.
   Comparer ce résultat avec la probabilité de l'événement A calculée à la question 1.b. Quel commentaire peut-on faire ?

Liban, juin 2008 (4 points)

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires.
Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires.
Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois :
- s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A ;
- sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'événement « le joueur obtient une boule rouge ». Montrer que $p(R) = 0,15$.
2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).
Soit x un entier naturel non nul.
Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.
On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs $2x$, $x-2$ et -4.

1. Déterminer la loi de probabilité de G.
2. Exprimer l'espérance $E(G)$ de la variable aléatoire G en fonction de x.
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $E(G) \geqslant 0$?

Nouvelle – Calédonie, mars 2008 (5 points)

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris ;
- pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.

1. Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.
   a. Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de $0,92$.
   b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.
   c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?
2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie ? On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, $0,25$ euro s'il est gris et perd $0,10$ euro s'il ne survit pas.
   Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.

Nouvelle – Calédonie, décembre 2007 (5 points)

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.
La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.
On note :

- D l'événement « le composant est défectueux » ;
- F_1 l'événement « le composant provient du premier fournisseur » ;
- F_2 l'événement « le composant provient du second fournisseur ».

1. a. Dessiner un arbre pondéré.

   b. Calculer $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que $p(D) = 0{,}0225$.

   c. Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

   Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} *près.*

2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?

3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.

   a. Sachant que $p(X > 5) = 0,325$, déterminer λ.
   Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0,225$.

   b. Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?

   c. Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

Antilles – Guyane, septembre 2007 (6 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une urne contient 15 boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche ou rouge.
On sait de plus qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne.
On tire au hasard simultanément deux boules dans l'urne et on note leur couleur.
Soit l'événement G : « obtenir deux boules de même couleur ».

Partie A

On suppose que l'urne contient 3 boules noires et 7 boules blanches.
Calculer la probabilité de l'événement G.

Partie B

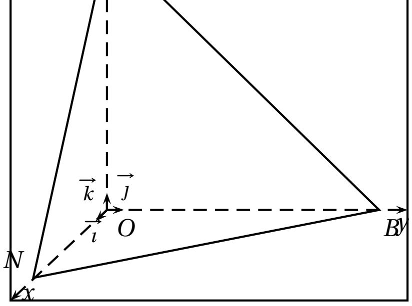
On note n, b et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.

1. On note $g(n\,;\,b\,;\,r)$ la probabilité en fonction de n, b et r de l'événement G.
   Démontrer que $g(n\,;\,b\,;\,r) = \dfrac{1}{210}[n(n-1)+b(b-1)+r(r-1)]$.
2. Le but de cette question est de déterminer n, b et r afin que la probabilité $g(n\,;\,b\,;\,r)$ soit minimale.
   L'espace est muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ orthonormal.
   Soient les points N, B et R de coordonnées respectives $(15\,;\,0\,;\,0)$, $(0\,;\,15\,;\,0)$ et $(0\,;\,0\,;\,15)$ et soit M le point de coordonnées $(n\,;\,b\,;\,r)$. On pourra se rapporter à la figure ci-dessous.
   a. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (NBR) est $x+y+z-15=0$.
   b. En déduire que le point M est un point du plan (NBR).
   c. Démontrer que $g(n\,;\,b\,;\,r) = \dfrac{1}{210}\left(OM^2-15\right)$.
   d. Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR). Déterminer les coordonnées du point H.
   e. En déduire tes valeurs de n, b et r afin que la probabilité $g(n\,;\,b\,;\,r)$ soit minimale. Justifier que cette probabilité minimale est égale à $\dfrac{2}{7}$.

Partie C

On suppose que les nombres de boules de chaque couleur ont été choisis par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'événement G soit $\dfrac{2}{7}$.
Un joueur mise x euros, avec x entier naturel non nul, puis tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. Dans tous les cas, il perd sa mise de départ.
S'il obtient deux boules de la même couleur, il reçoit k fois le montant de sa mise, avec k nombre décimal strictement supérieur à 1. Sinon, il ne reçoit rien.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable X en fonction de x et de k.
2. Déterminer la valeur de k pour laquelle le jeu est équitable.



Polynésie, septembre 2007 (4 points)

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes :
40 % sont de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.

On admet qu'au début de chaque année :

- chaque plante de type A disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C ;
- chaque plante de type B disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C ;
- chaque plante de type C disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

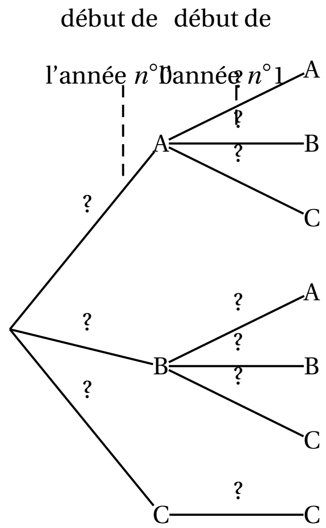
La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est $0,6$ et celle qu'elle le soit par une plante de type B est $0,3$.
La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est $0,6$ et celle qu'elle le soit par une plante de type A est $0,3$.

Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- A_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type A » ;
- B_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type B » ;
- C_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type C ».

On désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des événements A_n, B_n et C_n.
Compte tenu de la composition initiale de la végétation (début de l'année $n^\circ 0$), on pose : $p_0 = 0,40$, $q_0 = 0,41$ et $r_0 = 0,19$.

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



2. a. Montrer que $p_1 = 0,363$ puis calculer q_1 et r_1.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{cases} p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} = 0,3p_n + 0,6q_n \end{cases}$$

3. On définit les suites (S_n) et (D_n) sur $\mathbb{N}$ par $S_n = q_n + p_n$ et $D_n = q_n - p_n$.
   a. Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. On admet que (D_n) est une suite géométrique de raison $0,3$.
   b. Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n).
   c. En déduire les limites des suites $\left(p_n\right)$, $\left(q_n\right)$ et (r_n). Interpréter le résultat.

Amérique du Nord, juin 2007 (5 points)

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties.
La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2.

Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :
- s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

1. On appelle :
   - E_1 l'événement « le joueur perd la première partie » ;
   - E_2 l'événement « le joueur perd la deuxième partie » ;
   - E_3 l'événement « le joueur perd la troisième partie ».

   On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.
   On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

   b. Montrer que la probabilité de l'événement $(X = 2)$ est égale à 0,031 et que celle de l'événement $(X = 3)$ est égale à 0,002.

   c. Déterminer la loi de probabilité de X.

   d. Calculer l'espérance de X.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement : « le joueur perd la n-ième partie », $\overline{E_n}$ l'événement contraire et on note p_n la probabilité de l'événement E_n.

   a. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités des événements $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n .

   b. En déduire que $p_{n+1} = 0,05p_n + 0,05$ pour tout entier naturel n non nul.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \dfrac{1}{19}$.

   a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, u_n puis p_n en fonction de n.

   c. Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Asie, juin 2007 (4 points)

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.
Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92 % des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'événement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
- S l'événement : « le jouet réussit le test de solidité ».

1. Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.
   a. Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.
   b. Démontrer que $p_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right) = \dfrac{1}{4}$.
   c. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.
2. Calcul de probabilités.
   a. Démontrer que $p(S) = 0,934$.
   b. Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition (on donnera le résultat arrondi au millième).
3. Étude d'une variable aléatoire B.
   Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 €, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 €.
   On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.
   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.
   b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.
4. Étude d'une nouvelle variable aléatoire.
   On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets.
   On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.
   Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.

Liban, juin 2007 (4 points)

On considère deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.
L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.
On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

Étape 1 : on tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.

Étape n $(n \geqslant 2)$:
- si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1 ;
- si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2, on note sa couleur et on la remet dans U_2.

On note A_n l'événement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité. On a donc $p_1 = 1$.

1. Calculer p_2.
2. Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$.
   On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
3. Calculer p_3.
4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier n entier naturel non nul, $p_n > 0,25$.
   b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
   c. En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté ℓ.
   d. Justifier que ℓ vérifie l'équation : $\ell = 0,8\ell + 0,05$. En déduire la valeur de ℓ.

Polynésie, juin 2007 (5 points)

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :
- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.
  À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'événement « le jeton tiré est blanc » et G l'événement « le joueur gagne le jeu ». L'événement contraire d'un événement E sera noté $\overline{E}$. La probabilité d'un événement E sera notée $p(E)$.

