Recueil d'annales en Mathématiques

Terminale S – Enseignement obligatoire

Nombres complexes

Frédéric Demoulin[1], **Olivier Hervé**[2]

Dernière révision : 22 mai 2008

Document diffusé via le site www.bacamaths.net de Gilles Costantini[3]

[1] frederic.demoulin (chez) voila.fr
[2] ol.herve (chez) laposte.net
[3] gilles.costantini (chez) bacamaths.net

Tableau récapitulatif des exercices

⋆ indique que cette notion a été abordée dans l'exercice

N°	Lieu	Année	ROC	QCM VF	Calculs dans $\mathbb{C}$	Trans-lation	Homo-thétie	Rota-tion	Appli-cation	Bary-centres	Suites
1	Inde	Avril 2008	⋆		⋆			⋆			
2	Amérique du Sud	Nov 2007			⋆				⋆		
3	Nouvelle-Calédonie	Nov 2007		⋆	⋆				⋆		
4	Antilles-Guyane	Sept 2007			⋆				⋆		
5	La Réunion	Sept 2007			⋆						
6	Antilles-Guyane	Juin 2007			⋆			⋆	⋆		
7	Asie	Juin 2007			⋆			⋆	⋆		⋆
8	Centres étrangers	Juin 2007	⋆		⋆						
9	France	Juin 2007			⋆		⋆	⋆			
10	La Réunion	Juin 2007			⋆					⋆	
11	Polynésie	Juin 2007			⋆				⋆		
12	Amérique du Nord	Mai 2007			⋆		⋆	⋆		⋆	
13	Liban	Mai 2007			⋆				⋆		
14	Inde	Avril 2007	⋆		⋆	⋆		⋆			
15	Amérique du Sud	Nov 2006	⋆		⋆				⋆		
16	Nouvelle-Calédonie	Nov 2006			⋆	⋆					
17	Antilles-Guyane	Sept 2006			⋆				⋆		
18	France	Sept 2006			⋆						
19	Polynésie	Sept 2006			⋆	⋆					
20	Amérique du Nord	Juin 2006	⋆		⋆		⋆		⋆	⋆	
21	Antilles-Guyane	Juin 2006			⋆	⋆		⋆			
22	Asie	Juin 2006	⋆		⋆				⋆		
23	Centres étrangers	Juin 2006	⋆	⋆	⋆						
24	France	Juin 2006	⋆		⋆				⋆		
25	La Réunion	Juin 2006			⋆	⋆					
26	Polynésie	Juin 2006			⋆				⋆		
27	Liban	Mai 2006			⋆		⋆	⋆	⋆		
28	Inde	Avril 2006			⋆						⋆
29	Amérique du Sud	Nov 2005			⋆				⋆		
30	Nouvelle-Calédonie	Nov 2005			⋆				⋆		
31	Polynésie	Sept 2005		⋆	⋆					⋆	
32	Amérique du Nord	Juin 2005		⋆	⋆			⋆	⋆		
33	Antilles-Guyane	Juin 2005			⋆				⋆		
34	Asie	Juin 2005			⋆				⋆		
35	France	Juin 2005			⋆			⋆			
36	Liban	Juin 2005			⋆			⋆			
37	Polynésie	Juin 2005			⋆				⋆		
38	Inde	Avril 2005			⋆			⋆			
39	Nouvelle-Calédonie	Mars 2005		⋆	⋆						
40	Amérique du Sud	Nov 2004			⋆				⋆		
41	Nouvelle-Calédonie	Nov 2004			⋆				⋆		
42	France	Sept 2004			⋆			⋆		⋆	
43	Amérique du Nord	Juin 2004			⋆			⋆			
44	Antilles-Guyane	Juin 2004		⋆	⋆						
45	Asie	Juin 2004							⋆		
46	Centres étrangers	Juin 2004			⋆				⋆		
47	France	Juin 2004			⋆			⋆			
48	La Réunion	Juin 2004			⋆				⋆		
49	Liban	Juin 2004			⋆			⋆	⋆		
50	Polynésie	Juin 2004			⋆		⋆			⋆	
51	Inde	Avril 2004			⋆			⋆			
52	Nouvelle-Calédonie	Mars 2004			⋆			⋆			
53	Amérique du Sud	Nov 2003							⋆		
54	France	Sept 2003		⋆	⋆		⋆	⋆			
55	Amérique du Nord	Juin 2003			⋆			⋆			
56	Antilles-Guyane	Juin 2003						⋆			
57	Asie	Juin 2003			⋆			⋆	⋆		
58	France	Juin 2003			⋆			⋆			

N°	Lieu	Année	ROC	QCM VF	Calculs dans $\mathbb{C}$	Trans-lation	Homo-thétie	Rota-tion	Appli-cation	Bary-centres	Suites
59	Liban	Juin 2003			$\star$	$\star$	$\star$	$\star$			
60	Polynésie	Juin 2003			$\star$						
61	Inde	Avril 2003			$\star$			$\star$			
62	Amérique du Sud	Nov 2002			$\star$				$\star$		
63	Nouvelle-Calédonie	Nov 2002			$\star$			$\star$			
64	Antilles-Guyane	Sept 2002			$\star$				$\star$		
65	France	Sept 2002			$\star$				$\star$		
66	Polynésie	Sept 2002			$\star$			$\star$			
67	Amérique du Nord	Juin 2002			$\star$				$\star$		
68	Antilles-Guyane	Juin 2002			$\star$						
69	Asie	Juin 2002			$\star$				$\star$		
70	Centres étrangers	Juin 2002			$\star$				$\star$		
71	France	Juin 2002			$\star$		$\star$	$\star$			
72	La Réunion	Juin 2002			$\star$				$\star$		
73	Polynésie	Juin 2002			$\star$				$\star$		
74	Inde	Juin 2002			$\star$						
75	Antilles-Guyane	Sept 2001			$\star$			$\star$		$\star$	
76	France	Sept 2001			$\star$				$\star$		
77	Polynésie	Sept 2001			$\star$				$\star$		
78	Amérique du Nord	Juin 2001			$\star$						
79	Antilles-Guyane	Juin 2001			$\star$				$\star$		
80	Asie	Mars 2001			$\star$				$\star$		
81	France	Juin 2001			$\star$						$\star$
82	Liban	Juin 2001			$\star$						
83	Polynésie	Juin 2001			$\star$			$\star$	$\star$		
84	Inde	Juin 2001			$\star$				$\star$		
85	Amérique du Sud	Nov 2000			$\star$					$\star$	
86	Nouvelle-Calédonie	Déc 2000			$\star$	$\star$		$\star$			
87	Antilles-Guyane	Sept 2000			$\star$					$\star$	
88	Amérique du Nord	Juin 2000			$\star$				$\star$		
89	Antilles-Guyane	Juin 2000			$\star$					$\star$	
90	Asie	Juin 2000			$\star$						$\star$
91	France	Juin 2000			$\star$			$\star$			
92	La Réunion	Juin 2000			$\star$						
93	Liban	Juin 2000			$\star$				$\star$		
94	Polynésie	Juin 2000			$\star$				$\star$		
95	Inde	Juin 2000			$\star$		$\star$	$\star$			
96	France	Sept 1999			$\star$						
97	Nouvelle Calédonie	Déc 1999			$\star$			$\star$			
98	Sportifs haut niveau	Sept 1999			$\star$						
99	Amérique du Nord	Juin 1999			$\star$						
100	Antilles-Guyane	Juin 1999			$\star$						
101	Asie	Juin 1999			$\star$						
102	Centres étrangers	Juin 1999			$\star$						
103	France	Juin 1999							$\star$		
104	Liban	Juin 1999			$\star$				$\star$		
105	Polynésie	Juin 1999			$\star$			$\star$			
106	Inde	Mai 1999			$\star$		$\star$	$\star$			
107	Amérique du Sud	Nov 1998						$\star$	$\star$		
108	Antilles-Guyane	Sept 1998			$\star$	$\star$	$\star$	$\star$			
109	France	Sept 1998			$\star$			$\star$			
110	Polynésie	Sept 1998			$\star$						

Exercice 1 Inde, Avril 2008 (5 points)

Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.

Partie A

On suppose connus les résultats suivants :

1. Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C.
   Alors $\left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \dfrac{CB}{CA}$ et $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) \quad (2\pi)$.
2. Soit z un nombre complexe et soit θ un réel :
   $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

Démonstration de cours : démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z - \omega).$$

Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique 2 cm), on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = -\sqrt{3} - \mathrm{i}, \quad z_B = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}, \quad z_C = \sqrt{3} + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_D = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

1. a. Donner le module et un argument pour chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.
   b. Comment construire à la règle et au compas les points A, B, C et D dans le repère $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$?
   c. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
2. On considère la rotation r de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Soient E et F les points du plan définis par : $E = r(A)$ et $F = r(C)$.
   a. Comment construire à la règle et au compas les points F et E dans le repère précédent ?
   b. Donner l'écriture complexe de r.
   c. Déterminer l'affixe du point E.

Exercice 2 Amérique du Sud, Novembre 2007 (5 points)

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.
Soit f l'application qui à tout point M de $\mathscr{P}$ d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

1. Soit E le point d'affixe $z_E = -\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point E', image de E par f.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.
3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.
   Soit M un point distinct des points O, A et B.
   a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et -1, on a :

$$\frac{z' + 1}{z' - 1} = \left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)^2.$$

   b. En déduire une expression de $\dfrac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\dfrac{MB}{MA}$ puis une expression de l'angle $\left(\overrightarrow{M'A},\ \overrightarrow{M'B}\right)$ en fonction de l'angle $\left(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB}\right)$.

4. Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ.
5. Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$.
   a. Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB).
   b. Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par f ?

Exercice 3 Nouvelle Calédonie, Novembre 2007 (4 points)

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1. Une solution de l'équation $2z+\overline{z}=9+\mathrm{i}$ est :
   a. 3 **b.** i **c.** $3+\mathrm{i}$
2. Soit z un nombre complexe ; $|z+\mathrm{i}|$ est égal à :
   a. $|z|+1$ **b.** $|z-1|$ **c.** $|\mathrm{i}\overline{z}+1|$
3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :
   a. $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$ **b.** $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ **c.** $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$
4. Soit n un entier naturel. Le complexe $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :
   a. $n=3$ **b.** $n=6k+3$, avec k relatif **c.** $n=6k$ avec k relatif
5. Soient A et B deux points d'affixes respectives i et -1. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-\mathrm{i}|=|z+1|$ est :
   a. la droite (AB) **b.** le cercle de diamètre $[AB]$ **c.** la droite perpendiculaire à (AB) passant par O
6. Soit Ω le point d'affixe $1-\mathrm{i}$. L'ensemble des points M d'affixe $z=x+\mathrm{i}y$ vérifiant $|z-1+\mathrm{i}|=|3-4\mathrm{i}|$ a pour équation :
   a. $y=-x+1$ **b.** $(x-1)^2+y^2=\sqrt{5}$ **c.** $z=1-\mathrm{i}+5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec θ réel
7. Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et 3i. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}\quad(2\pi)$ est :
   a. $1-4\mathrm{i}$ **b.** $-3\mathrm{i}$ **c.** $7+4\mathrm{i}$
8. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z-2}{z-1}=z$ est :
   a. $\{1-\mathrm{i}\}$ **b.** L'ensemble vide **c.** $\{1-\mathrm{i}\ ;\ 1+\mathrm{i}\}$

Exercice 4 Antilles – Guyane, Septembre 2007 (5 points)

Partie A

1. Déterminer le nombre complexe α tel que

$$\begin{cases} \alpha(1+\mathrm{i}) = 1+3\mathrm{i} \\ \mathrm{i}\alpha^2 \quad = -4+3\mathrm{i} \end{cases}.$$

2. Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = z^2 - (1+3\mathrm{i})z + (-4+3\mathrm{i})$.
   Montrer que $f(z)$ s'écrit sous la forme $(z-\alpha)(z-\mathrm{i}\alpha)$.
   En déduire les solutions sous forme algébrique de l'équation $f(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 5 cm).

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2+\mathrm{i}$ et $b = -1+2\mathrm{i}$.
   Placer A et B dans le repère et compléter la figure au fur et à mesure.
   Montrer que $b = \mathrm{i}\alpha$, en déduire que le triangle OAB est un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.
2. On considère le point C d'affixe $c = -1 + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point D tel que le triangle OCD soit un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OD}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.
   On pourra conjecturer l'affixe de D à l'aide de la figure pour traiter la question suivante.
3. Soit M le milieu de $[CB]$. On appelle $z_{\overrightarrow{OM}}$ et $z_{\overrightarrow{DA}}$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{DA}$.
   Prouver que : $\dfrac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.
4. Donner une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{OM}\right)$.
5. Prouver que $OM = \dfrac{1}{2}DA$.
6. On appelle J, K et L les milieux respectifs des segments $[CD]$, $[DA]$ et $[AB]$.
   On admet que le quadrilatère $JKLM$ est un parallélogramme. Démontrer que c'est un carré.

Exercice 5 La Réunion, Septembre 2007 (5 points)

Soit les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}, \quad z_2 = 2+2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Écrire Z sous forme algébrique.
2. Donner les modules et arguments de z_1, z_2 et Z.
3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique.
   On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z. Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).
5. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007}.

Exercice 6 Antilles – Guyane, Juin 2007 (5 points)

$\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ est un repère orthonormal direct du plan complexe.
Soit A le point d'affixe $1+\mathrm{i}$.
Au point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\dfrac{1}{2}\left(z+\mathrm{i}\bar{z}\right)$.

1. On pose $z=x+\mathrm{i}y$ et $z'=x'+\mathrm{i}y'$ avec x, y, x' et y' réels.
   a. Démontrer les égalités suivantes : $x'=\dfrac{1}{2}(x+y)$ et $y'=\dfrac{1}{2}(x+y)$.
   En déduire que le point M' appartient à la droite (OA).
   b. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $M=M'$.
   c. Démontrer que pour tout point M du plan les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux.
2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. M_1 est le point d'affixe z_1 image de M par r, M_2 le point d'affixe $z_2=\bar{z}$, M_3 le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $OM_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.
   a. Dans cette question uniquement M a pour affixe $4+\mathrm{i}$, placer les points M, M_1, M_2, M_3.
   b. Exprimer z_1 en fonction de z, puis z_3 en fonction de z.
   c. $OM_1M_3M_2$ est-il un losange ? Justifier.
   d. Vérifier que $z'-z=\dfrac{1}{2}\mathrm{i}z_3$.
   En déduire que $MM'=\dfrac{1}{2}OM_3$.
3. Démontrer que les points M, M_1, M_2 et M_3 appartiennent à un même cercle de centre O si et seulement si $MM'=\dfrac{1}{2}OM$.
   Donner alors la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{M'OM}$.

Exercice 7 Asie, Juin 2007 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. L'unité graphique est 4 cm.
Soit λ un nombre complexe non nul et différent de 1.
On définit, pour tout entier naturel n, la suite (z_n) de nombres complexes par :

$$\begin{cases} z_0 &= 0 \\ z_{n+1} &= \lambda.z_n+\mathrm{i} \end{cases}.$$

On note M_n le point d'affixe z_n.

1. Calcul de z_n en fonction de n et de λ.
   a. Vérifier les égalités : $z_1=\mathrm{i}$; $z_2=(\lambda+1)\mathrm{i}$; $z_3=(\lambda^2+\lambda+1)\mathrm{i}$.
   b. Démontrer que, pour tout entier n positif ou nul : $z_n=\dfrac{\lambda^n-1}{\lambda-1}\mathrm{i}$.
2. Étude du cas $\lambda=\mathrm{i}$.
   a. Montrer que $z_4=0$.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.
   c. Montrer que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
   d. Représenter les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.
3. Caractérisation de certaines suites (z_n).
   a. On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\lambda^k=1$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_{n+k}=z_n$.
   b. Réciproquement, monter que s'il existe un entier naturel k tel que, pour tout entier naturel n on ait l'égalité $z_{n+k}=z_n$ alors : $\lambda^k=1$.

Exercice 8 Centres étrangers, Juin 2007 (5 points)

I. Restitution organisée de connaissances

1. Démontrer qu'un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.
2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $\left(O;\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$. On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine O, a pour orthocentre le point H d'affixe $a+b+c$.

II. Étude d'un cas particulier

On pose : $a = 3+\mathrm{i}$, $b = -1+3\mathrm{i}$, $c = -\sqrt{5}-\mathrm{i}\sqrt{5}$.

1. Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
2. Placer les points A, B, C et le point H d'affixe $a+b+c$, puis vérifier graphiquement que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

III. Étude du cas général

ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et a, b, c sont les affixes respectives des points A, B et C.

1. Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si :
$$a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}.$$
2. On pose $w = \overline{b}c - b\overline{c}$.
   a. En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans le **I.**, démontrer que w est imaginaire pur.
   b. Verifier l'égalité : $(b+c)(\overline{b}-\overline{c}) = w$ et justifier que : $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{w}{|b-c|^2}$.
   c. En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.
3. Soit H le point d'affixe $a+b+c$.
   a. Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.
   b. Prouver que $\left(\overrightarrow{CB},\, \overrightarrow{AH}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif quelconque.
   (On admet de même que $\left(\overrightarrow{CA},\, \overrightarrow{BH}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$).
   c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

Exercice 9 France, Juin 2007 (5 points)

Partie A

On considère l'équation :

$$(E) \qquad z^3 - (4+\mathrm{i})z^2 + (13+4\mathrm{i})z - 13\mathrm{i} = 0$$

où z est un nombre complexe.

1. Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.
2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z, on ait :
$$z^3 - (4+\mathrm{i})z^2 + (13+4\mathrm{i})z - 13\mathrm{i} = (z-\mathrm{i})(az^2+bz+c).$$
3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Partie B

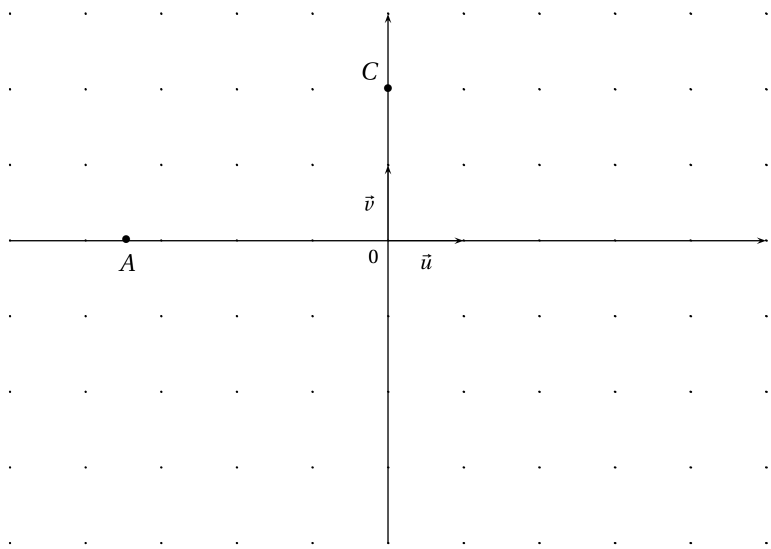
Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i, $2+3\mathrm{i}$ et $2-3\mathrm{i}$.

1. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point A', image du point A par la rotation r.
2. Démontrer que les points A', B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A'.

Exercice 10 La Réunion, Juin 2007 (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
A, B, C désignent les points d'affixes respectives $a = -2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - 3\mathrm{i}$ et $c = 2\mathrm{i}$.

1. a. Écrire b sous forme exponentielle.
   b. Les points A et C sont représentés sur la figure jointe en annexe. Construire à la règle et au compas le point B sur ce dessin (*laisser les traces de construction apparentes*).
2. On désigne par E le barycentre du système $\{(A\,;\,1)\,;\,(C\,;\,3)\}$ et par F le barycentre du système $\{(A\,;\,2)\,;\,(B\,;\,1)\}$.
   a. Établir que l'affixe e du point E est égale à $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.
   b. Déterminer l'affixe f du point F.
3. a. Démontrer que le quotient $\dfrac{e-c}{e-b}$ peut s'écrire k.i où k est un nombre réel à déterminer.
   En déduire que, dans le triangle ABC, le point E est le pied de la hauteur issue de B. Placer le point E sur le dessin.
   b. Démontrer que le point F possède une propriété analogue. Placer F sur le dessin.
4. On désigne par H le barycentre du système $\{(A\,;\,2)\,;\,(B\,;\,1)\,;\,(C\,;\,6)\}$.
   Démontrer que le point H est le point d'intersection des droites (BE) et (CF).
   Qu'en déduit-on pour le point H ?



Exercice 11 Polynésie, Juin 2007 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra 1 cm pour unité graphique. Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$\bar{z} - 3\mathrm{i}z - 3 + 6\mathrm{i} = 0, \quad \bar{z} \text{ étant le conjugué de } z.$$

2. On considère le point A d'affixe $4 - 2\mathrm{i}$.
Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.
3. Soit D le point d'affixe $2\mathrm{i}$.
   a. Représenter l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M d'affixe z différente de $2\mathrm{i}$ tels que :

$$\arg(z - 2\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

   b. Représenter l'ensemble $(\mathscr{F})$ des points M d'affixe z tels que $z = 2\mathrm{i} + 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, θ appartenant à $\mathbb{R}$.
4. A tout point M d'affixe $z \neq -2$, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{z-1}{\bar{z}+2}$.
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z différente de -2 tels que $\left|z'\right| = 1$.

Exercice 12 Amérique du Nord, Mai 2007 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 4 cm).
Soit A le point d'affixe $z_A = \mathrm{i}$ et B le point d'affixe $z_B = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r.
   a. Déterminer une écriture complexe de r.
   b. Montrer que l'affixe de C est $z_C = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
   c. Écrire z_B et z_C sous forme algébrique.
   d. Placer les points A, B et C.
2. Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, -1 et 2.
   a. Montrer que l'affixe de D est $z_D = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. Placer le point D.
   b. Montrer que A, B, C et D sont sur un même cercle.
3. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h.
   a. Déterminer une écriture complexe de h.
   b. Montrer que l'affixe de E est $z_E = \sqrt{3}$. Placer le point E.
4. a. Calculer le rapport $\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.
   b. En déduire la nature du triangle CDE.

Exercice 13 Liban, Mai 2007 (5 points)

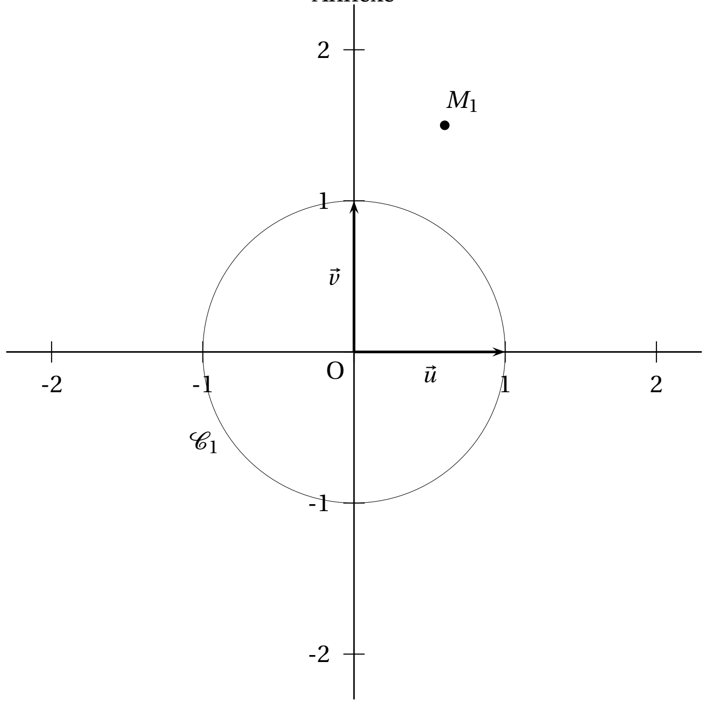
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{z}{|z|}\left(2 - |z|\right).$$

Le cercle $\mathscr{C}_1$, de centre O et de rayon 1, est représenté sur la figure, donnée en annexe, que l'on complétera au fur et à mesure des questions.
Pour z complexe non nul, on note $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, r étant le module de z et α un argument de z.

1. Montrer que $z' = (2 - r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.
2. Déterminer l'affixe a' du point A', image par f du point A d'affixe $a = 3$.
3. Soit B le point d'affixe $b = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$.
   a. Écrire b sous forme exponentielle.
   b. Déterminer l'affixe b' du point B', image du point B par f.
4. Placer A, B, A' et B' sur la figure.
5. a. Déterminer l'ensemble E des points M du plan privé du point O dont l'image par f est O.
   b. Représenter E sur la figure.
6. Montrer que le cercle $\mathscr{C}_1$ est l'ensemble des points M du plan distincts de O tels que $f(M) = M$.
7. Pour cette question, M est un point du plan, distinct de O, n' appartenant pas au cercle $\mathscr{C}_1$.
   On appelle I le milieu du segment $[MM']$ où M' est l'image de M par f.
   a. Montrer que I appartient à $\mathscr{C}_1$.
   b. Montrer que I appartient à la demi-droite $[OM)$.
   c. Sur la figure donnée en annexe est placé un point nommé M_1.
   Construire le point M_1', image par f du point M_1.

Annexe



Exercice 14 Inde, Avril 2007 (5 points)

1. *Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances.*
   Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Soit R la rotation du plan de centre Ω, d'affixe ω et d'angle de mesure θ. L'image par R d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :
   – $R(\Omega) = \Omega$;
   – pour tout point M du plan, distinct de Ω, l'image M' de M est définie par
   $$\Omega M' = \Omega M \text{ et } \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \quad [2\pi].$$
   On rappelle que, pour des points A et B d'affixes respectives a et b,
   $$AB = |b-a| \text{ et } \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b-a) \quad [2\pi].$$
   Question : Montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M' par la rotation R, sont liées par la relation
   $$z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-\omega).$$
2. On considère les points I et B d'affixes respectives $z_I = 1+\mathrm{i}$ et $z_B = 2+2\mathrm{i}$. Soit R la rotation de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$.
   a. Donner l'écriture complexe de R.
   b. Soit A l'image de I par R. Calculer l'affixe z_A de A.
   c. Montrer que O, A et B sont sur un même cercle de centre I. En déduire que OAB est un triangle rectangle en A. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.
   d. En déduire une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right)$.
3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{IO}$. On pose $A' = T(A)$.
   a. Calculer l'affixe $z_{A'}$ de A'.
   b. Quelle est la nature du quadrilatère $OIAA'$?
   c. Montrer que $-\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de $z_{A'}$.

Exercice 15 Amérique du Sud, Novembre 2006 (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. **Question de cours**
   On rappelle que : « pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul d'affixe z, on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = \left(\vec{u}\ ;\ \vec{w}\right)$ ».
   Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.
   a. Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN} ; \overrightarrow{MP}\right)$.
   b. Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$.
2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :
   $$z_A = 4+\mathrm{i}, \quad z_B = 1+\mathrm{i}, \quad z_C = 5\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_D = -3-\mathrm{i}.$$
   Placer ces points sur une figure.
3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que :
   $$z' = (1+2\mathrm{i})z - 2 - 4\mathrm{i}.$$
   a. Préciser les images des points A et B par f.
   b. Montrer que f admet un unique point invariant Ω dont on précisera l'affixe ω.
4. a. Montrer que pour tout nombre complexe z, on a :
   $$z' - z = -2\mathrm{i}(2 - \mathrm{i} - z).$$

b. En déduire, pour tout point M différent du point Ω, la valeur de $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{M\Omega}\,;\,\overrightarrow{MM'}\right)$.

c. Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?

d. Soit E le point d'affixe $z_E = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$. Écrire z_E sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E' associé au point E.

Exercice 16 Nouvelle - Calédonie, Novembre 2006 (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

On considère l'équation (E) :

$$z^3 - (4+\mathrm{i})z^2 + (7+\mathrm{i})z - 4 = 0$$

où z désigne un nombre complexe.

Partie A

1. a. Montrer que (E) admet une solution réelle, notée z_1.

   b. Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait :

$$z^3 - (4+\mathrm{i})z^2 + (7+\mathrm{i})z - 4 = (z - z_1)(z - 2 - 2\mathrm{i})(az + b).$$

2. Résoudre (E).

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives 1, $2+2\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$.

1. Représenter A, B et C.
2. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{2+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$. En déduire la nature du triangle OBC.
3. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier votre affirmation.
4. Soit D l'image de O par la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et de centre C. Déterminer l'affixe de D.
5. Quelle est la nature de $OCDB$?

Exercice 17 Antilles-Guyane, Septembre 2006

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
On désigne par A et B les points d'affixes respectives 2 et 3. On fera un dessin (unité graphique 2 cm) qui sera complété selon les indications de l'énoncé.
La question 1 *est indépendante des questions* 2 *et* 3.

1. a. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4z + 6 = 0.$$

b. On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives :

$$z_1 = 2 + \mathrm{i}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_2 = 2 - \mathrm{i}\sqrt{2}.$$

Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{z_1 - 3}{z_1}$.
En déduire que le triangle OBM_1 est un triangle rectangle.

c. Démontrer sans nouveau calcul que les points O, B, M_1 et M_2, appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ que l'on précisera.
Tracer le cercle $\mathscr{C}$ et placer les points M_1 et M_2 sur le dessin.

2. On appelle f l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par l'égalité :

$$z' = z^2 - 4z + 6.$$

On désigne par Γ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$. Ce cercle ne sera pas tracé sur le dessin.

a. Vérifier l'égalité suivante $z' - 2 = (z-2)^2$.

b. Soit M le point de Γ d'affixe $z = 2 + \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où θ désigne un réel de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$. Vérifier l'égalité suivante : $z' = 2 + 2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$ et en déduire que M' est situé sur un cercle Γ' dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ' sur le dessin.

3. On appelle D le point d'affixe $d = 2 + \dfrac{\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}}{2}$ et on désigne par D' l'image de D par f.

a. Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $d - 2$.
En déduire que D est situé sur le cercle Γ.

b. À l'aide la question 2.b, donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\,,\ \overrightarrow{AD'}\right)$ et placer le point D' sur le dessin.

c. Démontrer que le triangle DAD' est équilatéral.

Exercice 18 France, Septembre 2006 (5 points)

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $\left(O\,;\ \overrightarrow{u}\,,\ \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, où x, x', y, y' sont des nombres réels.
On rappelle que $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et que $|z|$ désigne le module de z.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\mathrm{Re}(z'\overline{z}) = 0$.
2. Montrer que les points O, M et M' sont alignés si, et seulement si, $\mathrm{lm}(z'\overline{z}) = 0$.

Applications

3. N est le point d'affixe $z^2 - 1$. Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux ?
4. On suppose z non nul. P est le point d'affixe $\dfrac{1}{z^2} - 1$.
On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés.

a. Montrer que $\left(\dfrac{1}{z^2} - 1\right)\left(\overline{z^2 - 1}\right) = -\overline{z}^2 \left|\dfrac{1}{z^2} - 1\right|^2$.

b. En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble recherché.

Exercice 19 Polynésie, Septembre 2006 (4 points)

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   On pose $a = 3$, $b = 5 - 2\text{i}$ et $c = 5 + 2\text{i}$. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c.
   Soit M un point d'affixe z du plan, distinct des points A et B.
   a. Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.
   b. Donner une interprétation géométrique de l'argument du nombre complexe $\dfrac{z-3}{z-5+2\text{i}}$.
   c. Déterminer alors l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-3}{z-5+2\text{i}}$ soit un nombre réel strictement négatif.
2. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et Ω le point d'affixe $2 - \text{i}$.
   a. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   b. Déterminer l'image Γ' de Γ par la rotation r. Déterminer une équation paramétrique de Γ'.

Exercice 20 Amérique du Nord, Juin 2006 (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + \text{i}\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - \text{i}\sqrt{3}$.

Partie A

1. a. Donner la forme exponentielle de z_B puis de z_C.
   b. Placer les points A, B et C.
2. Déterminer la nature du quadrilatère $OBAC$.
3. Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M du plan tels que $|z| = |z-2|$.

Partie B

À tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{-4}{z-2}.$$

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z = \dfrac{-4}{z-2}$.
   b. En déduire les points associés aux points B et C.
   c. Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB.
2. a. **Question de cours :**
   Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\overline{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.
   Démontrer que :
   – pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$;
   – pour tout nombre complexe z non nul, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
   b. Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2 :
   $$\left|z' - 2\right| = \frac{2|z|}{|z-2|}.$$
   c. On suppose dans cette question que M est un point quelconque de $\mathcal{D}$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble défini à la question 3 de la partie A.
   Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.
   Tracer Γ.

Exercice 21 Antilles - Guyane, Juin 2006 (5 points)

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points
   - A d'affixe a, $a \in \mathbb{R}$;
   - B d'affixe $b + \mathrm{i}$, $b \in \mathbb{R}$;
   - C image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   a. Déterminer une relation entre a et b pour que le point C appartienne à l'axe $\left(O;\ \overrightarrow{v}\right)$.

   b. Exprimer alors l'affixe du point C en fonction de a.

2. Dans cette question, on pose $a = \sqrt{3}$ et $b = 0$. On considère les points C d'affixe $c = -\mathrm{i}$ et D d'affixe $d = 2 + \sqrt{3} - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

   a. Quelle est la nature du triangle ABC ?

   b. Calculer le quotient $\dfrac{d-a}{c-a}$. Que peut-on en déduire pour le triangle ACD ?

   c. Déterminer l'affixe du point E image de D dans la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   d. Déterminer l'affixe du point F image de D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

   e. Déterminer la nature du triangle BEF.

Exercice 22 Asie, Juin 2006 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On rappelle que pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul, d'affixe z, on a :

$$|z| = \|\overrightarrow{w}\| \text{ et } \arg(z) = \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{w}\right) \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

Partie A – Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z').$$

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z').$$

Partie B

On note A et B les points d'affixes respectives $-\mathrm{i}$ et $3\mathrm{i}$.
On note f l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}z + 3}{z + \mathrm{i}}.$$

1. Étude de quelques cas particuliers

   a. Démontrer que f admet deux points invariants J et K appartenant au cercle de diamètre $[AB]$.
   Placer ces points sur le dessin.

b. On note C le point d'affixe $c = -2 + \mathrm{i}$. Démontrer que le point C', image de C par f, appartient à l'axe des abscisses.

2. Pour tout point M du plan distinct de A et B, démontrer que :

$$\arg\left(z'\right) = \left(\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

3. Étude de deux ensembles de points

   a. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un nombre complexe imaginaire pur.

   b. Soit M d'affixe z un point du cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B. À quel ensemble appartient le point M' ?

Exercice 23 Centres étrangers, Juin 2006 (4 points)

Partie A – Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :
(i) Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} |z| & = r \\ \arg z = \theta & \text{à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \iff \begin{cases} z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ r > 0 \end{cases}.$$

(ii) Pour tous nombres réels a et b :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ \sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a \end{cases}.$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.
Démontrer les relations :

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2| \text{ et } \arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

Partie B

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.
On rappelle que si z est un nombre complexe, $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et $|z|$ désigne le module de z.

1. Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$, alors z^4 est un nombre réel.
2. Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.
3. Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = \mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}$.
4. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

Exercice 24 France, Juin 2006 (5 points)

On considère le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthononnal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$. Dans tout l'exercice, $\mathscr{P}\setminus\{O\}$ désigne le plan $\mathscr{P}$ privé du point origine O.

1. **Question de cours**
   On prend comme pré-requis les résultats suivants :
   – si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z)+\arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif ;
   – pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul d'affixe z, on a : $\arg(z) = \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{w}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

   a. Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que :
   $$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \text{ à } 2k\pi \text{ près, avec } k \text{ entier relatif.}$$
   b. Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, on a :
   $$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \text{ à } 2k\pi \text{ près, avec } k \text{ entier relatif.}$$
2. On considère l'application f de $\mathscr{P}\backslash\{O\}$ dans $\mathscr{P}\backslash\{O\}$ qui, au point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$. On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i.
   a. Démontrer que pour $z \neq 0$, on a :
   $$\arg\left(z'\right) = \arg(z) \text{ à } 2k\pi \text{ près, avec } k \text{ entier relatif.}$$
   En déduire que, pour tout point M de $\mathscr{P}\backslash\{O\}$, les points M et $M' = f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O.
   b. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}\backslash\{O\}$ tels que $f(M) = M$.
   c. M est un point du plan $\mathscr{P}$ distinct de O, U et V, on admet que M' est aussi distinct de O, U et V.
   Établir l'égalité :
   $$\frac{z'-1}{z'-\text{i}} = \frac{1}{\text{i}}\left(\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+\text{i}}\right) = -\text{i}\overline{\left(\frac{z-1}{z-\text{i}}\right)}.$$
   En déduire une relation entre $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-\text{i}}\right)$ et $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\text{i}}\right)$
3. a. Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq \text{i}$ et soit M le point d'affixe z. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si, et seulement si, $\dfrac{z-1}{z-\text{i}}$ est un nombre réel non nul.
   b. Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V.

Exercice 25 La Réunion, Juin 2006 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\dfrac{\pi}{2}$.
On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
   $$\frac{z-4}{z} = \text{i}.$$
   Écrire la solution sous forme algébrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.
3. Soient A, B, A' et D les points du plan complexe d'affixes respectives :
   $$a = 2, \qquad b = 4, \qquad a' = 2\text{i} \quad \text{et} \quad d = 2+2\text{i}.$$
   Quelle est la nature du triangle ODB ?
4. Soient E et F les points d'affixes respectives $e = 1 - \text{i}\sqrt{3}$ et $f = 1 + \text{i}\sqrt{3}$.
   Quelle est la nature du quadrilatère $OEAF$?

5. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 2. Soit $\mathscr{C}'$ le cercle de centre A' et de rayon 2.
Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.
   a. On désigne par E' l'image par la rotation r du point E. Calculer l'affixe e' du point E'.
   b. Démontrer que le point E' est un point du cercle $\mathscr{C}'$.
   c. Vérifier que $e-d=\left(\sqrt{3}+2\right)\left(e'-d\right)$. En déduire que les points E, E' et D sont alignés.
6. Soit D' l'image du point D par la rotation r. Démontrer que le triangle $EE'D'$ est rectangle.

Exercice 26 Polynésie, Juin 2006 (5 points)

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique 2 cm).
On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a=1$ et $b=-1$.
On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par :

$$z'=\frac{z-1}{z+1}.$$

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1. Déterminer les points invariants de f, c'est-à-dire les points M tels que $M=f(M)$.
2. a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1 :
$$\left(z'-1\right)(z+1)=-2.$$
   b. En déduire une relation entre $\left|z'-1\right|$ et $|z+1|$, puis entre $\arg\left(z'-1\right)$ et $\arg(z+1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1.
   Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
3. Montrer que si M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle $\mathscr{C}'$ de centre A et de rayon 1.
4. Soit le point P d'affixe $p=-2+\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   a. Déterminer la forme exponentielle de $(p+1)$.
   b. Montrer que le point P appartient au cercle $\mathscr{C}$.
   c. Soit Q le point d'affixe $q=-\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p.
   Montrer que les points A, P' et Q sont alignés.
   d. En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application f.

Exercice 27 Liban, Mai 2006 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.
Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1. a. Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.
   b. Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
   Placer les points A, B et B'.
2. On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que :
$$z'=(1+\mathrm{i})z+1.$$
   a. Montrer que B a pour image B' par f.

b. Montrer que A est le seul point invariant par f.

c. Établir que pour tout nombre complexe z distinct de i :

$$\frac{z'-z}{\mathrm{i}-z}=-\mathrm{i}.$$

Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles.
En déduire une méthode de construction de M' à partir de M, pour M distinct de A.

3. a. Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z-2|=\sqrt{2}$.

b. Démontrer que $z'-3-2\mathrm{i}=(1+\mathrm{i})(z-2)$.
En déduire que si le point M appartient à Σ_1, alors son image M' par f appartient à un cercle Σ_2, dont on précisera le centre et le rayon.

c. Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B'.

Exercice 28 Inde, Avril 2006 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 5 cm.
On pose $z_0=2$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z_n$. On note A_n le point d'affixe z_n.

1. Calculer z_1, z_2, z_3 et z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.
   Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=|z_n|$.
   Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n :
$$u_n=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$
3. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon $0,1$?
4. a. Établir que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=\mathrm{i}$.
   En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1}.

   b. Pour tout entier naturel n, on pose ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$.
   On a ainsi : $\ell_n=A_0A_1+A_1A_2+\dots+A_{n-1}A_n$.
   Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

Exercice 29 Amérique du Sud, Novembre 2005 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.
Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\dfrac{4}{\overline{z}}$, où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
2. Déterminer l'ensemble des points dont l'image par l'application f est le point J d'affixe 1.
3. Soit α un nombre complexe non nul. Démontrer que le point A d'affixe α admet un antécédent unique par f, dont on précisera l'affixe.
4. a. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

   b. Exprimer $|z'|$ en fonction de $|z|$. Si r désigne un réel strictement positif, en déduire l'image par f du cercle de centre O et de rayon r.

c. Choisir un point P du plan complexe non situé sur les axes de coordonnées et tel que $OP = 3$, et construire géométriquement son image P' par f.

5. On considère le cercle $\mathscr{C}_1$, de centre J et de rayon 1. Montrer que l'image par f de tout point de $\mathscr{C}_1$, distinct de O, appartient à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = 2$.

Exercice 30 Nouvelle – Calédonie, Novembre 2005 (5 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. Unité graphique : 3 cm.
À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' par l'application f qui admet pour écriture complexe :

$$z' = \frac{(3+4\mathrm{i})z + 5\overline{z}}{6}.$$

1. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 1+2\mathrm{i}$, $z_B = 1$ et $z_C = 3\mathrm{i}$.
   Déterminer les affixes des points A', B', C' images respectives de A, B, C par f.
   Placer les points A, B, C, A', B', C'.
2. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ (avec x et y réels).
   Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.
3. Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \frac{1}{2}x$.
   Tracer $\mathscr{D}$. Quelle remarque peut-on faire ?
4. Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f. Montrer que M' appartient à la droite $\mathscr{D}$.
5. a. Montrer que, pour tout nombre complexe z : $\dfrac{z'-z}{z_A} = \dfrac{z+\overline{z}}{6} + \mathrm{i}\dfrac{z-\overline{z}}{3}$.
   En déduire que le nombre $\dfrac{z'-z}{z_A}$ est réel.
   b. En déduire que, si $M' \neq M$, les droites (OA) et (MM') sont parallèles.
6. Un point quelconque N étant donné, comment construire son image N' ? (on étudiera deux cas suivant que N appartient ou non à $\mathscr{D}$).
   Effectuer la construction sur la figure.

Exercice 31 Polynésie, Septembre 2005 (3 points)

Pour chacune des trois questions, une seule des trois propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,5 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point.*
Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.
Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

1. Le point M est situé sur le cercle de centre $A(-2\,;\,5)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Son affixe z vérifie :
   a. $|z-2+5\mathrm{i}|^2 = 3$;
   b. $|z+2-5\mathrm{i}|^2 = 3$;
   c. $|z-2+5\mathrm{i}| = 3$.
2. On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\dfrac{z-b}{c-a}$ et $\dfrac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.

a. M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;
b. M appartient aux cercles de diamètres respectifs $[AC]$ et $[AB]$;
c. M est l'orthocentre du triangle ABC.

3. Soit A et B les points d'affixes respectives $1+\mathrm{i}$ et $5+4\mathrm{i}$, et C un point du cercle de diamètre $[AB]$. On appelle G l'isobarycentre des points A, B et C et on note z_G son affixe.

   a. $|z_G - 3 - 2,5\mathrm{i}| = \dfrac{5}{6}$;

   b. $z_G - (1+\mathrm{i}) = \dfrac{1}{3}(4+3\mathrm{i})$;

   c. $z_G - (3+2,5\mathrm{i}) = \dfrac{1}{3}(4+3\mathrm{i})$.

Exercice 32 Amérique du Nord, Juin 2005 (4 points)

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2+3\mathrm{i}$, $-3-\mathrm{i}$ et $2,08+1,98\mathrm{i}$. Le triangle ABC est :

   a. isocèle et non rectangle b. rectangle et non isocèle
   c. rectangle et isocèle d. ni rectangle ni isocèle

2. À tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z-4\mathrm{i}}{z+2}$.

   L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est :
   a. un cercle de rayon 1 b. une droite
   c. une droite privée d'un point d. un cercle privé d'un point

3. Les notations sont les mêmes qu'à la question 2.
   L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :
   a. un cercle b. une droite
   c. une droite privée d'un point d. un cercle privé d'un point

4. Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe i. L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ est :

   a. $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ b. $z' = \left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$
   c. $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ d. $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

Exercice 33 Antilles – Guyane, Juin 2005 (5 points)

$\left(O;\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal du plan $\mathscr{P}$.
Soit A le point d'affixe 1 ; soit B le point d'affixe -1.
Soit $\mathscr{F}$ l'application de $\mathscr{P}$ privé de O dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z distinct de O associe le point $M' = \mathscr{F}(M)$ d'affixe $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}}$.

1. a. Soit E le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$; on appelle E' son image par $\mathscr{F}$. Déterminer l'affixe de E' sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.
   b. On note $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_1$ par l'application $\mathscr{F}$.
2. a. Soit K le point d'affixe $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ et K' l'image de K par $\mathscr{F}$.
   Calculer l'affixe de K'.
   b. Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_2$ par l'application $\mathscr{F}$.
3. On désigne par R un point d'affixe $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta \in]-\pi\,;\pi[$. R appartient au cercle $\mathscr{C}_3$ de centre A et de rayon 1.
   a. Montrer que $z'+1 = \dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}$.
   En déduire que : $\left|z'+1\right| = \left|z'\right|$.
   b. Si on considère maintenant les points d'affixe $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta \in]-\pi\,;\pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du **a**.

Exercice 34 Asie, Juin 2005 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique 1 cm).
On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3+(-8+\mathrm{i})z^2+(17-8\mathrm{i})z+17\mathrm{i}=0.$$

I. Résolution de l'équation (E).

1. Montrer que $-\mathrm{i}$ est solution de (E).
2. Déterminer les nombres réels $a,\ b,\ c$ tels que :

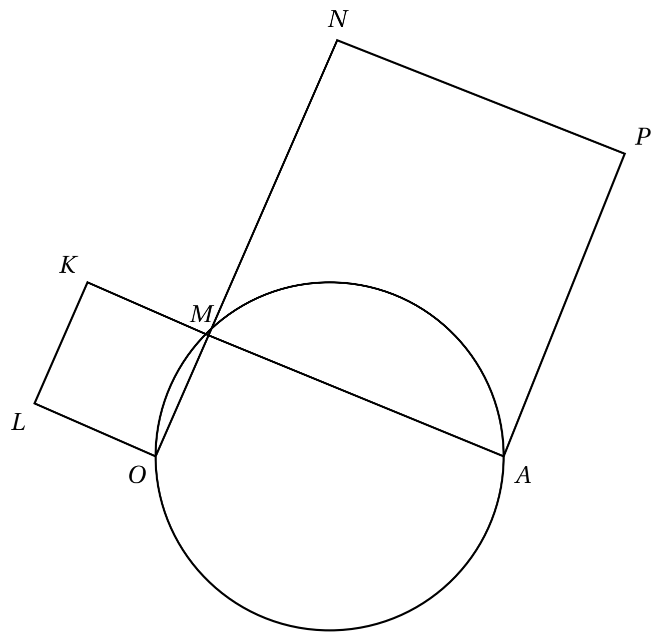
$$z^3+(-8+\mathrm{i})z^2+(17-8\mathrm{i})z+17\mathrm{i}=(z+\mathrm{i})\left(az^2+bz+c\right).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4+\mathrm{i}$, $4-\mathrm{i}$ et $-\mathrm{i}$.

1. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
2. Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de S.
3. Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer $\mathscr{C}$.
4. À tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{\mathrm{i}z+10-2\mathrm{i}}{z-2}$.
   a. Déterminer les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C.
   b. Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle $\mathscr{C}'$ de centre P, d'affixe i. Déterminer son rayon et tracer $\mathscr{C}'$.
   c. Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprimer $|z'-\mathrm{i}|$ en fonction de z.
   d. Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathscr{C}$. Démontrer que $|z'-\mathrm{i}| = 2\sqrt{5}$.
   e. En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 35 France, Juin 2005 (5 points)



Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[OA]$, un point M variable appartenant au cercle $\mathscr{C}$ et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct $MAPN$ et $MKLO$. La figure est représentée ci-dessus.

Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de montrer que le point N appartient à un cercle à déterminer.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$. On note k, l, m, n et p les affixes respectives des points K, L, M, N et P.

1. Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle $\mathscr{C}$, on a $\left|m - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$.
2. Établir les relations suivantes : $l = \mathrm{i}m$ et $p = -\mathrm{i}m + 1 + \mathrm{i}$. On admettra que l'on a également $n = (1-\mathrm{i})m + \mathrm{i}$ et $k = (1+\mathrm{i})m$.
3. a. Démontrer que le milieu Ω du segment $[PL]$ est un point indépendant de la position du point M sur le cercle $\mathscr{C}$.

   b. Démontrer que le point Ω appartient au cercle $\mathscr{C}$ et préciser sa position sur ce cercle.
4. a. Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.

   b. Quelle est la nature du triangle ΩNK ?
5. Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 36 Liban, Juin 2005 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$. Unité graphique : 0,5 cm.
On note j le nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6\mathrm{j}$ et $c = 8\mathrm{j}^2$.

Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

1. Placer les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné.
2. On appelle a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'.
   a. Calculer a'. On vérifiera que a' est un nombre réel.
   b. Montrer que $b' = 16\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   En déduire que O est un point de la droite (BB').
   c. On admet que $c' = 7 + 7\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.
3. On se propose désormais de montrer que la distance $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.
   a. Calculer la distance $OA + OB + OC$.
   b. Montrer que $\mathrm{j}^3 = 1$ et que $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.
   c. On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe.
   On rappelle que $a = 8$, $b = 6\mathrm{j}$ et $c = 8\mathrm{j}^2$.
   Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$\left|(a-z) + (b-z)\mathrm{j}^2 + (c-z)\mathrm{j}\right| = \left|a + b\mathrm{j}^2 + c\mathrm{j}\right| = 22.$$

   d. On admet que, quels que soient les nombres complexes z, z' et z'' :

$$\left|z + z' + z''\right| \leqslant |z| + \left|z'\right| + \left|z''\right|.$$

   Montrer que $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.