Partie A

1. Montrer que $p(G) = \dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?
3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante.
   Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à $0,99$?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :
- chaque joueur paie 1 € par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 € ;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.
   a. Donner la loi de probabilité de X et son espérance $E(X)$.
   b. On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $E(X) < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

Inde, avril 2007 (5 points)

Pour réaliser une enquête, un employé interroge des personnes prises au hasard dans une galerie commerçante. Il se demande si trois personnes au moins accepteront de répondre.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard accepte de répondre est 0,1. L'employé interroge 50 personnes de manière indépendante. On considère les événements :
   - A : « au moins une personne accepte de répondre » ;
   - B : « moins de trois personnes acceptent de répondre » ;
   - C : « trois personnes ou plus acceptent de répondre ».

   Calculer les probabilités des événements A, B et C. On arrondira au millième.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire X qui, à tout groupe de n personnes interrogées indépendamment, associe le nombre de personnes ayant accepté de répondre, suit la loi de probabilité définie par :

$$\begin{cases} \text{pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant n-1,\ p(X=k) = \dfrac{\mathrm{e}^{-a}a^k}{k!} \\ \text{et } p(X=n) = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\mathrm{e}^{-a}a^k}{k!}, \\ \text{formules dans lesquelles } a = \dfrac{n}{10} \end{cases}$$

   a. Montrer que la probabilité qu'au moins trois personnes répondent est donnée par :

$$f(a) = 1 - \mathrm{e}^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)$$

   b. Calculer $f(5)$. En donner l'arrondi au millième. Cette modélisation donne-t-elle un résultat voisin de celui obtenu à la question 1 ?

3. On conserve le modèle de la question 2. On souhaite déterminer le nombre minimum de personnes à interroger pour que la probabilité que trois d'entre elles au moins répondent soit supérieure ou égale à 0,95.

   a. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$$

   ainsi que sa limite en $+\infty$. Dresser son tableau de variations.

   b. Montrer que l'équation $f(x) = 0,95$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}_+$ et que cette solution est comprise entre $6,29$ et $6,3$.

   c. En déduire le nombre minimum de personnes à interroger.

Nouvelle – Calédonie, mars 2007 (4 points)

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte les points attribués à la question, une réponse inexacte enlève la moitié des points attribués à la question, l'absence de réponse est comptée 0 *point.*
Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

A. Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant.

Question 1 : la probabilité de tirer trois boules noires est :

a. $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$ b. $\dfrac{9}{8}$ c. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ d. $\dfrac{4\times3\times2}{8\times7\times6}$

Question 2 : sachant que Jean a tiré 3 boules de la même couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est :

a. 0 b. $\left(\dfrac{1}{8}\right)^3$ c. $\dfrac{23}{128}$ d. $\dfrac{1}{92}$

B. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x + m$ où m est une constante réelle.

Question 3 : f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ lorsque :

a. $m = -1$ b. $m = \dfrac{1}{2}$ c. $m = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ d. $m = \mathrm{e}^{-1}$

C. La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre $0{,}2$.

Question 4 : la probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est :

a. $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ b. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ c. $\dfrac{1}{5\mathrm{e}}$ d. $\dfrac{1}{0{,}2}(\mathrm{e}-1)$

Amérique du Sud, novembre 2006 (4 points)

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.
La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$.
La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.
Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.
Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leqslant n \leqslant 50$.
On définit les événements suivants :

- A : « le jardinier a choisi le lot 1 » ;
- B : « le jardinier a choisi le lot 2 » ;
- J_n : « le jardinier obtient n tulipes jaunes ».

1. Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.
   a. Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?
   b. Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?
   c. Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.
   d. Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.
2. Probabilités conditionnelles
   a. Montrer que $p_B(J_n) = \binom{50}{n} 2^{-50}$.
   b. En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.
   c. On note p_n la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que J_n est réalisé. Établir que :
   $$p_n = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}$$
   d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geqslant 0,9$?
   Comment peut-on interpréter ce résultat ?

Nouvelle – Calédonie, novembre 2006 (4 points)

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5 % de ce cheptel (ou 5 pour mille).

1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?
2. a. On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux.

   Montrer que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. Calculer son espérance mathématique.

   b. On désigne par A l'événement « aucun animal n'est malade parmi les 10 ».

   On désigne par B l'événement « au moins un animal est malade parmi les 10 ».

   Calculer les probabilités de A et de B.
3. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est $0,8$. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est $0,9$. On note T l'événement « avoir un test positif à cette maladie » et M l'événement « être atteint de cette maladie ».

   a. Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.

   b. Calculer la probabilité de l'événement T.

   c. Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

France, septembre 2006 (5 points)

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

Partie A

Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.
Pour $i = 1$ ou $i = 2$, on note E_i l'événement : « le touriste se dirige vers l'Est le i-ème jour » et O_i l'événement : « le touriste se dirige vers l'Ouest le i-ème jour ».

1. Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.
2. Déterminer les probabilités suivantes : $p(E_1)$, $p_{E_1}(O_2)$ et $p(E_1 \cap E_2)$.
3. Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage les deux jours consécutifs.

Partie B

On suppose maintenant que n touristes ($n \geqslant 3$) se retrouvent un jour en haut de la falaise. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'Est.

1. Déterminer la probabilité que k touristes ($0 \leqslant k \leqslant n$) partent en direction de l'Est.
2. On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est *heureux* s'il se retrouve seul sur une plage.
   a. Peut-il y avoir deux touristes heureux ?
   b. Démontrer que la probabilité (notée p) qu'il y ait un touriste *heureux* parmi ces n touristes vaut : $p = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.
   c. **Application numérique :**
   Lorsque le groupe comprend 10 personnes, exprimer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi les 10.

Polynésie, septembre 2006 (4 points)

Une urne contient 4 houles blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.

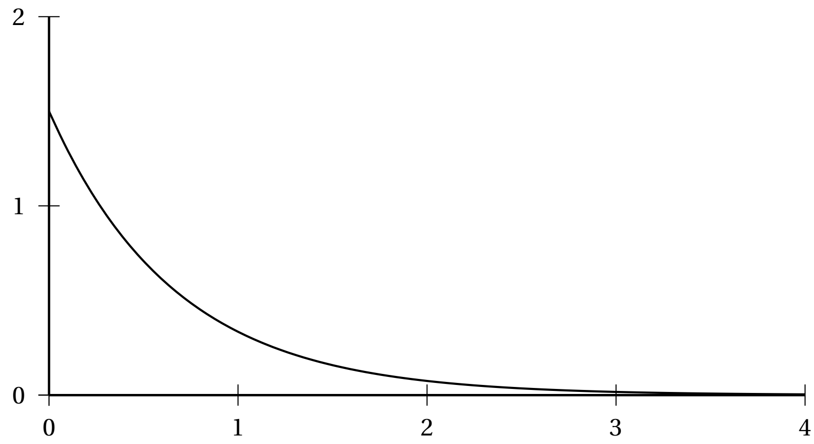
1. On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b. Calculer $p(X = 0)$.
   c. On se propose de déterminer maintenant $p(X = 1)$.
   Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\frac{8}{45}$.
   En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer $p(X = 1)$.
2. On reprend l'urne dans sa composition initiale : 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
   On effectue maintenant n tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.
   Soit k un entier compris entre 1 et n.
   Soit N l'événement : « la k-ième boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches ».
   Soit A l'événement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $k-1$ premiers tirages et une boule noire au k-ième ».
   Soit B l'événement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $(n-k)$ derniers tirages ».
   Calculer $p(A)$, $p_A(B)$ et $p(N)$.

Antilles – Guyane, juin 2006 (4 points)

Partie A

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
On rappelle que $p(X \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt$.
La courbe ci-dessous représente la fonction densité associée.

1. Interpréter sur le graphique la probabilité $p(X \leqslant 1)$.
2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.



Partie B

On pose $\lambda = 1{,}5$.

1. Calculer $p(X \leqslant 1)$, en donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près par excès.
2. Calculer $p(X \geqslant 2)$.
3. Déduire des calculs précédents l'égalité suivante : $p(1 \leqslant X \leqslant 2) = 0{,}173$ à 10^{-3} près.
4. Calculer l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x 1{,}5 t e^{-1{,}5t}\,dt$.
   Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $F(x)$; on obtient ainsi l'espérance mathématique de la variable X.

Partie C

Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine.
On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1{,}5$.

Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.
   a. Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 à 10^{-3} près.
   b. Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?
2. On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.
   a. Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?
   b. Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?

Asie, juin 2006 (4 points)

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul. On considère les événements :

- G_n : « Pierre gagne la n-ième partie » ;
- P_n : « Pierre perd la n-ième partie ».

On pose : $p_n = p(G_n)$ et $q_n = p(P_n)$.

1. Recherche d'une relation de récurrence.
   a. Déterminer p_1 puis les probabilités conditionnelles $p_{G_1}(G_2)$ et $p_{P_1}(G_2)$.
   b. Justifier l'égalité $p_n + q_n = 1$.
   c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,5\,p_n + 0,2$.
2. Étude de la suite $\left(p_n\right)$.
   On pose, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.
   a. Prouver que la suite (v_n) est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n.
   b. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite $\left(p_n\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

Centres étrangers, juin 2006 (5 points)

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4.
On lit le nombre sur la face cachée.
Pour $k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, on note p_k la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée.
Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres p_1, p_2, p_3 et p_4, dans cet ordre, forment une progression arithmétique.

1. Sachant que $p_4 = 0,4$, démontrer que $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,2$ et $p_3 = 0,3$.
2. On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?
3. On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
   a. Pour $1 \leqslant i \leqslant 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'événement $(X = i)$.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.
   c. Calculer la probabilité de l'événement $(X \geqslant 1)$. On donnera une valeur arrondie au millième.
4. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux.
   On note u_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n-ième lancer.
   a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.
   b. Calculer $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$ puis étudier la convergence de la suite (S_n).
   c. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $S_{n_0} > 0,999$.

France, juin 2006 (5 points)

1. Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. À chacun de ces tirs, il a la probabilité $0,2$ de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé. Les tirs successifs sont supposés indépendants.
   a. Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ?
   b. Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon ?
   c. Quelle est la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon ?
   d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n > 0,99$?
2. Ce tireur participe au jeu suivant :
   Dans un premier temps, il lance un dé tétraédrique régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4 (la face obtenue avec un tel dé est la face cachée) ; soit k le numéro de la face obtenue. Le tireur se rend alors au stand de tir et il a droit à k tirs pour crever le ballon.
   Démontrer que, si le dé est bien équilibré, la probabilité de crever le ballon est égale à 0,409 6 (on pourra utiliser un arbre pondéré).
3. Le tireur décide de tester le dé tétraédrique afin de savoir s'il est bien équilibré ou s'il est pipé. Pour cela, il lance 200 fois ce dé et il obtient le tableau suivant :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41

   a. Calculer les fréquences de sorties f_k observées pour chacune des faces.
   b. On pose $d^2 = \sum_{k=1}^{4} \left(f_k - \frac{1}{4}\right)^2$. Calculer d^2.
   c. On effectue maintenant 1 000 simulations des 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré et on calcule pour chaque simulation le nombre d^2. On obtient pour la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 les résultats suivants :

Minimum	D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9	Maximum
0,001 24	0,001 92	0,002 35	0,002 81	0,003 45	0,004 52	0,010 15

   Au risque de 10 %, peut-on considérer que ce dé est pipé ?

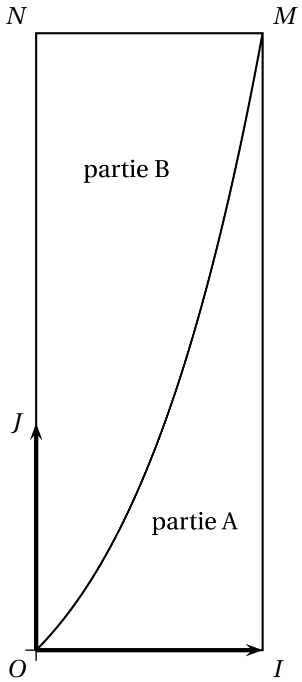
La Réunion, juin 2006 (5 points)

Première partie

Calculer l'intégrale $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Deuxième partie

La figure ci-dessous représente une cible rectangulaire $OIMN$ telle que, dans le repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OJ}\right)$, la ligne courbe $\mathscr{C}$ reliant le point O au point M est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$. Cette courbe partage la cible $OIMN$ en deux parties A et B comme l'indique la figure ci-dessous.
Un jeu consiste à lancer une fléchette qui atteint soit l'extérieur de la cible, soit l'une des parties A ou B. On admet que la fléchette ne peut atteindre aucune des frontières de la cible, ni la courbe $\mathscr{C}$.



Une étude statistique a montré que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et que les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à leurs aires respectives.

1. Démontrer que la probabilité d'atteindre la partie A est égale à $\frac{1}{2\mathrm{e}}$.
   Quelle est la probabilité d'atteindre la partie B ?
2. On lance de manière indépendante trois fléchettes.
   a. Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fléchettes ayant atteint la partie A. Définir la loi de probabilité de X. En déduire la valeur exacte de son espérance mathématique.
   b. Soit E l'événement : « exactement deux fléchettes atteignent la partie A ». Calculer une valeur approchée au millième de la probabilité de E.
   c. Soit F l'événement : « les trois fléchettes atteignent la partie B ». Calculer la probabilité de F (on donnera la valeur exacte).
   Sachant qu'aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible, quelle est la probabilité que toutes les trois se trouvent dans la partie B ?
3. On lance cette fois de manière indépendante n fléchettes.
   a. Déterminer en fonction de n la probabilité p_n pour qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie A.
   b. Déterminer le plus petit naturel n tel que $p_n \geqslant 0,99$.

Liban, juin 2006 (3 points)

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.
Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à :

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

1. Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale à 0,3.
   Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.
2. À quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de $0,5$?
3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $\mathrm{e}^{-0,4}$.
4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante.
   Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

Polynésie, juin 2006 (4 points)

On a posé à 1 000 personnes la question suivante : « combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ». Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant.

Retards le 2$^{\text{e}}$mois \ Retards le 1$^{\text{er}}$ mois	0	1	2 ou plus	Total
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2 ou plus	60	33	14	107
Total	572	318	110	1000

1. On choisit au hasard un individu de cette population.
   a. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois,
   b. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.
2. On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre n de mois (n entier naturel non nul). On fait les hypothèses suivantes :
   - si l'individu n'a pas eu de retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,46.
   - si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,66.
   - si l'individu a eu deux retards ou plus le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est encore 0,66.

   On note :
   - A_n l'événement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n » ;
   - B_n l'événement « l'individu a eu exactement un retard le mois n » ;
   - C_n l'événement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois n ».

   Les probabilités des événements A_n, B_n et C_n sont notées respectivement $p_n,\ q_n$ et r_n.

   a. Pour le premier mois ($n=1$), les probabilités $p_1,\ q_1$ et r_1 sont obtenues à l'aide du tableau précédent. Déterminer les probabilités $p_1,\ q_1$ et r_1.
   b. Exprimer p_{n+1} en fonction de $p_n,\ q_n$, et r_n. On pourra s'aider d'un arbre.
   c. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -0,2p_n + 0,66$.
   d. Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :
   $$u_n = p_n - 0,55$$
   Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
   e. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Amérique du Nord, mai 2006 (3 points)

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,5 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

Une urne contient 10 bulletins indiscernables au toucher de 3 sortes :
4 sont marqués « oui », 3 sont marqués « non » et 3 sont marqués « blanc ».
Lors d'un premier jeu, le joueur commence par miser 30 centimes d'euro. Il tire ensuite un bulletin de l'urne et l'y remet après l'avoir lu. Si le bulletin tiré est marqué « oui », le joueur reçoit 60 centimes d'euro, s'il est marqué « non », il ne reçoit rien. Si le bulletin tiré est marqué « blanc », il reçoit 20 centimes d'euro.

1. Le jeu est :

   A : favorable au joueur B : défavorable au joueur C : équitable

2. Le joueur joue 4 parties indépendamment les unes des autres.
   La probabilité qu'il tire au moins une fois un bulletin marqué « oui » est égale à :

   A : $\dfrac{216}{625}$ B : $\dfrac{544}{625}$ C : $\dfrac{2}{5}$

   Lors d'un second jeu, le joueur tire simultanément deux bulletins de l'urne.

3. La probabilité qu'il obtienne un tirage de deux bulletins de sortes différentes est égale à :

   A : $\dfrac{4}{15}$ B : $\dfrac{11}{30}$ C : $\dfrac{11}{15}$

Amérique du Nord, juin 2005 (5 points)

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.
On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).
Un joueur fait une partie en deux étapes :
Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.
Deuxième étape :

- Si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire ;
- Si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire ;
- Si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).
On définit les événements suivants :

- D_1 : « le dé indique 1 » ;
- D_2 : « le dé indique 2 » ;
- D_3 : « le dé indique 3 » ;
- G : « la partie est gagnée ».