Exercice 37 Polynésie, Juin 2005 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Unité graphique : 2 cm.

1. On rappelle que, pour tous nombres complexes a et b :

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

   Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^3 = 8$.
2. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c définies par :

$$a = 2, \quad b = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad c = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

   On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   On pose $B' = r'(B)$ et $C' = r(C)$ et on note b' et c' les affixes respectives de B' et C'.
   a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
   Dans la suite de l'exercice, on complètera cette figure.
   b. Montrer que $b' = 2 + \sqrt{3} + 3\mathrm{i}$.
   c. Montrer que b' et c' sont des nombres conjugués.
3. On appelle M, N, P et Q les milieux respectifs des segments $[CB]$, $[BB']$, $[B'C']$ et $[C'C]$. On note m, n, p et q leurs affixes.
   a. Montrer que l'affixe n du point N est égale à $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)$.
   En déduire que les points O, N et C sont alignés.

b. Montrer que $n+1 = \mathrm{i}(q+1)$. Que peut-on en déduire pour le triangle MNQ ?
c. Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un carré.

Exercice 38 Inde, Avril 2005 (5 points)

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1-2\mathrm{i}$, par B le point d'affixe $-2+2\mathrm{i}$ et par $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$.
On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Déterminer le centre Ω du cercle $\mathscr{C}$ et calculer son rayon.
2. Soit D le point d'affixe $z_D = \dfrac{3+9\mathrm{i}}{4+2\mathrm{i}}$.
   Écrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle $\mathscr{C}$.
3. Sur le cercle $\mathscr{C}$, on considère le point E, d'affixe z_E, tel qu'une mesure en radians de $\left(\overrightarrow{\Omega I},\ \overrightarrow{\Omega E}\right)$ est $\dfrac{\pi}{4}$.
   a. Préciser le module et un argument de $z_E + \dfrac{1}{2}$.
   b. En déduire que $z_E = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}$.
4. Soit r l'application du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :
$$z' + \frac{1}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right).$$
   a. Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.
   b. Soit K le point d'affixe $z_K = 2$.
   Déterminer par le calcul l'image de K par r. Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

Exercice 39 Nouvelle – Calédonie, Mars 2005

L'exercice comporte 4 questions. Pour chaque question, on propose 3 affirmations. Pour chacune d'elles, le candidat doit indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.
Les réponses à cet exercice sont à inscrire dans le tableau ci-joint. Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.
Chaque réponse exacte rapporte 0,25 point.
Une bonification de 0,25 point est ajoutée chaque fois qu'une question est traitée correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 3 affirmations sont exactes). 2 réponses inexactes dans une même question entraînent le retrait de 0,25 point.
L'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point.
Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans l'exercice, le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

Q1	Pour tout n entier naturel non nul, pour tout réel θ, $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est égal à :	$e^{in\theta}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\cos\left(\theta^n\right)+i\sin\left(\theta^n\right)$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$	☐ Faux ☐ Vrai
Q2	La partie imaginaire du nombre complexe z est égale à :	$\dfrac{z+\overline{z}}{2}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\dfrac{z-\overline{z}}{2}$	☐ Faux ☐ Vrai
Q3	Soit z un nombre complexe tel que $z=x+iy$ (x et y réels). Si z est un imaginaire pur, alors $\lvert z\rvert^2$ est égal à :	y^2	☐ Faux ☐ Vrai
		$-y^2$	☐ Faux ☐ Vrai
		$-z^2$	☐ Faux ☐ Vrai
Q4	A, B et C sont des points d'affixes respectives a, b et c telles que $\dfrac{b-a}{c-a}=i\sqrt{3}$, alors :	$BC=2AC$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=CA^2$	☐ Faux ☐ Vrai

Exercice 40 Amérique du Sud, Novembre 2004

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Pour réaliser la figure, on prendra pour unité graphique 1 cm.
Soit P le point d'affixe p où $p=10$ et Γ le cercle de diamètre $[OP]$.
On désigne par Ω le centre de Γ.
Soit A, B, C les points d'affixes respectives a, b et c, où $a=5+5i$, $b=1+3i$ et $c=8-4i$.

1. Montrer que A, B et C sont des points du cercle Γ.
2. Soit D le point d'affixe $2+2i$.
   Montrer que D est le projeté orthogonal de O sur la droite (BC).

Partie B

À tout point M du plan différent de O, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z'=\frac{20}{\overline{z}}\quad \text{où } z \text{ désigne le nombre conjugué de } z.$$

1. Montrer que les points O, M et M' sont alignés.
2. Soit Δ la droite d'équation $x=2$ et M un point de Δ d'affixe z.
   On se propose de définir géométriquement le point M' associé au point M.
   a. Vérifier que $z+\overline{z}=4$.
   b. Exprimer $z'+\overline{z'}$ en fonction de z et $\overline{z}$ et en déduire que $5\left(z'+\overline{z'}\right)=z'\overline{z'}$.
   c. En déduire que M' appartient à l'intersection de la droite (OM) et du cercle Γ.
   Placer M' sur la figure.

Exercice 41 Nouvelle – Calédonie, Novembre 2004

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - 4z.$$

1. Soient A et B les points d'affixes $z_A = 1 - \mathrm{i}$ et $z_B = 3 + \mathrm{i}$.
   a. Calculer les affixes des points A' et B' images des points A et B par f.
   b. On suppose que deux points ont la même image par f. Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.
2. Soit I le point d'affixe -3.
   a. Démontrer que $OMIM'$ est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.
   b. Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.
3. a. Exprimer $(z'+4)$ en fonction de $(z-2)$. En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$ puis entre $\arg(z'+4)$ et $\arg(z-2)$.
   b. On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.
   Démontrer que tous les points M du cercle $(\mathscr{C})$ de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un même cercle que l'on déterminera.
   c. Soit E le point d'affixe $z_E = -4 - 3\mathrm{i}$.
   Donner la forme trigonométrique de (z_E+4) et à l'aide du **3.(a)** démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E.
   Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

Exercice 42 France, Septembre 2004

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique 1 cm).

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation suivante :
$$z^2 - 8\sqrt{3}\,z + 64 = 0.$$
2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes
$$a = 4\sqrt{3} - 4\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad b = 4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}.$$
   a. Écrire a et b sous forme exponentielle.
   b. Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.
3. On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.
   Déterminer l'affixe d du point D.
4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés $(O;-1)$, $(D;1)$, $(B;1)$.
   a. Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6\mathrm{i}$.
   b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.
   c. Montrer que les points C, D et G sont alignés.
   d. Démontrer que le quadrilatère $OBGD$ est un parallélogramme.
5. Quelle est la nature du triangle AGC ?

Exercice 43 Amérique du Nord, Juin 2004

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

1. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) \quad z^3+4z^2+2z-28=0.$$

   a. Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive :

$$(z-2)(z^2+az+b)=0.$$

   b. Résoudre (E).

2. On note (H) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant :

$$z^2-4=4-\overline{z}^2.$$

   a. On note x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z d'un point M.
   Montrer que M appartient à (H) si et seulement si $x^2-y^2=4$.

   b. Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2, $-3-\mathrm{i}\sqrt{5}$ et $-3+\mathrm{i}\sqrt{5}$. Vérifier que A, B et C appartiennent à (H).

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

   a. Déterminer les affixes de A', B' et C', images respectives de A, B et C par la rotation r (on donnera ces affixes sous la forme algébrique).

   b. On note M' l'image par r du point M d'affixe z. On note z' l'affixe de M'. Les parties réelle et imaginaire de z sont notées x et y, celles de z' sont notées x' et y'.
   On note (H') l'ensemble des points du plan dont l'antécédent par r est un point de (H).
   Exprimer x et y en fonction de x' et y'.
   En utilisant la question **2.a**, prouver que M' appartient à (H') si et seulement si $x'y'=-2$.

4. Faire une figure sur laquelle on placera les points A, B, C, A', B', C', la courbe (H'), puis la courbe (H).

Exercice 44 Antilles – Guyane, Juin 2004

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 *point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré* 0,5 *point par réponse fausse. On ne demande pas de justifier. La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à zéro.*

On pose $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. La forme algébrique de z^2 est :

   a. $2\sqrt{2}$. b. $2\sqrt{2}-2\mathrm{i}\sqrt{2}$. c. $2+\sqrt{2}+\mathrm{i}\left(2-\sqrt{2}\right)$. d. $2\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}$.

2. z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

   a. $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. b. $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. c. $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$. d. $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

3. z s'écrit sous forme exponentielle :

   a. $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}$. b. $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$. c. $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}}$. d. $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}$.

4. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

a. $\dfrac{7\pi}{8}$. b. $\dfrac{5\pi}{8}$. c. $\dfrac{3\pi}{8}$. d. $\dfrac{\pi}{8}$.

Exercice 45 Asie, Juin 2004

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, unité graphique 1 cm.
Soit A le point d'affixe 3i. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{3\text{i}z - 7}{z - 3\text{i}}.$$

1. Recherche des points invariants par f
   a. Développer $(z-7\text{i})(z+\text{i})$.
   b. Montrer que f admet deux points invariants B et C dont on précisera les affixes et qu'on placera sur un dessin.
2. On appelle Σ le cercle de diamètre $[BC]$. Soit M un point quelconque de Σ distinct de B et de C, soit M' son image par f.
   a. Justifier que l'affixe z de M vérifie $z = 3\text{i} + 4\text{e}^{\text{i}\theta}$ où θ est un nombre réel.
   b. Exprimer l'affixe z' de M' en fonction de θ et en déduire que M' appartient aussi à Σ.
   c. Démontrer que $z' = -\overline{z}$ et en déduire, en la justifiant, une construction géométrique de M'.
3. On considère un cercle de centre A, de rayon $r > 0$. Déterminer l'image de ce cercle par f.

Exercice 46 Centres étrangers, Juin 2004

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.
On appelle A le point d'affixe -2i.
À tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = -2\overline{z} + 2\text{i}$.

1. On considère le point B d'affixe $b = 3 - 2\text{i}$.
   Déterminer la forme algébrique des affixes a' et b' des points A' et B' associés respectivement aux points A et B. Placer ces points sur un dessin.
2. Montrer que si M appartient à la droite (Δ) d'équation $y = -2$ alors M' appartient aussi à (Δ).
3. Démontrer que pour tout point M d'affixe z, $\left|z' + 2\text{i}\right| = 2|z + 2\text{i}|$; interpréter géométriquement cette égalité.
4. Pour tout point M distinct de A on appelle θ un argument de $z + 2\text{i}$.
   a. Justifier que θ est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{AM}\right)$.
   b. Démontrer que $(z+2\text{i})(z'+2\text{i})$ est un réel négatif ou nul.
   c. En déduire un argument de $z' + 2\text{i}$ en fonction de θ.
   d. Que peut-on en déduire pour les demi-droites $[AM)$ et $[AM')$?
5. En utilisant les résultats précédents, proposer une construction géométrique du point M' associé au point M.

Exercice 47 France, Juin 2004

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $(1+\mathrm{i})^6 = -8\mathrm{i}$.
2. On considère l'équation (E) $z^2 = -8\mathrm{i}$.
   a. Déduire de **1.** une solution de l'équation (E).
   b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.
3. Déduire également de **1.** une solution de l'équation (E') $z^3 = -8\mathrm{i}$.
4. On considère le point A d'affixe 2i et la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
   a. Déterminer l'affixe b du point B, image de A par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r.
   b. Montrer que b et c sont solutions de (E').
5. a. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique 2 cm), représenter les points A, B et C.
   b. Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?
   c. Déterminer le centre de gravité de cette figure.

Exercice 48 La Réunion, Juin 2004

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$; i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Soient les points A, B et C d'affixes respectives i, $1+\mathrm{i}$ et $-1+\mathrm{i}$.
Soit f l'application qui, à tout point M du plan différent de A, d'affixe z, associe le point M' du plan d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}z+2}{z-\mathrm{i}}.$$

1. a. Déterminer les images de B et de C par l'application f.
   b. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, on a la relation :

$$(z'-\mathrm{i})(z-\mathrm{i}) = 1.$$

   c. Soit D le point d'affixe 1 + 2i. Placer les points A, B, C et D sur une figure (unité graphique 4 cm). Déduire de la question précédente une construction du point D', image du point D par l' application f.
2. Soit R un nombre réel strictement positif.
   Quelle est l'image par l'application f du cercle de centre A et de rayon R ?
3. a. Montrer que, si l'affixe du point M est un imaginaire pur différent de i, alors l'affixe du point M' est un imaginaire pur. Que signifie ce résultat pour l'image par l'application f de l'axe imaginaire privé du point A ?
   b. Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Déterminer l' image de la droite $\mathscr{D}$ privée du point A par l'application f.

Exercice 49 Liban, Juin 2004

Le plan complexe est rapporté au repère $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(z-2\mathrm{i})\left(z^2-2z+2\right)=0.$$

   Donner les solutions sous forme algébrique et sous forme exponentielle (justifier les réponses).

2. Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1+\mathrm{i}$ et $z_B = 2\mathrm{i}$.
   À tout complexe z différent de A on associe le complexe

$$z' = \frac{z-2\mathrm{i}}{z-1-\mathrm{i}}.$$

   a. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.
   Montrer que $B \in (E)$.
   Déterminer et construire l'ensemble (E).

   b. Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|z'\right| = 1$.
   Déterminer et construire (F).

3. Soit R la rotation de centre $\Omega\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\ ;\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   a. Calculer l'affixe du point B', image de B par R et l'affixe du point I', image par R du point $I\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

   b. Quelles sont les images de (E) et (F) par R ?

Exercice 50 Polynésie, Juin 2004

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. On désigne par A, B et I les points d'affixes respectives :

$$z_A = 3+2\mathrm{i},\quad z_B = -3\quad \text{et}\quad z_I = 1-2\mathrm{i}.$$

   a. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

   b. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z = \dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$.
   Que peut-on en déduire sur la nature du triangle IAB ?

   c. Calculer l'affixe z_C du point C image de I par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

   d. Soit D le barycentre du système $\{(A\,;1),\ (B\,;-1),\ (C\,;1)\}$; calculer l'affixe z_D du point D.

   e. Montrer que $ABCD$ est un carré.

2. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|.$$

3. On considère l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}.$$

   a. Montrer que B appartient à Γ_2.

   b. Déterminer et construire l'ensemble Γ_2.

Exercice 51 Inde, Avril 2004

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

Les solutions seront notées z' et z'', z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.
Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2. Donner la valeur exacte de $\left(z'\right)^{2004}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$; (unité graphique : 2 cm).

1. Montrer que les points A d'affixe $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et B d'affixe $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
Tracer ce cercle puis construire les points A et B.
2. On note O' l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et B' l'image du point B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Calculer les affixes des points O' et B' et construire ces points.
3. Soit I le milieu du segment $[OB]$.
   a. Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle $AO'B'$?
   b. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$.
   Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{O'B'}$ est égale à $3\sqrt{3} - \mathrm{i}$.
   c. La conjecture émise à la question **a** est-elle vraie ?

Exercice 52 Nouvelle – Calédonie, Mars 2004

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, on considère le quadrilatère $ABCD$ tel que :

$$\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\right) = \alpha \quad [2\pi],\ \left(\overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{CB}\right) = \beta \quad [2\pi],\ 0 < \alpha < \pi,\ 0 < \beta < \pi.$$

On construit les triangles équilatéraux DCP, DAQ, BAM et BCN tels que :

$$\left(\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DP}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad \left(\overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DQ}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi],$$

$$\left(\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BN}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi].$$

Soit a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D, m, n, p et q les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1. Démontrer les relations suivantes :

$$m = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a - b) + b, \qquad n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c - b) + b,$$

$$p = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c - d) + d, \qquad q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a - d) + d.$$

2. En utilisant les relations précédentes :

   a. Démontrer que $MNPQ$ est un parallélogrammme.

   b. Démontrer que l'on a :

$$\left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{QP}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad AC = QP,$$

$$\left(\overrightarrow{NP},\ \overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \quad \text{et} \quad NP = BD.$$

3. Démontrer que $MNPQ$ est un carré si, et seulement si, les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère $ABCD$ vérifient :

$$AC = BD \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

   où k est un entier relatif.

Exercice 53 Amérique du Sud, Novembre 2003

Le plan complexe est muni d'un repère orthonornial direct $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique 4 cm).
Soit I le point d'affixe 1. On note $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OI]$ et on nomme son centre Ω.

Partie A

On pose $a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{i}$ et on note A_0 son image.

1. Montrer que le point A_0 appartient au cercle $\mathscr{C}$.
2. Soit B le point d'affixe b, avec $b = -1 + 2\text{i}$, et B' le point d'affixe b' telle que $b' = a_0 b$.

   a. Calculer b'.

   b. Démontrer que le triangle OBB' est rectangle en B'.