A et B étant deux événements tels que $p(A) \neq 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. a. Déterminer les probabilités $p_{D_1}(G)$, $p_{D_2}(G)$, et $p_{D_3}(G)$

   b. Montrer alors que $p(G) = \dfrac{23}{180}$.
2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.
3. Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.
4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

Antilles – Guyane, juin 2005 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant â la réponse choisie.
Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.
40 % des écrivains de romans policiers sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français.
Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :
   a. $0,4$. b. $0,75$. c. $\dfrac{1}{150}$.
2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :
   a. $0,3$. b. $0,8$. c. $0,4$.
3. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est :
   a. $1,15$. b. $0,4$. c. $0,3$.
4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :
   a. $0,9$. b. $0,7$. c. $0,475$.
5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :
   a. $\dfrac{4}{150}$. b. $\dfrac{12}{19}$. c. $0,3$.
6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque ; la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :
   a. $1-(0,25)^{20}$. b. $20\times 0,75$. c. $0,75\times(0,25)^{20}$.

Réponses à l'exercice

(Mettre une croix dans la case correspondant à la réponse choisie)

	a.	b.	c.
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			

Asie, juin 2005 (5 points)

Une association organise une loterie pour laquelle une participation m exprimée en euros est demandée.
Un joueur doit tirer simultanément au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.
Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.
Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.
Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

- sur $\frac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 € ;
- sur $\frac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 € ;
- sur le reste le joueur est remboursé de sa participation m.

On appelle V l'événement « le joueur a obtenu 2 boules vertes ».
On appelle J l'événement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes ».
On appelle R l'événement « le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien ».

1. Quelques calculs.
   a. Calculer les probabilités $p(V)$ et $p(J)$ des événements respectifs V et J.
   b. On note $p_V(R)$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes. Déterminer $p_V(R)$ puis $p(R \cap V)$.
   c. Calculer $p(R)$.
   d. Calculer la probabilité de gagner les 100 €, puis la probabilité de gagner les 20 € de la roue.
2. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est-à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.
   a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et vérifier que $p(X = -m)$ est 0,6.
   c. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $E(X) = \dfrac{140 - 51m}{80}$.
   d. L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur entière en euro. Quelle valeur minimale faut-il donner à m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?
3. Un joueur se présente et décide de jouer 4 fois, quels que soient les résultats obtenus.
   Calculer la probabilité qu'il perde au moins une fois sa mise.
4. On voudrait qu'un joueur ait plus d'une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner quand il joue une seule fois. On note G cet événement.
   Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes.
   On appelle n le nombre de boules jaunes, on suppose $n \geqslant 1$.
   Calculer la valeur minimale de n pour que la condition précédente soit vérifiée.

France, juin 2005 (5 points)

Pour les questions 1 *et* 2*, on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à* 10^{-3} *près.*

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

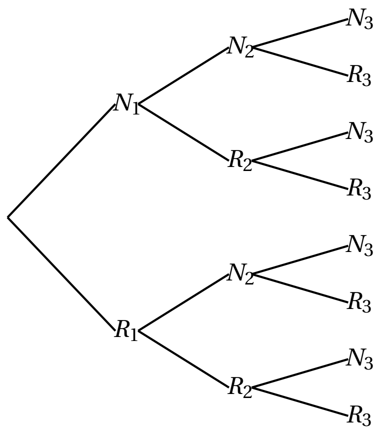
1. Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X.
2. Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie. On considère les événements suivants :
   - $C1$: « L'enfant choisit la boîte cubique » ;
   - $C2$: « L'enfant choisit la boîte cylindrique » ;
   - R : « L'enfant prend une bille rouge » ;
   - V : « L'enfant prend une bille verte ».

   a. Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.
   b. Calculer la probabilité de l'événement R.
   c. Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?
3. L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.
   a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.
   b. Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geqslant 0,99$.

La Réunion, juin 2005 (5 points)

On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3.
L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.
Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3.
Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i, (respectivement R_i) l'événement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. a. Calculer la probabilité des événements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$, et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.
   b. En déduire la probabilité de l'événement $N_1 \cap N_3$.
   c. Calculer de façon analogue la probabilité de l'événement $R_1 \cap N_3$.
3. Déduire de la question précédente la probabilité de l'événement N_3.
4. Les événements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?
5. Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Liban, juin 2005 (3 points)

Un fabricant d'écrans plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication.
Si le test est positif (c'est-à-dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client. Sinon l'écran retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'écran est acheminé chez le client, sinon il est détruit.
Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70 % des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les écrans réparés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succès.
On note T_1 l'événement « le premier test est positif ».
On note C l'événement « l'écran est acheminé chez le client ».

1. On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication.
   Déterminer les probabilités des événements T_1 et C.
2. La fabrication d'un écran revient à 1 000 € au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois.
   Cela lui coûte 50 € de plus si l'écran doit être testé une seconde fois.
   Un écran est facturé a euros (a étant un réel positif) au client.
   On introduit la variable aléatoire X qui, à chaque écran fabriqué, associe le « gain » (éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de a.
   b. Exprimer l'espérance de X en fonction de a.
   c. À partir de quelle valeur de a, l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices ?

Polynésie, juin 2005 (3 points)

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres.
Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par a et b.
2 % des montres fabriquées présentent le défaut a et 10 % le défaut b.
Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les événements suivants :

- A : « la montre tirée présente le défaut a » ;
- B : « la montre tirée présente le défaut b » ;
- C : « la montre tirée ne présente aucun des deux défauts » ;
- D : « la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».

On suppose que les événements A et B sont indépendants.

1. Montrer que la probabilité de l'événement C est égale à 0,882.
2. Calculer la probabilité de l'événement D.
3. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres.
   On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.
   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts a et b.
   On définit l'événement E « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ».
   Calculer la probabilité de l'événement E. On en donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

Nouvelle – Calédonie, mars 2005

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.
Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.
Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.
Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude.
Soit X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i^{e} trajet et la valeur 0 sinon. Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_{40}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Dans cette partie on suppose que $p = \dfrac{1}{20}$.
   a. Calculer l'espérance mathématique de X.
   b. Calculer les probabilités $p(X = 0)$, $p(X = 1)$ et $p(X = 2)$.
   c. Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.
3. Soit Z la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur.

   Justifier l'égalité $Z = 400 - 100X$ puis calculer l'espérance mathématique de Z pour $p = \dfrac{1}{5}$.
4. On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99 %.
   a. Démontrer que $p(X \leqslant 2) = (1-p)^{38}\left(741p^2 + 38p + 1\right)$.
   b. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = (1-x)^{38}\left(741x^2 + 38x + 1\right)$.
   Montrer que f est strictement décroissante sur $[0\,;\,1]$ et qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $f(x_0) = 0,01$. Déterminer l'entier naturel n tel que $\dfrac{n}{100} < x_0 < \dfrac{n+1}{100}$.
   c. En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99 % (on exprimera p en fonction de x_0).

Amérique du Sud, novembre 2004

On note $p_A(B)$ la probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé.
Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
   On note :
   - A_0 l'événement : « on n'a obtenu aucune boule noire » ;
   - A_1 l'événement : « on a obtenu une seule boule noire » ;
   - A_2 l'événement : « on a obtenu deux boules noires ».

   Calculer les probabilités de A_0, A_1 et A_2.
2. Après ce premier tirage, il reste donc 4 boules dans l'urne.
   On effectue à nouveau au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
   On note :
   - B_0 l'événement : « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n^o 2 » ;
   - B_1 l'événement : « on a obtenu une seule boule noire au tirage n^o 2 » ;
   - B_2 l'événement : « on a obtenu deux boules noires au tirage n^o 2 ».

   a. Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$ et $p_{A_2}(B_0)$.
   b. En déduire $p(B_0)$.
   c. Calculer $p(B_1)$ et $p(B_2)$.
   d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier ?
3. On considère l'événement R « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient extraites de l'une ».
   Montrer que $p(R) = \dfrac{1}{3}$.

France, septembre 2004

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B.
Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K_1 et K_2.
L'expérience est modélisée de la façon suivante :

- une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K_1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et dans K_2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$;
- une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

Partie A

1. Soit une particule au hasard. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   - A_1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K_1 » ;
   - A_2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K_2 » ;
   - B_1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K_1 » ;
   - B_2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K_2 » ;
   - C_1 : « la particule entre dans K_1 » ;
   - C_2 : « la particule entre dans K_2 ».
2. On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction.
   Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes.
   Calculer la probabilité de l'événement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K_2 ».

Partie B

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B ; chaque particule A donne en se transformant une particule B.
On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t = 0$, on a $p(0) = 0,75$.
Plus généralement, si t est exprimé en années, on a $p(t) = 0,75\mathrm{e}^{-\lambda t}$, où λ est une constante réelle.
La demi-vie [1] des particules de type A est égale à 5 730 ans.

1. Calculer λ ; on prendra une valeur approchée décimale à 10^{-5} près par défaut.
2. Au bout de combien d'années 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?
3. Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

1. temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial.

Polynésie, septembre 2004

On donne dans le plan trois points A, B et C distincts non alignés.
Une urne U contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres -2, -1, 0, 1, 2 et 3.
Une urne V contient cinq cartons indiscernables au toucher ; quatre cartons portent le nombre 1 et un carton le nombre -1.
On tire au hasard un carton dans chacune des urnes. Les tirages sont équiprobables. On note a le nombre lu sur le carton de U et b celui lu sur le carton de V.

1. Justifier que les points pondérés (A, a), (B, b) et $(C, 4)$ admettent un barycentre. On le note G.
2. a. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   - E_1 : « G appartient à la droite (BC) » ;
   - E_2 : « G appartient au segment $[BC]$ ».

   b. Montrer que la probabilité de l'événement E_3 « G est situé à l'intérieur du triangle ABC et n'appartient à aucun des côtés » est égale à $\dfrac{2}{5}$. On pourra faire appel à des considérations de signe.
3. Soit n un entier naturel non nul. On répète n fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un carton dans chacune des urnes U et V puis à considérer le barycentre G de la question 1.
   On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'événement E_3.

   a. Déterminer l'entier n pour que l'espérance de la variable aléatoire X soit égale à 4.

   b. Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situé à l'intérieur du triangle ABC soit supérieure ou égale à $0,999$.

Amérique du Nord, juin 2004

Un jeu de hasard est formé d'un dispositif lançant de façon aléatoire une fléchette dans une cible ayant la forme suivante :

B	B	B	B	B	B	B	B	B	J	J	J	V	V	R
R	V	V	J	J	J	B	B	B	B	B	B	B	B	B

La fléchette atteint toujours une case et une seule.
Les trente cases, blanches (B), jaunes (J), vertes (V) ou rouges (R), ont toutes la même probabilité d'être atteintes.
Si la fléchette atteint une case rouge, le joueur gagne 8 €.
Si la fléchette atteint une case verte, le joueur gagne 5 €.
Si la fléchette atteint une case jaune, le joueur ne gagne rien et ne perd rien.
Si la fléchette atteint une case blanche, le joueur perd a €. La lettre a désigne un nombre réel positif.

1. On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (compté négativement quand il perd).
   a. Donner la loi de probabilité de X.
   b. Calculer a pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que l'espérance $E(X)$ soit nulle.
2. Un joueur est considéré comme gagnant s'il a obtenu un gain strictement positif.
   a. Quelle est la probabilité p qu'un joueur gagne ?
   b. Un joueur joue 5 parties consécutives indépendantes. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement 2 fois ? exactement 5 fois ?
   c. Quel est le nombre moyen de parties gagnantes dans la situation décrite en 2.b ?

Centres étrangers, juin 2004

Un employé se rend à son travail. S'il est à l'heure il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville et il lui en coûte 1,5 €.
Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$, s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle R_n l'événement « l'employé est en retard le jour n ». On note p_n, la probabilité de R_n et q_n, celle de $\overline{R_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

1. Détermination d'une relation de récurrence.
   a. Déterminer les probabilités conditionnelles $p_{R_n}(R_{n+1})$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.
   b. Déterminer $p(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de p_n et $p\left(R_{n+1} \cap \overline{R_n}\right)$ en fonction de q_n.
   c. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et de q_n.
   d. En déduire que $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n$.
2. étude de la suite $\left(p_n\right)$. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = p_n - \frac{4}{23}$.
   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$.
   b. Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.
   c. Justifier que la suite $\left(p_n\right)$ est convergente et calculer sa limite.

France, juin 2004

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est :

$$p([0\,;\,t[) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0\,;\,200[) = 0,5$.

1. Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.
2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.
3. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^A \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
   a. Montrer que $\displaystyle\int_0^A \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{-\lambda A \mathrm{e}^{-\lambda A} - \mathrm{e}^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.
   b. En déduire d_m ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

La Réunion, juin 2004

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.
Les réponses à cet exercice sont à inscrire dans la grille ci-jointe, en cochant pour chaque question la case correspondante à la réponse proposée. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève un demi-point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Première partie

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :

- B_1, contenant 6000 adresses, dont 120 sont erronées et 5 880 sont exactes ;
- B_2, contenant 4 000 adresses, dont 200 sont erronées et 3800 sont exactes.

1. On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de B_1. La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

   a. $\dfrac{\binom{120}{3}+\binom{5880}{7}}{\binom{6000}{10}}$.

   b. $\dfrac{3}{120}$.

   c. $\dbinom{10}{3}\times\left(\dfrac{120}{6000}\right)^3\times\left(\dfrac{5880}{6000}\right)^7$.

   d. $\dbinom{10}{3}\times\left(\dfrac{3}{120}\right)^3\times\left(\dfrac{7}{5880}\right)^7$.

2. Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B_1 est :

   a. $0,98$.

   b. $\dfrac{0,4\times0,95}{0,6\times0,98+0,6\times0,02}$.

   c. $0,6\times0,98$.

   d. $\dfrac{0,6\times0,98}{0,6\times0,98+0,4\times0,95}$.

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,000\,5$). Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant t est :

$$p([0\ ;\ t[) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

   a. $\mathrm{e}^{-\frac{2\,500}{2\,000}}$. b. $\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}$. c. $1-\mathrm{e}^{-\frac{2\,500}{2\,000}}$. d. $\mathrm{e}^{-\frac{2\,000}{2\,500}}$.

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule : $E = \displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

   a. L'intégrale $\displaystyle\int_0^t \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

   a. $\lambda\dfrac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

   b. $-t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}+\dfrac{1}{\lambda}$.

   c. $\lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda$.

   d. $t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}$.

b. La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

a. 3 500. b. 2 000. c. 2 531, 24. d. 3 000.

Réponses à l'exercice

(Mettre une croix dans la case correspondant à la réponse choisie)

		a.	b.	c.	d.
Partie 1	1.				
	2.				
Partie 2	1.				
	2. a.				
	2. b.				

Liban, juin 2004

Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratif ou technique).
12 % des personnels sont des médecins et 71 % sont des soignants.
67 % des médecins sont des hommes et 92 % des soignants sont des femmes.

On donnera une valeur approchée de tous les résultats à 10^{-4} *près.*

1. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.
   a. Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?
   b. Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?
   c. On sait que 80 % du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT.
   En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.
2. Tout le personnel de cet hôpital a un temps de trajet domicile-hôpital au plus égal à une heure et on suppose que la durée exacte du trajet est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0; 1]$.
   On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital. Quelle est la probabilité pour que la personne interrogée ait une durée de trajet comprise entre 15 min et 20 min ?
3. Une entreprise souhaite envoyer un courrier publicitaire à 40 personnes qui travaillent dans cet hôpital. Elle a la liste du personnel mais ne connaît pas la fonction de chacun. Elle choisit au hasard 40 noms de la liste (en raison de la taille de la population, on considère qu'il s'agit de 40 tirages successifs indépendants avec remise).
   Quelle est la probabilité que, sur les 40 courriers envoyés, 10 exactement soient reçus par des médecins ?

Polynésie, juin 2004

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$).
Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} *près.*

1. Sachant que $p(X > 10) = 0{,}286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est $0{,}125$.
   On prendra $0{,}125$ pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.
2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?
4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?
5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

   Rappel :
   Loi exponentielle de paramètre λ *sur* $[0\,;+\infty[$, *dite aussi loi de durée de vie sans vieillissement* :
   pour $0 \leqslant a \leqslant b,\ p([a\,;b]) = \displaystyle\int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ et pour $c \geqslant 0,\ p([c\,;+\infty[) = 1 - \displaystyle\int_0^c \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

Inde, avril 2004

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Il y a trois boules noires dans l'urne U_1, deux boules noires dans l'urne U_2 et une boule noire dans l'urne U_3, et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.
Les boules sont indiscernables au toucher.
Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé,

- s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans l'urne U_1 ;
- s'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2, note sa couleur et la remet dans l'urne U_2 ;
- si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans l'urne U_3.