Partie B

Soit a un nombre complexe non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe.
À tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az$.

1. On se propose de déterminer l'ensemble des points A tels que le triangle OMM' soit rectangle en M'.

   a. Interpréter géométriquement $\arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right)$.

   b. Montrer que $\left(\overrightarrow{M'O},\ \overrightarrow{M'M}\right) = \arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right) + 2k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$).

   c. En déduire que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle $\mathscr{C}$ privé de O et de I.

2. Dans cette question, M est un point de l'axe des abscisses, différent de O.
   On note x son affixe.
   On choisit a de manière que A soit un point de $\mathscr{C}$ différent de I et de O.
   Montrer que le point M' appartient à la droite (OA).
   En déduire que M' est le projeté orthogonal de M sur cette droite.

Exercice 54 France, Septembre 2003

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A et Ω d'affixes respectives :

$$a = -1 + \sqrt{3} + \text{i} \qquad \text{et} \qquad \omega = -1 + 2\text{i}.$$

On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$.

1. Placer sur une figure les points A et Ω, l'image B du point A par r, l'image C du point B par r et l'image D du point A par h.
2. On note b, c et d les affixes respectives des points B, C et D.

Le tableau ci-dessous contient une suite de 18 affirmations, dont chacune débute dans la première colonne et s'achève sur la même ligne colonne 2, colonne 3 ou colonne 4.

1.	$\lvert a-\omega\rvert =$	2	4	$\sqrt{3}-\text{i}$
2.	$\arg(a-\omega) =$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{47\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$

3.	$\left(\vec{v}, \overrightarrow{\Omega C}\right) =$	$\arg[(\omega-c)\text{i}]$	$-\left(\vec{v}, \overrightarrow{C\Omega}\right)$	$\frac{2\pi}{3}$
4.	$\omega =$	$\frac{1}{3}(a+b+c)$	$a+b+c$	$b-2\text{i}$

5.	$\frac{b-d}{a-d} =$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}\text{i}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}\text{i}$
6.	Le point D est	L'image de Ω par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega}$	L'image de Ω par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$	L'image de Ω par la la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{6}$

Le candidat doit se prononcer sur chacune de ces affirmations. Pour cela, il doit remplir le tableau ci-dessous, en faisant figurer dans chacune des cases la mention VRAI ou FAUX (en toutes lettres).

1.			
2.			

3.			
4.			

5.			
6.			

Exercice 55 Amérique du Nord, Juin 2003

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + \text{i}\sqrt{3}, \quad z_B = -1 - \text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_C = 2.$$

1. Placer ces points sur un dessin.

2. a. Vérifier que $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   b. En déduire la nature du triangle ABC.
   c. Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC.
   Tracer le cercle Γ_1.
3. a. Établir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient $2(z+\overline{z}) + z\overline{z} = 0$ est un cercle de centre Ω d'affixe -2. Préciser son rayon. Construire Γ_2.
   b. Vérifier que les points A et B sont éléments de Γ_2.
4. On appelle r_1 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
   a. Quelles sont les images des points A et B par la rotation r_1 ? Construire l'image C_1 du point C par la rotation r_1 puis calculer son affixe.
   b. Déterminer l'image du cercle Γ_2 par la rotation r_1.
5. Soit r une rotation. Pour tout point M d'affixe z, on note M' l'image de M par r et z' l'affixe de M'.
   On posera $z' = az + b$, avec a et b des nombres complexes vérifiant $|a| = 1$ et $a \neq 1$.
   On suppose que r transforme le cercle Γ_2 en le cercle Γ_1.
   a. Quelle est l'image du point Ω par r ? En déduire une relation entre a et b.
   b. Déterminer en fonction de a l'affixe du point $r(C)$, image du point C par la rotation r ; en déduire que le point $r(C)$ appartient à un cercle fixe que l'on définira. Vérifier que ce cercle passe par C_1.

Exercice 56 Antilles – Guyane, Juin 2003

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\, \overrightarrow{u},\, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm). On considère les points A et B d'affixes respectives $A(3+2\mathrm{i})$ et $B(-1+4\mathrm{i})$. Extérieurement au triangle OAB, on construit les deux carrés OA_1A_2A et OBB_1B_2.

1. a. En remarquant que A_2 est l'image de O par une rotation de centre A, déterminer l'affixe de A_2. En déduire l'affixe du centre I du carré OA_1A_2A.
   b. En remarquant que B_1 est l'image de O par une rotation de centre B, déterminer l'affixe de B_1. En déduire l'affixe du centre J du carré OBB_1B_2.
2. Calculer l'affixe du milieu K du segment $[AB]$. À l'aide des affixes des différents points, calculer les longueurs KI et KJ, ainsi qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{KI},\, \overrightarrow{KJ}\right)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 57 Asie, Juin 2003

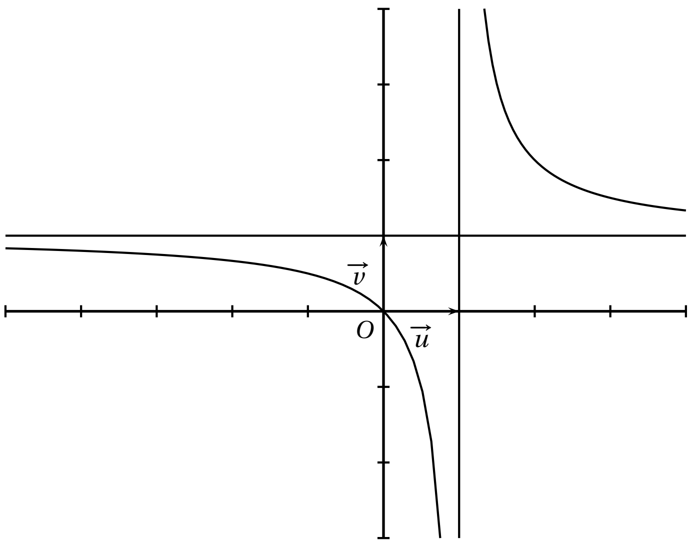
Γ est le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.
Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\, \overrightarrow{u},\, \overrightarrow{v}\right)$.

1. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - 2(1+\mathrm{i})z.$$

   On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, où x, y, x' et y' sont des nombres réels.
   a. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
   b. Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des points M tels que z' soit un nombre réel. Montrer que $\mathscr{H}$ est la représentation graphique d'une fonction h que l'on déterminera (l'étude de la fonction h n'est pas demandée). $\mathscr{H}$ est tracée sur le graphique ci-dessous.

2. Montrer que le point A d'affixe $a = 2(1 + \mathrm{i})$ appartient à Γ et à $\mathscr{H}$.
3. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. On note B et C les points tels que $R(A) = B$ et $R(C) = A$.
   a. Montrer que $R(B) = C$ et que les triangles OAB, OBC et OCA sont isométriques.
   b. Quelle est la nature du triangle ABC ?
   c. Montrer que B et C appartiennent à Γ et à $\mathscr{H}$.
   d. Tracer Γ et placer A, B et C sur le graphique ci-dessous.



Exercice 58 France, Juin 2003

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(O;\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 2, \quad b = 1 - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad c = 1 + \mathrm{i}.$$

1. a. Placer les points A, B et C sur une figure.
   b. Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.
2. a. On appelle r la rotation de centre A telle que $r(B) = C$.
   Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point $D = r(C)$.
   b. Soit Γ le cercle de diamètre $[BC]$.
   Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.
3. Soit M un point de Γ d'affixe z, distinct de C et M' d'affixe z' son image par r.
   a. Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left[0\,;\, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\, 2\pi\right[$ tel que $z = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
   b. Exprimer z' en fonction de θ.
   c. Montrer que $\dfrac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.
   d. Placer sur la figure le point M d'affixe $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et construire son image M' par r.

Exercice 59 Liban, Juin 2003

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

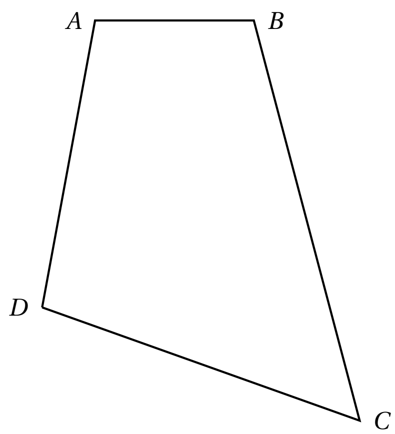
$$4z^2 - 12z + 153 = 0.$$

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives $z_A = \frac{3}{2} + 6\text{i}$, $z_B = \frac{3}{2} - 6\text{i}$; $z_C = -3 - \frac{1}{4}\text{i}$, $z_P = 3 + 2\text{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $z_{\overrightarrow{w}} = -1 + \frac{5}{2}\text{i}$.
   a. Déterminer l'affixe z_Q du point Q, image du point B dans la translation t de vecteur $\overrightarrow{w}$.
   b. Déterminer l'affixe z_R du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.
   c. Déterminer l'affixe z_S du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   Placer les points P, Q, R et S.
3. a. Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.
   b. Calculer $\dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$.
   En déduire la nature précise du parallélogramme $PQRS$.
   c. Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté $\mathscr{C}$. On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon ρ.
4. La droite (AP) est-elle tangente au cercle $\mathscr{C}$?

Exercice 60 Polynésie, Juin 2003

Dans tout l'exercice, le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
Les constructions seront faites sur papier millimétré.

1. a. Le point E a pour affixe $z_E = 3 + \text{i}$ et le point F a pour affixe $z_F = 1 + 3\text{i}$.
   Placer dans $\mathscr{P}$ les points E et F.
   b. Construire le point H tel que EHF soit un triangle rectangle isocèle direct de sommet H, c'est-à-dire tel que $\left(\overrightarrow{HF},\ \overrightarrow{HE}\right) = \frac{\pi}{2}\quad [2\pi]$.
   c. On désigne par z_H l'affixe de H.
   Montrer que $\left|\dfrac{3 + \text{i} - z_H}{1 + 3\text{i} - z_H}\right| = 1$ et que $\arg\left(\dfrac{3 + \text{i} - z_H}{1 + 3\text{i} - z_H}\right) = \dfrac{\pi}{2}\quad [2\pi]$.
   En déduire que $z_H = 3 + 3\text{i}$.
2. A, B, C et D sont quatre points du plan $\mathscr{P}$.



a. Construire les triangles rectangles isocèles directs BIA, AJD, DKC et CLB d'angles droits respectifs $\widehat{BIA}$, $\widehat{AJD}$, $\widehat{DKC}$ et $\widehat{CLB}$.

b. Conjecturer la position relative des droites (IK) et (LJ) et le rapport des longueurs des segments $[IK]$ et $[LJ]$.

3. a. On désigne par a, b et z_I les affixes respectives des points A, B et I.
Montrer que $\left|\dfrac{b-z_I}{a-z_I}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{b-z_I}{a-z_I}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
En déduire que $z_I = \dfrac{\mathrm{i}a-b}{\mathrm{i}-1}$.

b. Avec les points B, C et L d'affixes respectives b, c et z_L, exprimer sans démonstration z_L en fonction de b et c.

c. Avec les points C, D et K d'affixes respectives c, d et z_K, exprimer de même z_K en fonction de c et d.
Avec les points D, A et J d'affixes respectives d, a et z_J exprimer de même z_J en fonction de a et d.

d. Montrer que $z_L - z_J = \mathrm{i}(z_K - z_I)$. En déduire que les droites (JL) et (KI) sont perpendiculaires et que $JL = KI$.

Exercice 61 Inde, Avril 2003

Première partie

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :

$$(E) \quad z^3 + 2z^2 - 16 = 0.$$

1. Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme :

$$(z-2)(az^2 + bz + c) = 0$$

où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

2. En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. Placer les points A, B et D d'affixes respectives :

$$z_A = -2-2\mathrm{i},\ z_B = 2 \quad \text{et} \quad z_D = -2+2\mathrm{i}.$$

2. Calculer l'affixe z_C du point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer C.

3. Soit E l'image du point C par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et F l'image du point C par la rotation de centre D et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   a. Calculer les affixes des points E et F, notées z_E et z_F.

   b. Placer les points E et F.

4. a. Vérifier que $\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \mathrm{i}$.

   b. En déduire la nature du triangle AEF.

5. Soit I le milieu de $[EF]$.

   Déterminer l'image du triangle EBA par la rotation de centre I et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 62 Amérique du Sud, Novembre 2002 (5 points)

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, on appelle A et B les points d'affixes respectives 2 et -2. À tout point M d'affixe z, z différent de 2, on associe le point N d'affixe $\overline{z}$ et M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{2z-4}{\overline{z}-2}.$$

1. Calculer z' et $|z'|$ lorsque $z=5$ puis lorsque $z=1+\text{i}$.
2. a. Interpréter géométriquement $|z-2|$ et $|\overline{z}-2|$.
   b. Montrer que, pour tout z distinct de 2, $|z'|=2$. En déduire une information sur la position de M'.
3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z ($z \neq 2$) tels que $M'=B$.
4. On note $z_{\overrightarrow{AM}}$ et $z_{\overrightarrow{BM'}}$, les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$.

   Montrer que, pour tout point M distinct de A et n'appartenant pas à $\mathscr{E}$, le quotient $\dfrac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM'}}}$ est un nombre réel.

   Interpréter géométriquement ce résultat.
5. Un point M distinct de A, n'appartenant pas à $\mathscr{E}$, étant donné, proposer une méthode géométrique pour construire le point M'. On illustrera par une figure.

Exercice 63 Nouvelle - Calédonie, Novembre 2002 (5 points)

1. On considère le polynôme P de la variable complexe z, défini par :

   $$P(z) = z^3 + (14-\text{i}\sqrt{2})z^2 + \left(74-14\text{i}\sqrt{2}\right)z - 74\text{i}\sqrt{2}.$$

   a. Déterminer le nombre réel y tel que iy soit solution de l'équation $P(z)=0$.
   b. Trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait :

   $$P(z) = (z-\text{i}\sqrt{2})(z^2+az+b).$$

   c. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. On prendra 1 cm pour unité graphique.
   a. Placer les points A, B et I d'affixes respectives $z_A=-7+5\text{i}$, $z_B=-7-5\text{i}$ et $z_I=\text{i}\sqrt{2}$.
   b. Déterminer l'affixe de l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.
   c. Placer le point C d'affixe $z_C=1+\text{i}$. Déterminer l'affixe du point N tel que $ABCN$ soit un parallélogramme.
   d. Placer le point D d'affixe $z_D=1+11\text{i}$. Calculer $Z=\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_B}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
   Justifier que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires et en déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 64 Antilles - Guyane, Septembre 2002

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 5 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = 1+\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_B = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.
2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $\mathscr{C}$ d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $\alpha \in [0\,;\,2\pi[$.
   On considère l'application f qui, à tout point M de $\mathscr{C}$, associe $f(M) = MA \times MB$.
   a. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante :
   $$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sin\alpha.$$
   b. Montrer l'égalité suivante : $f(M) = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right|$.
   c. En déduire l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}$.
3. a. En utilisant **2.c**, montrer qu'il existe deux points M de $\mathscr{C}$, dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donner cette valeur minimale.
   b. En utilisant **2.c**, montrer qu'il existe un seul point M de $\mathscr{C}$, dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donner cette valeur maximale.

Exercice 65 France, Septembre 2002 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm.
On note A et B les points d'affixes respectives 1 et i. À tout point M, distinct de A et d'affixe z, est associé le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1}.$$

1. a. Calculer l'affixe du point C' associé au point C d'affixe $-\mathrm{i}$.
   b. Placer les points A, B et C.
2. Soit $z = x+\mathrm{i}y$ où x et y désignent deux nombres réels.
   a. Montrer l'égalité :
   $$z' = \frac{(x-1)^2+(y-1)^2-1}{(x-1)^2+y^2} - \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}\mathrm{i}.$$
   b. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z telle que z' soit réel.
   c. Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M d'affixe z telle que $\mathrm{Re}(z')$ soit négatif ou nul.
3. a. Écrire le nombre complexe $1-\mathrm{i}$ sous forme trigonométrique.
   b. Soit M un point d'affixe z, distinct de A et de B. Montrer que : $\frac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1} \in \mathbb{R}^*$ si, et seulement s'il existe un entier k tel que $\left(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{4}+k\pi$.
   c. En déduire l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{4}+k\pi$.

d. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Exercice 66 Polynésie, Septembre 2002 (5 points)

Partie A

1. z_1 et z_2 sont des nombres complexes, résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} z_1\sqrt{3} - z_2 = -2 \\ z_1 - z_2\sqrt{3} = -2\mathrm{i} \end{cases}.$$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct de centre O, d'unité graphique 4 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = -\sqrt{3} + \mathrm{i}, \quad z_B = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Donner les écritures de z_A et z_B sous forme exponentielle.
Placer les points A et B.