On désigne par A, B, C et N les événements suivants :

- A : « Le dé amène le numéro 1 » ;
- B : « Le dé amène un multiple de 3 » ;
- C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni le 1 ni un multiple de 3 » ;
- N : « La boule tirée est noire ».

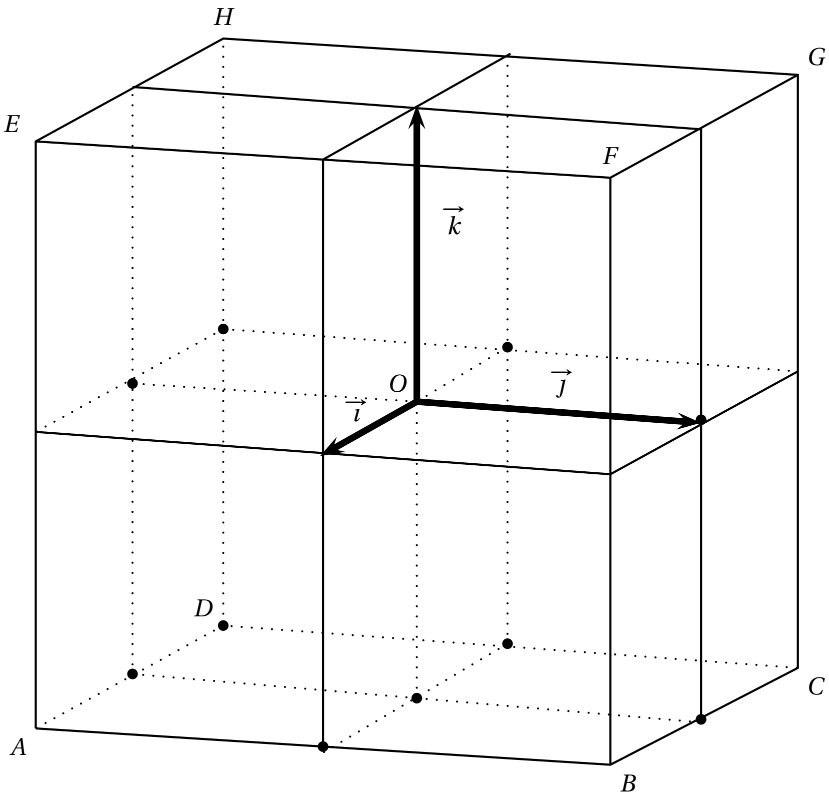
1. Le joueur joue une partie.
   a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3k}$.
   b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.
   c. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{2}$.
   d. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$.
2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\frac{1}{30}$. Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres. Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3}, la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

Amérique du Sud, septembre 2003

Un sac contient 4 jetons numérotés respectivement -1, 0, 0, 1 et indiscernables au toucher.
On tire un jeton du sac, on note son numéro x et on le remet dans le sac ; on tire un second jeton, on note son numéro y et on le remet dans le sac ; puis on tire un troisième jeton, on note son numéro z et on le remet dans le sac.
Tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés.
À chaque tirage de trois jetons, on associe, dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ le point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$.
Sur le graphique ci-dessous, sont placés les 27 points correspondant aux différentes positions possibles du point M. Les coordonnées du point A sont $(1\,;\,-1\,;\,-1)$ dans le repère $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$.
On note $\mathscr{C}$ le cube $ABCDEFGH$.

1. Démontrer que la probabilité que le point M soit en A est égale à $\frac{1}{64}$.
2. On note E_1 l'événement « M appartient à l'axe des abscisses ».

   Démontrer que la probabilité de E_1 est égale à $\frac{1}{4}$.
3. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par O et orthogonal au vecteur $\vec{n}\,(1\,;\,1\,;\,1)$.
   a. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.
   b. Tracer en couleur sur le graphique ci-dessous, la section du plan $\mathscr{P}$ et du cube $\mathscr{C}$.
   (On ne demande pas de justification).
   c. On note E_2 l'événement « M appartient à $\mathscr{P}$ ».
   Quelle est la probabilité de l'événement E_2 ?
4. On désigne par $\mathscr{B}$ la boule de centre O et de rayon 1,5 (c'est-à-dire l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leqslant 1{,}5$).
   On note E_3 l'événement « M appartient à la boule $\mathscr{B}$ ».
   Déterminer la probabilité de l'événement E_3.



Nouvelle – Calédonie, novembre 2003

On observe sur une longue période le nombre d'accidents de scooters à un carrefour. Il est alors possible de proposer la modélisation suivante : pour n scooters franchissant le carrefour durant une année (n est un grand nombre inconnu), on admet que la variable aléatoire S_n qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour durant cette année suit une loi binomiale ; on estime que l'espérance mathématique de S_n notée $E(S_n)$ est égale à 10.
Soit p la probabilité pour un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année considérée.

1. Calculer p, puis justifier l'égalité $p\left(S_n = k\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{10}{n}\right)^k\left(1-\frac{10}{n}\right)^{n-k}$, où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
2. a. Établir l'égalité :

$$\ln\left[p(S_n = 0)\right] = -10 \times \frac{\ln\left(1-\frac{10}{n}\right)}{-\frac{10}{n}},$$

   où ln désigne la fonction logarithme népérien ; en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} p\left(S_n = 0\right) = \mathrm{e}^{-10}$.

   b. Démontrer que :

$$p\left(S_n = k+1\right) = p\left(S_n = k\right) \times \frac{n-k}{n-10} \times \frac{10}{k+1},$$

   où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

   c. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} p\left(S_n = k\right) = \mathrm{e}^{-10}\frac{10^k}{k!}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, alors on a également :

$$\lim_{n\to+\infty} p\left(S_n = k+1\right) = \mathrm{e}^{-10}\frac{10^{k+1}}{(k+1)!} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant k+1 \leqslant n$$

   d. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel k que :

$$\lim_{n\to+\infty} p\left(S_n = k\right) = \mathrm{e}^{-10}\frac{10^k}{k!} \quad \text{où } k \text{ est un entier naturel tel que } 0 \leqslant k \leqslant n$$

3. On suppose que le nombre n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $\mathrm{e}^{-10}\frac{10^k}{k!}$ est une approximation acceptable de $p\left(S_n = k\right)$. Utiliser cette approximation pour calculer à 10^{-4} près la probabilité pour qu'au cours de cette année il y ait au moins trois accidents de scooters à ce carrefour.

Antilles – Guyane, septembre 2003

Une association organise des promenades en montagne. Douze guides emmènent chacun, pour la journée, un groupe de personnes dès le lever du Soleil. L'été il y a plus de demandes que de guides et chaque groupe doit s'inscrire la veille de la promenade.
Mais l'expérience des dernières années prouve que la probabilité que chacun des groupes inscrits ne se présente pas au départ de la promenade est égale à $\frac{1}{8}$. On admettra que les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns des autres.
Les probabilités demandées seront arrondies au centième le plus proche.

1. a. Montrer que la probabilité qu'un jour donné les 12 groupes inscrits soient tous présents est comprise entre 0,20 et 0,21.

   b. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où les 12 groupes inscrits se sont tous présentés au départ lors d'un mois de 30 jours.

   Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   Donner la signification des événements $X = 30$ puis $X = 0$ et calculer la probabilité de ces événements.

   Préciser l'espérance mathématique $E(X)$.

   Quelle signification peut-on donner à ce résultat ?

   c. Une somme de 1 Crédit (la monnaie locale) est demandée à chaque groupe pour la journée. Cette somme est réglée au départ de la promenade. Dans le cas où un groupe ne se présente pas au départ, l'association ne gagne évidemment pas le Crédit que ce groupe aurait versé pour la journée.

   On nomme S la variable aléatoire égale à la somme, en Crédits, perçue par l'association un jour donné.

   Calculer la probabilité de l'événement $[S = 11]$.

   Préciser l'espérance mathématique de S.

2. a. Agacé par le nombre de guides inemployés, le dirigeant de l'association décide de prendre chaque jour une réservation supplémentaire. évidemment si les 13 groupes inscrits se présentent, le 13$^{\text{e}}$ groupe sera dirigé vers une activité de substitution. Toutefois, cette activité de remplacement entraîne une dépense de 2 Crédits à l'association.

   Quelle est la probabilité p_{13} qu'un jour donné il n'y ait pas de désistement, c'est-à-dire que les 13 groupes inscrits la veille se présentent au départ de la promenade ?

   b. Soit R la variable aléatoire égale au coût de l'activité de substitution.

   Préciser la loi de la variable aléatoire R et calculer son espérance mathématique.

   c. Montrer que le gain moyen obtenu pour chaque jour est :

$$\left(\sum_{k=0}^{13} k \cdot \binom{k}{13}\left(\frac{7}{8}\right)^{k}\left(\frac{1}{8}\right)^{13-k}\right) - 2p_{13}$$

   Calculer ce gain.

   d. La décision du dirigeant est-elle rentable pour l'association ?

France, septembre 2003

Un commerce possède un rayon « journaux » et un rayon « souvenirs ». À la fin d'une journée, on trie les pièces de monnaie contenues dans les caisses de chaque rayon.
On constate que la caisse du rayon « journaux » contient 3 fois plus de pièces de 1 € que celle du rayon « souvenirs ».
Les pièces ont toutes le côté pile identique, mais le côté face diffère et symbolise un des pays utilisant la monnaie unique. Ainsi, 40 % des pièces de 1 € dans la caisse du rayon « souvenirs » et 8 % de celle du rayon « journaux » portent une face symbolisant un pays autre que la France (on dira « face étrangère »).

1. Le propriétaire du magasin, collectionneur de monnaies, recherche les pièces portant une face étrangère. Pour cela il prélève au hasard et avec remise 20 pièces issues de la caisse « souvenirs ». On note X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement le nombre de pièces portant une face « étrangère ».
   a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.
   b. Calculer la probabilité qu'exactement 5 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.
   c. Calculer la probabilité qu'au moins 2 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.
2. Les pièces de 1 € issues des deux caisses sont maintenant rassemblées dans un sac.
   On prélève au hasard une pièce du sac.
   On note S l'événement « la pièce provient de la caisse souvenirs » et E l'événement « la pièce porte une face étrangère ».
   a. Déterminer $p(S)$, $p_S(E)$; en déduire $p(S \cap E)$.
   b. Démontrer que la probabilité que la pièce porte une face étrangère est égale à 0,16.
   c. Sachant que cette pièce porte une face étrangère, déterminer la probabilité qu'elle provienne de la caisse « souvenirs ».
3. Dans la suite, la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans le sac porte une face étrangère est égale à 0,16.
   Le collectionneur prélève n pièces (n entier supérieur ou égal à 2) du sac au hasard et avec remise.
   Calculer n pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une pièce portant une face étrangère soit supérieure ou égale à 0,9.

Amérique du Nord, juin 2003

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions : chacune comporte trois réponses, une et une seule étant exacte.
Les réponses à cet exercice sont à inscrire dans la grille ci-jointe, en cochant pour chaque question la case correspondante à la réponse proposée.
Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse. Toute réponse exacte entraîne une bonification, toute erreur est pénalisée.

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement, définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. Ainsi, la probabilité d'un intervalle $[0\,;\,t[$, notée $p([0\,;\,t[)$, est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant t.

Cette loi est telle que $p([0\,;\,t[) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$, où t est un nombre réel positif représentant le nombre d'années (loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$).

1. Pour $t \geqslant 0$, la valeur exacte de $p([t\,;\,+\infty[)$ est :
   a. $1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.   b. $\mathrm{e}^{-\lambda t}$.   c. $1 + \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
2. La valeur de t pour laquelle on a $p([0\,;\,t[) = p([t\,;\,+\infty[)$ est :
   a. $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$.   b. $\dfrac{\lambda}{\ln 2}$.   c. $\dfrac{\lambda}{2}$.
3. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. La valeur exacte de λ est alors :
   a. $\ln\left(\dfrac{50}{41}\right)$.   b. $\ln\left(\dfrac{41}{50}\right)$.   c. $\dfrac{\ln(82)}{\ln(100)}$.
4. Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :
   a. $p([1\,;\,+\infty[)$.   b. $p([3\,;\,+\infty[)$.   c. $p([2\,;\,3[)$.

   Dans la suite de l'exercice on prendra $\lambda = 0,2$.
5. La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années, arrondie à 10^{-4} près, est :
   a. $0,552\,3$.   b. $0,548\,8$.   c. $0,451\,2$.
6. Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas de panne au cours des trois premières années.
   La valeur la plus proche de la probabilité de l'événement « $X = 4$ » est :
   a. $0,555\,5$.   b. $0,802\,2$.   c. $0,160\,7$.

Réponses à l'exercice

(Mettre une croix dans la case correspondant à la réponse choisie)

	a.	b.	c.
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			

Antilles – Guyane, juin 2003

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article. Un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02. Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,049 4.
2. Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A. Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.
   a. Définir la loi de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X. Quel est le sens de ce nombre ?
3. a. Un petit commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A.
   Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.
   b. Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50 %. Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.
4. La variable aléatoire, qui à tout article fabriqué par l'entreprise associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre 0,000 7, c'est-à-dire de densité de probabilité la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :
$$f(x) = 0,000\,7\mathrm{e}^{-0,000\,7x}$$
   Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1 000 jours.

Centres étrangers, juin 2003

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc.
Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement.
On rappelle que la loi de probabilité est alors définie par :

$$p(D \leqslant A) = \int_0^A \frac{1}{82} \mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\,\mathrm{d}x$$

Dans tout l'exercice, les résultats numériques seront arrondis au millième.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :
   a. comprise entre 50 et 100 km ;
   b. supérieure à 300 km.
2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 kilomètres sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?
3. Détermination de la distance moyenne parcourue sans incident.
   a. Au moyen d'une intégration par parties, calculer $I(A) = \displaystyle\int_0^A \frac{1}{82} x \mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\,\mathrm{d}x$ où A est un nombre réel positif.
   b. Calculer la limite de $I(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$ (cette limite représente la distance moyenne cherchée).
4. L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{82}$.
   d étant un réel positif, on note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.
   a. Montrer que X_d suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $\mathrm{e}^{-\lambda d}$.
   b. Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

La Réunion, juin 2003

Cet exercice comporte 3 questions indépendantes.
Une question comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c et d.
Aucune justification n'est demandée pour cet exercice.
Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.
Vous inscrirez en toutes lettres « VRAI » ou « FAUX » dans la case correspondante du tableau donné en fin d'exercice à rendre avec la copie.

1. Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue n tirages indépendants et avec remise, n désignant un entier supérieur à 10. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées.
   a. X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{4}$.
   b. $p(X=0)=\frac{1}{2^{2n}}$.
   c. $p(X<5)=1-p(X>5)$.
   d. $E(X)=0,75\,n$.
2. Une maladie atteint 1 % d'une population donnée.
   Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes :
   - chez les individus malades, 99 % des tests sont positifs et 1 % sont négatifs ;
   - chez les individus non malades, 98 % des tests sont négatifs (les autres étant positifs).

   Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test.
   On note M l'événement « l'individu est malade » et T l'événement « le test pratiqué est positif ».
   a. $p_M(T)+p_{\overline{M}}(T)=1,01$.
   b. $p_M(T)+p_{\overline{M}}(T)=p(T)$.
   c. $p(T)=2,97.10^{-2}$.
   d. Sachant que le test est positif, il y a deux chances sur trois pour que l'individu testé ne soit pas malade.
3. La durée d'attente en seconde à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01. Alors :
   a. La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(t)=\mathrm{e}^{-0,01t}$.
   b. Pour tout réel t positif, $p(Y\leqslant t)=1-\mathrm{e}^{-0,01t}$.
   c. La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est, à 0,01 près, égale à 0,16.
   d. Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute.

Réponses à l'exercice

(Vous inscrirez en toutes lettres « VRAI » ou « FAUX » dans la case correspondante du tableau)

	a.	b.	c.	d.
1.				
2.				
3.				

Liban, juin 2003

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis à la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.
On note p_n la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n^{e} tirage.

1. Calculer les probabilités p_2, p_3 et p_4.
2. On considère les événements suivants :
   - B_n : « On tire une boule blanche lors du n^{e} tirage » ;
   - U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ».

   a. Calculer la probabilité de l'événement B_n.

   b. Exprimer la probabilité de l'événement U_n en fonction de n.

   c. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier l'égalité :

$$p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

3. On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \ldots + p_n$.

   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2}+1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

   b. Déterminer la limite de la suite (S_n).