3. Calculer module et argument de $\dfrac{z_A}{z_B}$.
En déduire la nature du triangle ABO et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}\right)$.

4. Déterminer l'affixe du point C tel que $ACBO$ soit un losange. Placer C. Calculer l'aire du triangle ABC en cm^2.

Partie B

Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}z.$$

1. Définir cette transformation et donner ses éléments caractéristiques.
2. Quelles sont, sous forme exponentielle, les affixes de A', B', et C', images par f de A, B et C ?
3. Quelle est l'aire du triangle $A'B'C'$ en cm^2 ?

Exercice 67 Amérique du Nord, Juin 2002 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère l'application f du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1+\mathrm{i})z + 2.$$

1. Soit A le point d'affixe $-2+2\mathrm{i}$.
Déterminer les affixes des points A' et B vérifiant respectivement $A' = f(A)$ et $f(B) = A$.
2. Méthode de construction de l'image de M
   a. Montrer qu'il existe un point confondu avec son image. On notera Ω ce point et ω son affixe.

b. Établir que, pour tout complexe z distinct de ω, $\dfrac{z'-z}{\omega-z}=-\mathrm{i}$.

Soit M un point distinct de Ω.

Comparer MM' et $M\Omega$ et déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}\,;\overrightarrow{MM'})$. En déduire une méthode de construction de M' à partir de M.

3. Étude de l'image d'un ensemble de points

a. Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble Γ, des points du plan dont l'affixe z vérifie $|z+2-2\mathrm{i}|=\sqrt{2}$.

Vérifier que B est un point de Γ.

b. Démontrer que, pour tout z élément de $\mathbb{C}$:

$$z'+2=(1+\mathrm{i})(z+2-2\mathrm{i}).$$

Démontrer que l'image par f de tout point de Γ appartient au cercle Γ' de centre A' et de rayon 2.

Placer O, A, B, A', Γ et Γ' sur une même figure.

Exercice 68 Antilles - Guyane, Juin 2002 (5 points)

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O\,;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique 2 cm).
On considère les points I et A d'affixe respectives 1 et -2. Le point K est le milieu du segment $[IA]$.
On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[IA]$.
Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.

1. Soit B le point d'affixe $b=\dfrac{1+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$. Écrire b sous forme algébrique et montrer que B appartient au cercle $\mathscr{C}$.
2. Soit D le point du cercle $\mathscr{C}$ tel que l'angle $\left(\overrightarrow{KI}\,;\overrightarrow{KD}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$, où k est un entier relatif, et soit d l'affixe de D.

   a. Quel est le module de $d+\dfrac{1}{2}$? Donner un argument de $d+\dfrac{1}{2}$.

   b. En déduire que $d=\dfrac{1}{4}+3\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

   c. Déterminer un réel a vérifiant l'égalité $\dfrac{1+2\mathrm{i}a}{1-\mathrm{i}a}=\dfrac{1}{4}+3\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
3. Soit x un réel non nul et M le point d'affixe $m=\dfrac{1+2\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}$. On pose $Z=\dfrac{m-1}{m+2}$. Calculer Z et en déduire la nature du triangle AIM.
4. Soit N un point, différent de A, du cercle $\mathscr{C}$ et n son affixe.

   Démontrer qu'il existe un réel y tel que $n=\dfrac{1+2\mathrm{i}y}{1-\mathrm{i}y}$.

Exercice 69 Asie, Juin 2002 (5 points)

1. Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(O\,;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$, on considère les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives 3, 4i, $-2+3\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$.

   a. Placer les points A, B, C et D dans le plan.

   b. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier votre réponse.

2. On considère dans l'ensemble des complexes les équations :

$$z^2-(1+3\mathrm{i})z-6+9\mathrm{i}=0 \ (1) \quad \text{et} \quad z^2-(1+3\mathrm{i})z+4+4\mathrm{i}=0 \ (2).$$

   a. Montrer que l'équation (1) admet une solution réelle z_1 et l'équation (2) une solution imaginaire pure z_2.
   b. Développer $(z-3)(z+2-3\mathrm{i})$, puis $(z-4\mathrm{i})(z-1+\mathrm{i})$.
   c. En déduire les solutions de l'équation :

$$\left(z^2-(1+3\mathrm{i})z-6+9\mathrm{i}\right)\left(z^2-(1+3\mathrm{i})z+4+4\mathrm{i}\right)=0.$$

   d. Soit z_0 la solution dont la partie imaginaire est strictement négative. Donner la forme trigonométrique de z_0.
   e. Déterminer les entiers naturels n tels que les points M_n d'affixes z_0^n soient sur la droite d'équation $y=x$.
3. On appelle f l'application qui, au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z'=z^2-(1+3\mathrm{i})z-6+9\mathrm{i}.$$

   a. On pose $z=x+\mathrm{i}y$ et $z'=x'+\mathrm{i}y'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
   b. Déterminer une équation de l'ensemble $\mathscr{H}$ des points M pour lesquels $f(M)$ appartient à l'axe des ordonnées.

Exercice 70 Centres étrangers, Juin 2002 (5 points)

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Soit A le point d'affixe $z_A=\dfrac{\mathrm{i}}{2}$.
$\mathscr{T}$ est l'application qui, à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$2zz'=\mathrm{i}(z+z').$$

1. On appelle I et J les points d'affixes respectives : $z_I=1$, $z_J=\mathrm{i}$. Soit K le milieu du segment $[IJ]$.
   a. Déterminer l'affixe z_K de K.
   b. Déterminer les affixes des images des points I, J, K par l'application $\mathscr{T}$.
   c. En déduire que $\mathscr{T}$ ne conserve pas les milieux.
2. Déterminer les points invariants par $\mathscr{T}$.
3. Montrer que $M'=\mathscr{T}(M)$ si, et seulement si, $\left(z'-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)\left(z-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$.
4. En déduire l'image par $\mathscr{T}$ du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1.

Exercice 71 France, Juin 2002 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.
   On pose $a=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $b=\sqrt{3}-\mathrm{i}$. Écrire a et b sous forme exponentielle et placer les points A et B d'affixes respectives a et b.

2. a. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

   Calculer l'affixe a' du point A' image du point A par r. Écrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente.

   b. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$.

   Calculer l'affixe b' du point B' image du point B par h. Placer B' sur la figure précédente.

3. Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle $OA'B'$ et R le rayon de ce cercle. On désigne par c l'affixe du point C.

   a. Justifier les égalités suivantes :

$$c\overline{c} = R^2 \ ; \quad (c-2\text{i})\left(\overline{c}+2\text{i}\right) = R^2 \ ; \quad \left(c+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\text{i}\right)\left(\overline{c}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\text{i}\right) = R^2.$$

   b. En déduire que $c - \overline{c} = 2\text{i}$ puis que $c + \overline{c} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

   c. En déduire l'affixe du point C et la valeur de R.

Exercice 72 La Réunion, Juin 2002 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).
On considère l'application f du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe :

$$z' = z^3 - 3z^2 + 3z.$$

1. On considère les points B et C d'affixes respectives i et i$\sqrt{3}$.

   Calculer les affixes des points images de O, B et C par f. Placer les points B, C et leurs images B' et C' sur une figure. L'application f conserve-t-elle l'alignement ?

2. Montrer qu'un point M d'affixe z est invariant par f si, et seulement si, z vérifie l'équation :

$$z^3 - 3z^2 + 2z = 0.$$

   En déduire que f possède trois points invariants, dont on déterminera les affixes.

3. a. Montrer pour tout z de $\mathbb{C}$ l'égalité suivante :

$$z' - 1 = (z-1)^3.$$

   b. Soit z un nombre complexe différent de 1, on note r le module de $z-1$ et α un argument de $z-1$. Exprimer le module r' et un argument α' de $z'-1$ en fonction de r et de α.

   Soit A le point d'affixe 1, déduire des résultats précédents une relation entre la distance AM' et la distance AM, et une relation entre une mesure de l'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AM'}\right)$ et une mesure de l'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AM}\right)$.

   c. Montrer que si M appartient au cercle Γ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$, alors M' appartient à un cercle Γ' de même centre dont on déterminera le rayon.

4. Montrer que si M appartient à la demi-droite ouverte $\mathscr{D}$ d'origine A passant par le point B, alors M' appartient à une demi-droite $\mathscr{D}'$ que l'on déterminera.

   Justifier l'appartenance du point B' à Γ' et à $\mathscr{D}'$.

   Compléter la figure avec les différents éléments : Γ, Γ', $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Exercice 73 Polynésie, Juin 2002 (5 points)

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 2cm, on considère les points M d'affixe z, M_1 d'affixe $\overline{z}$, A d'affixe 2 et B d'affixe 1.
Soit f l'application de $\mathscr{P}$ privé de A dans $\mathscr{P}$, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{\overline{z}+4}{\overline{z}-2}.$$

1. Déterminer les points invariants par f.
2. Soit C le point d'affixe $2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$.
   Montrer que C' est le milieu du segment $[OC]$.
3. a. Calculer pour tout $z \neq 2$, le produit $\left(\overline{z}-2\right)\left(z'-1\right)$.
   b. En déduire :
      – la valeur de $AM_1 \cdot BM'$;
      – une expression de $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{BM'}\right)$ en fonction de $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM_1}\right)$.
   c. Justifier les relations :

$$\begin{array}{ll} (1) & AM \cdot BM' = 6 \\ (2) & \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{BM'}\right) = \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}\right). \end{array}$$

   d. Application : construire l'image D' du point D d'affixe $2+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Exercice 74 Inde, Juin 2002

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique 2 cm. On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$, et par $(\mathscr{C})$ le cercle de centre A et de rayon 1.

Partie A

Soit F le point d'affixe 2, B le point d'affixe $z_B = 1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et E le point d'affixe $(1+z_B^2)$.

1. a. Montrer que le point B appartient au cercle $(\mathscr{C})$.
   b. Déterminer une mesure en radians de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{AF}\,;\,\overrightarrow{AB}\right)$. Placer le point B.
2. a. Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $(z_B - z_A)$ et $(z_E - z_A)$.
   b. En déduire que les points A, B et E sont alignés.
3. Placer le point E.

Partie B

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' où $z' = 1+z^2$.

1. Pour $z \neq 0$ et $z \neq 1$, donner, à l'aide des points A, M et M', une interprétation géométrique d'un argument du nombre complexe $\dfrac{z'-1}{z-1}$.
2. En déduire que A, M et M' sont alignés si et seulement si $\dfrac{z^2}{z-1}$ est un réel.

Exercice 75 Antilles, Septembre 2001

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$z^2+8z\sqrt{3}+64=0.$$

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a=-4\sqrt{3}-4\text{i}$ et $b=-4\sqrt{3}+4\text{i}$.
   Calculer les distances OA, OB et AB.
   En déduire la nature du triangle OAB.
3. On désigne par C le point d'affixe $c=\sqrt{3}+\text{i}$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
   Déterminer l'affixe d du point D.
4. On appelle G le barycentre des points pondérés $(O\,;\,-1)$, $(D\,;\,1)$ et $(B\,;\,1)$.
   a. Montrer que le point G a pour affixe $g=-4\sqrt{3}+6\text{i}$.
   b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure. (Unité graphique : 1 cm).
   c. Démontrer que le quadrilatère $OBGD$ est un parallélogramme.
5. a. Justifier l'égalité $\dfrac{c-g}{a-g}=\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   b. En déduire une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GC}\right)$, ainsi que la valeur du rapport $\dfrac{GC}{GA}$.
   Que peut-on en déduire concernant la nature du triangle AGC ?

Exercice 76 France, Septembre 2001

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ direct.
Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe $-\text{i}$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}\setminus\{\text{i}\}$ par :

$$f(z)=\frac{1-\text{i}z}{z-\text{i}}.$$

1. Vérifier que pour tout z de $\mathbb{C}\setminus\{\text{i}\}$

$$f(z)=-\text{i}+\frac{2}{z-\text{i}}.$$

2. a. Démontrer que $-\text{i}$ n'a pas d'antécédent par f.
   b. Déterminer les antécédents de 0 et de i par f.
3. À tout point M différent de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=f(z)$.
   a. Démontrer que pour tout point M différent de A, le produit des longueurs AM et BM' est égal à 2 $(AM\cdot BM'=2)$.
   b. Démontrer que lorsque M décrit le cercle C de centre A et de rayon 4, M' se déplace sur un cercle C' dont on précisera le centre et le rayon.
4. a. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M(z)$ tels que $z-\text{i}$ soit un nombre réel non nul.
   b. Démontrer que lorsque M décrit $\mathscr{E}$, M' se déplace sur une droite Δ que l'on précisera.
   c. Lorsque M décrit $\mathscr{E}$, M' décrit-il toute la droite Δ ?
5. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur non nul.

Exercice 77 Polynésie, Septembre 2001

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$, unité graphique 4 cm, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives

$$z_A = 2\mathrm{i}, \quad z_B = \mathrm{i}, \quad z_C = -1+\mathrm{i}, \quad z_D = 1+\mathrm{i}.$$

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit la fonction f de $\mathscr{P}$ - {B} dans $\mathscr{P}$ qui au point M d'affixe z associie le point M' d'affixe z' où

$$z' = \mathrm{i}\frac{z-2\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}.$$

   a. Développer $(z+1-\mathrm{i})(z-1-\mathrm{i})$.

   b. Chercher les points M vérifiant $f(M) = M$ et exprimer leurs affixes sous forme algébrique puis trigonométrique.

2. a. Montrer que, pour tout z différent de i,

$$|z'| = \frac{AM}{BM},$$

   et que, pour tout z différent de i et de 2i,

$$\arg(z') = \left(\overrightarrow{BM},\, \overrightarrow{AM}\right) + \frac{\pi}{2} \quad (\text{modulo} 2\pi).$$

   b. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

   c. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{F})$ des points M d'affixe z tels que $\arg(z') = \frac{\pi}{2} \quad (\text{modulo} \quad 2\pi)$.

3. a. Démontrer que $z' - \mathrm{i} = \dfrac{1}{z-\mathrm{i}}$ et en déduire que $|z'-\mathrm{i}| \times |z-\mathrm{i}| = 1$, pour tout complexe z différent de i.

   b. Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon $\dfrac{1}{2}$. Prouver que le point M' d'affixe z' appartient à un cercle de centre B et de rayon à déterminer.

Exercice 78 Amérique du Nord, Juin 2001

On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

1. Calculer $P(\mathrm{i}\sqrt{3})$ et $P(-\,\mathrm{i}\sqrt{3})$ puis montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait $P(z) = (z^2+3)Q(z)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $\left(O;\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$, les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_B = -\,\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_C = 3+2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z_C}$, puis montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.
4. On note E le symétrique de D par rapport à O. Montrer que $\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \mathrm{e}^{\frac{-\,\mathrm{i}\pi}{3}}$ puis déterminer la nature du triangle BEC.

Exercice 79 Antilles, Juin 2001

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$, on désigne par $M(z)$ le point M ayant pour affixe z.

1. Placer sur une figure les points $A\ (2+\mathrm{i})$, $B\ (2\mathrm{i})$, $C\ (-4+3\mathrm{i})$ et $D\ (-8)$, en prenant 1 cm pour unité graphique.
2. Soit f la transformation du plan qui, à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = (1+2\mathrm{i})z - 4 - 2\mathrm{i}.$$

   a. Préciser les images des points A et B par f.

   b. Montrer que f admet un unique point fixe Ω, dont on précisera l'affixe ω (M est un point fixe pour f si, et seulement si, $f(M) = M$).
3. On admet que $\omega = 1-2\mathrm{i}$. Soit M un point quelconque et M' son image par f.

   a. Montrer que, pour tout complexe z on a : $z' - z = 2\mathrm{i}(w - z)$. Dans toute la suite, M est différent de Ω.

   b. Déduire de la question précédente le rapport des distances $\dfrac{MM'}{\Omega M}$, et l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'})$.

   c. Déduire des questions précédentes une construction géométrique du point M', connaissant le point M. Réaliser cette construction sur la figure de la question **1)**

Exercice 80 Asie, Mars 2001

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z ($z \neq -1$) associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}z - 2}{z+1}.$$

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = -1$, $b = 2\mathrm{i}$ et $c = \mathrm{i}$.

1. Soit C' l'image du point C par f. Donner l'affixe c' du point C' sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
2. Calculer l'affixe d du point D ayant pour image par f le point D' d'affixe $d' = \dfrac{1}{2}$.
3. Pour tout nombre complexe z différent de -1, on note p le module de $z+1$ (c'est-à-dire $|z+1| = p$) et p' le module de $z' + \mathrm{i}$ (c'est-à-dire $|z' + \mathrm{i}| = p'$).

   a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, on a : $pp' = \sqrt{5}$.

   b. Si le point M appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon 2, montrer qu'alors $M' = f(M)$ appartient à un cercle (Γ'), dont on précisera le centre et le rayon.
4. Pour tout nombre complexe z différent de -1, on considère le nombre complexe $\omega = \dfrac{z - 2\mathrm{i}}{z+1}$.

   a. Interpréter géométriquement l'argument du nombre complexe ω.

   b. Montrer que $z' = -\mathrm{i}\omega$.

   c. Déterminer l'ensemble $(\mathscr{F})$ des points M d'affixe z telle que z' soit un réel non nul.

   d. Vérifier que le point D appartient aux ensembles (Γ) et $(\mathscr{F})$.
5. Représenter les ensembles (Γ), $(\mathscr{F})$ et (Γ') en prenant 4 cm pour unité graphique.

Exercice 81 France, Juin 2001

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ [unité graphique : 6 cm].

On considère la suite (α_n) de nombres réels définie par $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \dfrac{5\pi}{6}$.
Pour tout entier naturel n, on appelle M_n le point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 tel que l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_n}\right)$ ait pour mesure α_n.

1. Placer les douze points $M_0,\ M_1,\ M_2, \cdots, M_{11}$.
2. On appelle z_n l'affixe de M_n. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{12}\right)}$.
3. a. Montrer, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :
      - les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés ;
      - les points M_n et M_{n+12} sont confondus.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_{n+4} = \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} z_n$.
   En déduire que la distance M_nM_{n+4} vaut $\sqrt{3}$ puis que le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$, est équilatéral.
   On admettra que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points M_n sont de la forme $M_nM_{n+4}M_{n+8}$.
4. Douze cartons indiscernables au toucher, marqués $M_0,\ M_1,\ M_2, \cdots,\ M_{11}$ sont disposés dans une urne. On tire au hasard et simultanément trois cartons de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir les trois sommets d'un triangle équilatéral.

Exercice 82 Liban, Juin 2001

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 3+\mathrm{i}$ et $z_B = 1+2\mathrm{i}$.

1. Exprimer le complexe $\dfrac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
2. En déduire une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}\right)$.

Partie B

Désormais on considère l'espace muni du repère orthonormal direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$ où $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.
On considère les points A $(3;1;0)$, B $(1;2;0)$, C $(3;2;1)$ et D $(0;0;d)$ où d désigne un réel positif ou nul. On a ainsi un tétraèdre $ABCD$.

1. On pose $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   a. Calculer les coordonnées de $\vec{n}$.
   b. En déduire l'aire du triangle ABC.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. On note H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
   a. On pose $\overrightarrow{DH} = \lambda\,\vec{n}$. Calculer λ en fonction de d.
   b. En déduire l'expression de la distance DH. Montrer que le volume du tétraèdre $ABCD$ est $V_d = \dfrac{2d+5}{6}$.
4. Déterminer pour quelle valeur de d la droite (DB) est perpendiculaire au plan (ABC).
5. On suppose que $d = 0$. Calculer la distance de A au plan (OBC).

Exercice 83 Polynésie, Juin 2001

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$, unité graphique 2 cm, on considère les points A et B, d'affixes respectives $z_A = -1$ et $z_B = 3\text{i}$.
Soit la fonction f de $\mathscr{P}$ privée du point A dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \text{i}\left(\frac{z - 3\text{i}}{z + 1}\right) \quad (1).$$

1. Soit C le point d'affixe $z_C = 2 - \text{i}$. Montrer qu'il existe un seul point D tel que $f(D) = C$.
2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. À l'aide de l'égalité (1), montrer que, pour tout M distinct de A et de B :
$$OM' = BM \text{ et } (\vec{u},\, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA},\, \overrightarrow{MB}) \quad (\text{modulo } 2\pi).$$
4. En déduire et construire les ensembles de points suivants :
   a. L'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tels que l'image M' soit située sur le cercle (Γ) de centre O, de rayon 1.
   b. L'ensemble $\mathscr{F}$ des points M tels que l'affixe de M' soit réelle.
5. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   On note C_1 l'image de C par R.
   a. Déterminer l'affixe de C_1.
   b. Montrer que C_1 appartient à l'ensemble $\mathscr{F}$.

Exercice 84 Pondichéry, Juin 2001

On considère l'application f qui à tout nombre complexe z différent de 1, associe le nombre complexe

$$f(z) = \frac{2 - \text{i}z}{1 - z}.$$

L'exercice étudie quelques propriétés de f.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, dans lequel seront représentés les ensembles trouvés aux questions **1.** et **2.**.
A est le point d'affixe 1 et B celui d'affixe -2i.

1. On pose $z = x + \text{i}y$ avec x et y réels.
   Écrire $f(z)$ sous forme algébrique. En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un réel et représenter cet ensemble.
2. On pose $z' = f(z)$.
   a. Vérifier que i n'a pas d'antécédent par f et exprimer, pour z' différent de i, z en fonction de z'.
   b. M est le point d'affixe z (z différent de 1) et M' celui d'affixe z' (z' différent de i).
   Montrer que $OM = \dfrac{M'C}{M'D}$ où C et D sontles points d'affixes respectives 2 et i.
   c. Montrer que, lorsque le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A, son image M' appartient à une droite fixe que l'on définira géométriquement.
   d. Montrer que, si M est un point de l'axe des réels, différent de O et de A, alors M' appartient à la droite (CD).

Exercice 85 Amérique du Sud, Novembre 2000

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

1. a. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe de module 2 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{i}z - 2 = 4\mathrm{i} - z$. On donnera la solution sous forme algébrique.
2. On désigne par I, A et B les points d'affixes respectives 1, $2\mathrm{i}$ et $3+\mathrm{i}$.
   a. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.
   b. Calculer l'affixe z_C du point C image de A par la symétrie de centre I.
   c. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. En déduire le module et un argument de ce nombre. (z_A et z_B désignent les affixes des points A et B).
   d. Soit D le point d'affixe z_D tel que $z_D - z_C = z_A - z_B$. Montrer que ABCD est un carré.
3. Pour tout point M du plan, on considère le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.
   a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MI}$.
   b. Montrer que le point K défini par $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = 2\overrightarrow{AB}$ est le milieu du segment $[AD]$.
   c. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que

$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|2\overrightarrow{AB}\right\|.$$

   Construire Γ.

Exercice 86 Nouvelle – Calédonie, Décembre 2000

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

   Préciser le module et un argument de chacune des solutions.
   b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$(-\mathrm{i}z + 3\mathrm{i} + 3)^2 - 2(-\mathrm{i}z + 3\mathrm{i} + 3) + 2 = 0.$$

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + \mathrm{i}$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_C = 2z_B$.
   a. Déterminer les formes algébriques de z_B et z_C.
   b. Placer les points A, B et C.
   c. Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle $(\mathscr{C})$ de centre I d'affixe 3 et de rayon $\sqrt{5}$.
   d. Calculer $\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3}$; en déduire la nature du triangle IAC.
   e. Le point E est l'image du point O par la translation de vecteur $2\overrightarrow{IC}$. Déterminer l'affixe du point E.
   f. Le point D est l'image du point E par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe du point D.
   g. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 87 Antilles – Guyane, Septembre 2000

1. Pour tout nombre complexe z, on considère

$$f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261.$$

a. Soit b un nombre réel. Exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaire de $f(\mathrm{i}b)$. En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution.

b. Montrer qu'il existe deux nombres réels α et β, que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z,

$$f(z) = \left(z^2+9\right)\left(z^2+\alpha z+\beta\right).$$

c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $f(z) = 0$.

2. Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal.

a. Placer dans le plan $\mathscr{P}$ les points A, B, C et D ayant respectivement pour affixes : $a = 3\mathrm{i}$, $b = -3\mathrm{i}$, $c = 5+2\mathrm{i}$ et $d = 5-2\mathrm{i}$.

b. Déterminer l'affixe de l'isobarycentre G des points A, B, C, D.

c. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

$$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| = 10.$$

Tracer $\mathscr{E}$ sur la figure précédente.

Exercice 88 Amérique du Nord, Juin 2000

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$.
Dans tout l'exercice, z est un nombre complexe non nul.

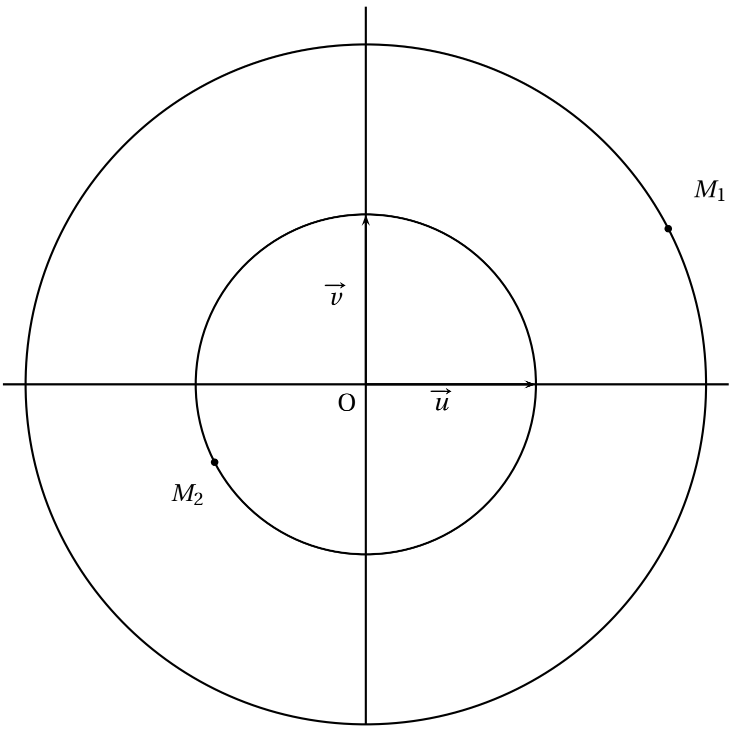
À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = -\dfrac{1}{z}$, puis le point I milieu du segment $[MM']$.

L'affixe de I est donc $\dfrac{1}{2}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$.

Note : les questions **2., 3.** et **4.** sont largement indépendantes.

1. a. Donner une relation entre les modules de z et z'.
Donner une relation entre leurs arguments.

b. Sur la figure ci-dessous est placé le point M_1 d'affixe z_1 sur le cercle de centre O et de rayon 2.
Expliquer comment on peut obtenir géométriquement le point M_1', puis le point I_1 milieu du segment $[M_1M_1']$. Effectuer cette construction.



2. Pour cette question, θ est un réel et M est le point d'affixe $z = e^{i\theta}$.
   a. Calculer sous forme algébrique l'affixe de I.
   b. Sur la figure ci-dessous est placé le point M_2 d'affixe z_2 sur le cercle $\mathscr{C}$, de centre O et de rayon 1. Expliquer comment, en utilisant le résultat de la question **2. a.**, on peut obtenir géométriquement le point I_2 milieu du segment $[M_2M_2']$.
   Effectuer cette construction.
   Donner (sans justification) l'ensemble décrit par I lorsque M décrit $\mathscr{C}$.
3. Dans cette question, M est un point du plan, distinct de O.
   a. Déterminer les points M du plan complexe pour lesquels M et I sont confondus.
   b. Développer $(z-2i)^2+3$.
   Déterminer les points M du plan complexe pour lesquels l'affixe de I est 2i.
4. Dans cette question, M est un point du plan, distinct de O, d'affixe $z = x+iy$ (x et y réels).
   a. Exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de l'affixe de I.
   b. Déterminer l'ensemble A des points M du plan pour lesquels I appartient à l'axe des abscisses.
   c. Déterminer l'ensemble B des points M du plan pour lesquels I appartient à l'axe des ordonnées.

Exercice 89 Antilles – Guyane, Juin 2000

1. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.
   a. Calculer $P(-1)$.
   b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait :
   $$P(z) = (z+1)(z^2+az+b).$$
   c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. (Unité graphique : 2 cm.) On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives
   $$z_A = -1,\ z_B = 2+i\sqrt{3},\ z_C = 2-i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_G = 3.$$
   a. Réaliser une figure et placer les points A, B, C et G.
   b. Calculer les distances AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC.
   c. Calculer un argument du nombre complexe $\dfrac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$. En déduire la nature du triangle GAC.
3. Soit (D) l'ensemble des points M du plan tels que :
   $$\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{CG} = +12 \quad (1)$$
   a. Montrer que G est le barycentre du système de points pondérés
   $$\{(A,\ -1)\ ;\ (B,\ 2)\ ;\ (C,\ 2)\}.$$
   b. Montrer que la relation (1) est équivalente à la relation $\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{CG} = -4$ (2).
   c. Vérifier que le point A appartient à l'ensemble (D).
   d. Montrer que la relation (2) est équivalente à la relation $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{GC} = 0$.
   e. En déduire l'ensemble (D) et le tracer.

Exercice 90 Asie, Juin 2000

Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, d'unité 2 cm, on considère les points $A,\ B,\ C$ et D d'affixes respectives :

$$z_A = -\,\mathrm{i}\ ;\ z_B = 3\ ;\ z_C = 2+3\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_D = -\,1+2\mathrm{i}.$$

1. Placer sur une figure les points $A,\ B,\ C$ et D.
2. a. Interpréter géométriquement le module et l'argument du complexe $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$.

   b. Calculer le complexe $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$.

   c. Que pouvez-vous conclure concernant les segments $[AC]$ et $[BD]$?
3. a. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier.

   b. Calculer l'aire s_0 du quadrilatère $ABCD$.
4. a. Placer sur la figure précédente les points $A_1,\ B_1,\ C_1$ et D_1 tels que $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{B_1C}$, où les points A_1 et B_1 appartiennent à $[DC]$, le quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ étant un carré situé à l'extérieur du quadrilatère $ABCD$.

   b. Tracer le carré $A_1B_1C_1D_1$ et déterminer son aire s_1.
5. a. On continue par le même procédé : un carré $A_nB_nC_nD_n$ étant déterminé, on considère les points $A_{n+1},\ B_{n+1},\ C_{n+1}$ et D_{n+1} tels que $\overrightarrow{D_nA_{n+1}} = \overrightarrow{A_{n+1}B_{n+1}} = \overrightarrow{B_{n+1}C_n}$ où les points A_{n+1} et B_{n+1} appartiennent à $[D_nC_n]$, le quadrilatère $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ étant un carré situé à l'extérieur du carré $A_nB_nC_nD_n$.
   Tracer le carré $A_2B_2C_2D_2$.

   b. Soit s_n l'aire du carré $A_nB_nC_nD_n$.
   Exprimer s_{n+1} en fonction de s_n, puis de n.
   En déduire s_n , en fonction de n.

   c. Déterminer, en fonction de n, l'aire S_n de la figure obtenue par la juxtaposition du quadrilatère $ABCD$ et des carrés $A_1B_1C_1D_1,\ A_2B_2C_2D_2,\ \ldots$ et $A_nB_nC_nD_n$.

   d. La suite (s_n) est-elle convergente ? Préciser sa limite si elle existe.

Exercice 91 France, Juin 2000

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, unité graphique 4 cm, on considère les points A d'affixe $z_A = 1$ et B d'affixe $z_B = 2$.
Soit un réel θ appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$.
On note M le point d'affixe $z = 1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$.

1. Montrer que le point M appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon 1.
2. Exprimer l'angle $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AM})$ en fonction de θ. En déduire l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M quand θ décrit l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$.
3. On appelle M' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $-\,\theta$ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z' = \overline{z}$ puis que M' appartient à $(\mathscr{C})$.
4. Dans toute la suite, on choisit $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\,\dfrac{2\pi}{3}$ et A' l'image de A par r.

   a. Définir l'image $(\mathscr{C}')$ du cercle $(\mathscr{C})$ par r.
   Placer sur une figure $A,\ B,\ (\mathscr{C}),\ M,\ (\mathscr{C}')$ puis le point M' image de M par r.

   b. Montrer que le triangle AMO est équilatéral.

   c. Montrer que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ se coupent en O et en M.

d. Soit le point P symétrique de M par rapport à A. Montrer que M' est le milieu de $[A'P]$.

Exercice 92 La Réunion, Juin 2000

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ (unité : 2 cm). On dit qu'un triangle équilatéral ABC est direct si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. On pose $\mathrm{j}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

1. a. Vérifier que 1 , j et j^2 sont solutions de l'équation $z^3=1$.
   b. Calculer $(1-\mathrm{j})(1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2)$; en déduire que $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2=0$.
   c. Vérifier que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+\mathrm{j}^2=0$.
2. Dans le plan complexe, on considère trois points $A,\ B,\ C$, deux à deux distincts, d'affixes respectives $a,\ b,\ c$.
   a. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a}=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.
   b. En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si : $a+b\mathrm{j}+c\mathrm{j}^2=0$.
3. À tout nombre complexe $z\neq 1$, on associe les points $R,\ M$ et M' d'affixes respectives 1, z et $\bar{z}$.
   a. Pour quelles valeurs de z les points M et M' sont-ils distincts ?
   b. En supposant que la condition précédente est réalisée, montrer que l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que le triangle RMM' soit équilatéral direct est une droite privée d'un point.