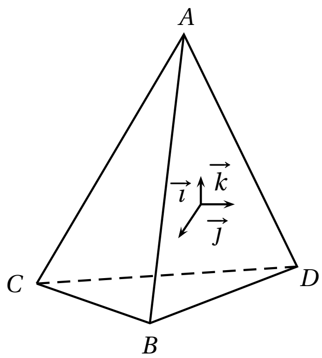
Polynésie, juin 2003

Partie A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives :

$$A(0\,;0\,;3),\ B(2\sqrt{2}\,;0\,;-1),\ C(-\sqrt{2}\,;-\sqrt{6}\,;-1),\ D(-\sqrt{2}\,;\sqrt{6}\,;-1)$$

1. Démontrer que $ABCD$ est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont de même longueur.
2. On note R, S, T et U les milieux respectifs des arêtes $[AC]$, $[AD]$, $[BD]$ et $[BC]$; démontrer que $RSTU$ est un parallélogramme de centre O.
3. Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.



Partie B

On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.
On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

1. Calculer la probabilité pour qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres.
2. Calculer la probabilité pour que la couleur bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre.
3. Calculer la probabilité de l'événement E « les six faces rouges sont visibles ».
4. On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres.
   Calculer la probabilité p_n pour que l'événement E soit réalisé au moins une fois.
   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Nouvelle – Calédonie, mars 2003

Une société de maintenance de photocopieurs désire optimiser ses prestations au niveau des entreprises, afin de proposer un abonnement adapté à ses services.
On note, pour n entier naturel non nul, I_n l'événement « la société intervient durant le n^e mois qui suit l'installation d'un photocopieur » et $p_n = p(I_n)$ la probabilité de l'événement I_n.
Le bureau d'études a mis en évidence les résultats suivants pour une entreprise déterminée :

- $p(I_1) = p_1 = 0,75$;
- sachant qu'il y a eu une intervention durant le n^e mois qui suit l'installation d'un photocopieur, la probabilité d'intervention le mois suivant est égale 0,04 ;
- sachant qu'il n'y a pas eu d'intervention durant le n^e mois qui suit l'installation d'un photocopieur, la probabilité d'intervention le mois suivant est égale à 0,64.

On rappelle que $\overline{A}$ est l'événement contraire de l'événement A et que $p_B(A)$ est la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

Partie 1

1. Préciser $p_{I_n}(I_{n+1})$ et $p_{\overline{I_n}}(I_{n+1})$ puis calculer $p(I_{n+1} \cap I_n)$ et $p\left(I_{n+1} \cap \overline{I_n}\right)$ en fonction de p_n $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$.
2. En déduire $p_{n+1} = -0,6p_n + 0,64$.
3. On considère la suite (q_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $q_n = p_n - 0,4$.
   a. Démontrer que (q_n) est une suite géométrique.
   b. En déduire q_n puis p_n en fonction de n.
   c. Donner une valeur approchée de p_6 à 10^{-3} près par excès.

Partie 2

Le même mois, la société de maintenance installe un photocopieur dans 10 entreprises. Six mois plus tard, elle désire libérer une partie de son personnel afin de proposer un stage de mise à niveau.
On estime que la probabilité d'intervention du service de maintenance durant ce mois auprès de chacune de ces entreprises est égale à 0,373.
Donner, à 10^{-3} près par excès, la probabilité qu'il y ait au moins un déplacement du service de maintenance durant ce mois (on supposera que les interventions dans les différentes entreprises sont des événements indépendants).

Amérique du Sud, novembre 2002

Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes. Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. On le lance une fois ; si l'on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.

   a. Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.

   b. Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir ?

   c. Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge ?

2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose à chaque fois devant l'urne.

   a. Montrer que la probabilité de l'événement « la 3^{e} boule tirée est noire » vaut $\frac{1}{4}$.

   b. Certains pensent que l'événement « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à l'événement « la troisième boule tirée est noire ». Est-ce vrai ? Justifier.

Antilles – Guyane, septembre 2002 (4 points)

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}$$

   a. Soit la suite (v_n) définie, pour $n \geqslant 1$, par $v_n = u_n - \frac{2}{5}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.

2. On considère deux dés, notés A et B. Le dé A comporte trois faces rouges et trois faces blanches. Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches.

   On choisit un dé au hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si on obtient blanc, on change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite.

   On désigne par :

   - A_n l'événement « on utilise le dé A au n-ième lancer » ;
   - $\overline{A_n}$ l'événement contraire de A_n ;
   - R_n l'événement « on obtient rouge au n-ième lancer » ;
   - $\overline{R_n}$ l'événement contraire de R_n ;
   - a_n et r_n les probabilités respectives de A_n et R_n.

   a. Déterminer a_1.

   b. Déterminer r_1. Pour cela, on pourra s'aider d'un arbre.

   c. En remarquant que, pour tout $n \geqslant 1$, $R_n = (R_n \cap A_n) \cup \left(R_n \cap \overline{A_n}\right)$, montrer que :

$$r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$$

   d. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup \left(\overline{A_n} \cap \overline{R_n}\right)$.

   e. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$, puis déterminer l'expression de a_n en fonction de n.

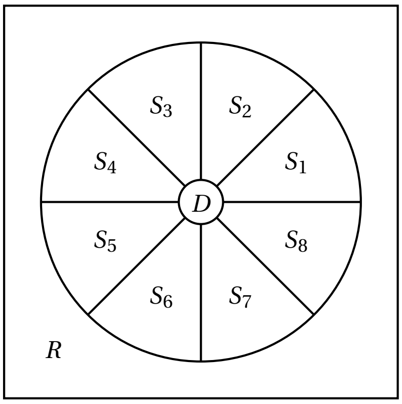
   f. En déduire l'expression de r_n en fonction de n puis la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$.

France, septembre 2002 (4 points)

Un carré de côté 20 cm est partagé selon les 10 zones suivantes :

- un disque D de rayon 1 cm ;
- 8 secteurs S_1, S_2, ..., S_8 de même aire délimités par les frontières du disque D et du disque D' de même centre et de rayon 9 cm ;
- une zone R entre le disque D' et le bord du carré.

On place un point aléatoirement dans le carré. La probabilité de placer le point dans une zone quelconque du carré est proportionnelle à l'aire de cette zone.



1. a. Déterminer la probabilité $p(D)$ pour que le point soit placé dans le disque D.

   b. Déterminer la probabilité $p(S_1)$ pour que le point soit placé dans le secteur S_1.

2. Pour cette question 2, on utilisera les valeurs approchées suivantes :

   $p(D) = 0,008$ et pour tout k appartenant à $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$, $p(S_k) = 0,0785$.

   À cette situation aléatoire est associé le jeu suivant :

   - un point placé dans le disque D fait gagner 10 euros ;
   - un point placé dans le secteur S_k fait gagner k euros pour tout k appartenant à $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$;
   - un point placé dans la zone R fait perdre 4 euros.

   On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique obtenu.

   a. Calculer la probabilité $p(R)$ pour que le point soit placé dans la zone R.
   Calculer l'espérance de X.

   b. On joue deux fois de suite. On a donc placé deux points de manière indépendante dans le carré. Calculer la probabilité d'obtenir un gain total positif ou nul.

   c. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. On joue n fois de suite. On a donc placé n points de manière indépendante dans le carré.
   Calculer la probabilité p_n d'obtenir au moins un point placé dans le disque D.
   Déterminer la plus petite valeur de n tel que $p_n \geqslant 0,9$.

France, juin 2002 (4 points)

1. Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.
   On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a, porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré.
   Soit $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de coordonnées respectives $(a\,;\,-5\,;\,1-a)$ et $(1+b\,;\,1\,;\,b)$.
   Montrer que la probabilité que ces vecteurs soient orthogonaux est égale à $\dfrac{1}{4}$.
2. Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la première question.
   Si A obtient des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, A est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.
   Si A obtient des vecteurs non orthogonaux et B des vecteurs orthogonaux, B est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.
   Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.
   Pour tout entier n, on désigne par :
   - A_n l'événement : « A gagne la n-ième partie » ;
   - B_n l'événement : « B gagne la n-ième partie » ;
   - C_n l'événement : « le jeu continue après la n-ième partie ».

   a. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.

   b. Exprimer $p(C_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et montrer que $p(C_n) = \left(\dfrac{5}{8}\right)^n$.

   Exprimer $p(A_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et en déduire que $p(A_n) = \dfrac{3}{16}\left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1}$.
3. a. Déterminer la limite de $p(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

   b. Déterminer le plus petit entier n tel que $p(A_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

La Réunion, juin 2002 (4 points)

Polynésie, juin 2002 (5 points)