Exercice 93 Liban, Juin 2000

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.
On considère les points A et B d'affixes respectives i et $-$i.
Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z distincte de $-$i associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z'=\frac{1+\mathrm{i}z}{z+\mathrm{i}}.$$

1. Quelle est l'image par l'application f du point O ?
2. Quel est le point qui a pour image par l'application f le point C d'affixe $1+\mathrm{i}$?
3. Montrer que l'équation $\dfrac{1+\mathrm{i}z}{z+\mathrm{i}}=z$ admet deux solutions que l'on déterminera.
4. Vérifier que $z'=\dfrac{\mathrm{i}(z-\mathrm{i})}{z+\mathrm{i}}$, en déduire $OM'=\dfrac{AM}{BM}$ et :
$$\left(\vec{u},\overrightarrow{OM'}\right)=\left(\overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{MA}\right)+\frac{\pi}{2}+2k\pi\ \text{ avec } k\in\mathbb{Z}.$$
5. Montrer que tous les points de l'axe des abscisses ont leurs images par l'application f situées sur un même cercle $(\mathscr{C})$ que l'on précisera.
6. Soit M un point du cercle de diamètre $[AB]$ différent de A et de B, montrer que son image M' est située sur l'axe des abscisses.

Exercice 94 Polynésie, Juin 2000

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, unité graphique 4 cm. Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, i désigne le nombre de module 1, et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de -2, associe

$$Z = f(z) = \frac{z - 2 + \mathrm{i}}{z + 2\mathrm{i}}.$$

1. Si $z = x + \mathrm{i}y$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.
   On vérifiera que $\Re(Z) = \dfrac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y+2)^2}$.
   En déduire la nature de :
   a. l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z, tels que Z soit un réel ;
   b. l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.
   c. Représenter ces deux ensembles.
2. On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - \mathrm{i}$ et $z_B = -2\mathrm{i}$.
   En remarquant que $Z = \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$, retrouver les ensembles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ par une méthode géométrique.
3. Calculer $|f(z) - 1| \times |z + 2\mathrm{i}|$, et en déduire que les points M' d'affixe Z, lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.

Exercice 95 Inde, Juin 2000

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$; unité graphique 4 cm.
On appelle B le point d'affixe i et M_1 le point d'affixe :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - \mathrm{i}).$$

1. Déterminer le module et un argument de z_1.
2. Soit M_2 le point d'affixe z_2, image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer le module et un argument de z_2.
   Montrer que le point M_2 est un point de la droite (D) d'équation $y = x$.
3. Soit M_3 le point d'affixe z_3, image de M_2 par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3} + 2$.
   a. Montrer que $z_3 = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}(1 + \mathrm{i})$.
   b. Montrer que les points M_1 et M_3 sont situés sur le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.
4. Construire, à la règle et au compas, les points M_1, M_2 et M_3 en utilisant les questions précédentes ; on précisera les différentes étapes de la construction.
5. À tout point M du plan d'affixe z (distinct de B), on associe le point M', d'affixe Z telle que $Z = \dfrac{1}{\mathrm{i} - z}$.
   Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M du plan (M distinct de B) tels que M' appartienne au cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice 96 France, Septembre 1999

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm). On note Z_M l'affixe d'un point M.
Soit A le point d'affixe 4 et B le point d'affixe 4i.

1. Soit θ un réel de $[0,\ 2\pi[$ et r un réel strictement positif.
   On considère le point E d'affixe $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et F le point tel que OEF est un triangle rectangle isocèle vérifiant $\left(\overrightarrow{OE},\ \overrightarrow{OF}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
   Quelle est, en fonction de r et θ, l'affixe de F ?
2. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice. On choisira, uniquement pour cette figure :
   $$\theta = 5\frac{\pi}{6} \text{ et } r = 3.$$
3. On appelle $P,\ Q,\ R,\ S$ les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BE]$, $[EF]$, $[FA]$.
   a. Prouver que $PQRS$ est un parallélogramme.
   b. On pose : $Z = \dfrac{Z_R - Z_Q}{Z_Q - Z_P}$.
   Déterminer le module et un argument de Z. En déduire que $PQRS$ est un carré.
4. a. Calculer, en fonction de r et θ, les affixes respectives des points P et Q.
   b. Quelle est, en fonction de r et θ, l'aire du carré $PQRS$?
   c. r étant fixé, pour quelle valeur de θ cette aire est-elle maximale ? Quelle est alors l'affixe de E ?

Exercice 97 Nouvelle Calédonie, Décembre 1999

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$; unité graphique : 2 cm.

1. Tracer les cercles de centre O et de rayons 1 et 2. Placer les points A, B, et D d'affixes respectives $\sqrt{3}+\mathrm{i}$, $\sqrt{3}-\mathrm{i}$ et $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
2. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et la translation T de vecteur d'affixe 1.
   a. Déterminer les affixes $z_{A'}$ et $z_{B'}$ des points A' et B', images respectives des points A et B par la rotation R.
   b. Déterminer l'affixe $z_{D'}$, du point D', image du point D par la translation T.
   c. Placer les points A', B' et D'.
3. Déterminer un argument du nombre complexe $\dfrac{z_{A'} - z_{B'}}{z_{D'}}$.
   Justifier que la droite (OD') est une médiatrice du triangle $OA'B'$.

Exercice 98 Sportifs de Haut Niveau, Septembre 1999

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que z^3 soit un nombre réel positif ou nul.

1. a. Le point A d'affixe $a = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ appartient-il à $\mathscr{E}$?
   b. On note B le point d'affixe $b = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Calculer un argument de b et montrer que B appartient à $\mathscr{E}$.

2. On suppose $z \neq 0$ et on note θ un argument de z. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que z^3 soit un nombre réel positif.
3. Après avoir vérifié que le point O appartient à $\mathscr{E}$, déduire des résultats précédents que $\mathscr{E}$ est la réunion de trois demi-droites que l'on déterminera. Placer les points A et B et représenter E sur une figure.
4. À tout point P d'affixe $z \neq 0$, on associe les points Q d'affixe iz et R d'affixe z^4.

   On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des points P tels que l'angle $(\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR})$ ait pour mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.

   Montrer que $\mathscr{F}$ est l'ensemble $\mathscr{E}$ privé du point O.

Exercice 99 Amérique du Nord, Juin 1999

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, l'unité graphique étant 4 cm. On considère les points A_0, A_1 d'affixes respectives : $a_0 = 1$; $a_1 = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{12}}$.

Le point A_2 est l'image du point A_1 par la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{12}$.

1. a. Calculer l'affixe a_2 du point A_2 sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
   b. Soit I le milieu du segment $[A_0A_2]$. Calculer l'affixe du point I.
   c. Faire une figure.
2. a. Prouver que les droites (OI) et (OA_1) sont confondues.
   b. Écrire sous forme trigonométrique l'affixe de I.
   c. Déterminer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ (les valeurs exactes sont exigées), sachant que $\sqrt{4\sqrt{3}+8} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$.

Exercice 100 Antilles – Guyane, Juin 1999

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On considère le point A d'affixe 1 et, pour tout θ appartenant à $[0\,;\,2\pi[$, le point M d'affixe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On désigne par P le point d'affixe $1+z$ et par Q le point d'affixe z^2.

1. À partir du point M, donner une construction géométrique du point P et une construction géométrique du point Q. Les points O, A, M, P et Q seront placés sur une même figure.
2. Déterminer l'ensemble des points E pour θ appartenant à $[0\,;\,2\pi[$.

   Tracer cet ensemble sur la figure précédente.
3. Soit S le point d'affixe $1+z+z^2$ où z désigne toujours l'affixe du point M. Construire S, en justifiant la construction.
4. Dans le cas où S est différent de O, tracer la droite (OS). Quelle conjecture apparaît, relativement au point M ?

   Démontrer que le nombre $\dfrac{1+z+z^2}{2}$ est réel, quel que soit θ appartenant à $[0\,;\,2\pi[$.

   Conclure sur la conjecture précédente.

Exercice 101 Asie, Juin 1999

1. Pour tout nombre Z, on pose $P(Z) = Z^4 - 1$.
   a. Factoriser $P(Z)$.

b. En déduire les solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation $P(Z) = 0$, d'inconnue Z.

c. Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1.$$

2. a. Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (l'unité graphique est 5 cm).

Placer les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = -2,\ b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}\mathrm{i} \text{ et } c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}$$

b. Démontrer que les points O, A, B et C sont situés sur un cercle, que l'on déterminera.

3. Placer le point D d'affixe $d = -\frac{1}{2}$.

Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par :

$$z' = \frac{a-c}{d-c}$$

En déduire le rapport $\frac{CA}{CD}$.

Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

Exercice 102 Centres étrangers, Juin 1999

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, A, A', B, B' sont les points d'affixes respectives 1, -1, i, $-\mathrm{i}$.

À tout point M d'affixe z, distinct des points O, A, A', B et B', on associe les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2, tels que les triangles BMM_1 et AMM_2 soient rectangles et isocèles, avec

$$\left(\overrightarrow{M_1B},\ \overrightarrow{M_1M}\right) = \left(\overrightarrow{M_2M},\ \overrightarrow{M_2A}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Voir la figure sur l'annexe 1, *qui sera complétée et rendue avec la copie*

1. a. Justifier les égalités $z - z_1 = \mathrm{i}(\mathrm{i} - z_1)$ et $1 - z_2 = \mathrm{i}(z - z_2)$.

b. Vérifier que z_1 et z_2 peuvent s'écrire :

$$z_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{2}(z+1) \text{ et } z_2 = \frac{1-\mathrm{i}}{2}(z+\mathrm{i}).$$

2. On se propose dans cette question de déterminer les points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est équilatéral.

a. Montrer que : $OM_1 = OM_2$ équivaut à $|z+1| = |z+\mathrm{i}|$.
En déduire l'ensemble (Δ) des points M tels que $OM_1 = OM_2$ et tracer (Δ) sur la figure.

b. Montrer que : $OM_1 = M_1M_2$ équivaut $|z+1|^2 = 2|z|^2$.

c. En déduire l'ensemble (Γ) des points M du plan pour lesquels $OM_1 = M_1M_2$.
On pourra montrer que $|z+1|^2 = 2|z|^2$ équivaut à $|z-1|^2 = 2$.
Tracer (Γ) sur la figure.

d. En déduire les deux points M pour lesquels OM_1M_2 est un triangle équilatéral et les placer sur la figure.

Exercice 103 France, Juin 1999

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra 4 cm comme unité sur les deux axes.
On considère l'application F du plan dans lui-même qui, à tout point m d'affixe z associe le point M d'affixe

$$\frac{1}{2}z^2 - z.$$

L'objet de cet exercice est de tracer la courbe (Γ) décrite par M lorsque m décrit le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1.
Soit t un réel de $[-\pi\ ;\ \pi]$ et m le point de $(\mathscr{C})$ d'affixe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

1. Montrer que l'image M de m par F est le point de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}\cos 2t - \cos t \\ y(t) = \dfrac{1}{2}\sin 2t - \sin t \end{cases},\ t \in [-\pi\ ;\ \pi].$$

   Ces relations constituent une représentation paramétrique de la courbe (Γ).
2. Comparer $x(-t)$ et $x(t)$ d'une part, $y(-t)$ et $y(t)$ d'autre part.
   En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie que l'on précisera.
3. Montrer que $x'(t) = \sin t(1 - 2\cos t)$. Étudier les variations de x sur $[0\ ;\ \pi]$.
4. Montrer que $y'(t) = (\cos t - 1)(1 + 2\cos t)$. Étudier les variations de y sur $[0\ ;\ \pi]$.
5. Dans un même tableau faire figurer les variations de x et y sur $[0\ ;\ \pi]$.
6. Placer les points de (Γ) correspondant aux valeurs 0, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$ et π du paramètre t et tracer les tangentes en ces points (on admettra que pour $t = 0$ la tangente à (Γ) est horizontale). Tracer la partie de (Γ) obtenue lorsque t décrit $[0\ ;\ \pi]$ puis tracer (Γ) complètement.

Exercice 104 Liban, Juin 1999

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, l'unité de longueur étant le centimètre, les points A, B, C, D ont pour affixe $3 + \mathrm{i}$, $7 - i$, $-1 - 7\mathrm{i}$, $8 - 4\mathrm{i}$ respectivement.

1. a. Placer les points A, B, C, D.
   b. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que A, B, C, D sont sur un même cercle.
   On précisera le rayon de ce cercle et l'affixe de son centre I.
3. À tout point M d'affixe z, avec z non nul, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{10}{z}$.
   a. Écrire, sous forme algébrique les affixes a', b', c' des points A', B', C' (respectivement associés à A, B, C). Placer les points A', B', C'.
   b. Vérifier que : $\dfrac{c' - a'}{b' - a'} = 2$.
   c. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{A'B'},\ \overrightarrow{A'C'}\right)$.
   d. Que peut-on en déduire pour les points A', B', C' ?

Exercice 105 Polynésie, Juin 1999

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E)\ :\ z^3 - 8 = 0$.
2. On considère dans le plan (P) les points $A,\ B$ et C d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \quad z_B = 2 \quad \text{et} \quad z_C = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

   a. Écrire z_A et z_C sous la forme trigonométrique.
   b. Placer les points A, B et C.
   c. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \mathrm{e}^{2i\frac{\pi}{3}} z.$$

   a. Caractériser géométriquement l'application f.
   b. Déterminer les images des points A et C par f.
   En déduire l'image de la droite (AC) par f.

Exercice 106 Inde, Mai 1999

Les questions 2 *et* 3 *sont indépendantes.*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0$.
   On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.
2. a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z_1 et z_2.
   b. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$.
3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$ (unité : 1 cm), on considère le point M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$, le point M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-\mathrm{i})$ et le point A d'affixe $z_A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   a. Déterminer l'affixe du point M_3 image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport -3.
   b. Déterminer l'affixe du point M_4 image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   c. Placer dans le même repère les points $A,\ M_1,\ M_2,\ M_3$ et M_4.
   d. Calculer $\dfrac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$.
   e. Soient I le milieu du segment $[M_3M_4]$ et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I. Montrer que les points $M_1,\ M_3,\ M_5$ et M_4 forment un carré.

Exercice 107 Amérique du Sud, Novembre 1998

Le plan est rapporté au repère $\left(O;\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$ orthonormal direct ; unité graphique 2 centimètres.
On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.
Soit I le point d'affixe $2\mathrm{i}$.
On nomme f la transformation qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \mathrm{i}z$.

1. a. Préciser la nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques.
   b. Déterminer l'affixe du point A', image par f du point A d'affixe $1+\sqrt{2}+\mathrm{i}$.
   c. Montrer que les points A, I et A' sont alignés.
2. a. Montrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, I et M' sont alignés, est le cercle de centre Ω d'affixe $1+\mathrm{i}$ et de rayon $\sqrt{2}$.
   b. Vérifier que le point A appartient à (Γ).
   c. Déterminer l'ensemble (Γ') décrit par le point M' lorsque le point M décrit (Γ).
3. Soit B le point d'affixe $2+2\mathrm{i}$ et B' l'image de B par f.
   a. Démontrer que les droites (AB) et $(A'B')$ sont perpendiculaires.
   b. Soit C le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$. Déterminer la nature du quadrilatère $OACA'$.

Exercice 108 Antilles – Guyane, Septembre 1998

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure, les points introduits dans le texte (unité graphique : 2 cm).

1. a. Résoudre l'équation :
   $$(E) \quad : \quad z^2-2z\sqrt{3}+4=0.$$
   b. On considère les nombres complexes $z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}$ et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2 ; placer M et N sur la figure.
   c. Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{w}=-2\vec{u}$. Placer P et Q sur la figure.
   Montrer que $MNPQ$ est un carré.
2. Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.
   Placer ces points sur la figure.
   Calculer les affixes de R et de S. Montrer que S appartient au segment $[MN]$.
3. On pose $\alpha=2-\sqrt{3}$.
   a. Montrer que $1+\alpha^2=4\alpha$ et $1-\alpha^2=2\alpha\sqrt{3}$.
   b. Exprimer les affixes Z de $\overrightarrow{PR}$ et Z' de $\overrightarrow{PS}$ en fonction de α.
   c. Montrer que $|Z|=|Z'|$ et que $\dfrac{Z}{Z'}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   d. Déduire des questions précédentes la nature du triangle PRS.

Exercice 109 France, Septembre 1998

1. On considère le polynôme P défini par :
   $$P(z)=z^3-\ 6z^2+12z-16.$$
   a. Calculer $P(4)$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ tel que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ cm.
   Soient A, B, C les points d'affixes respectives :

$$a = 4 \qquad b = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad c = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$$

   a. Placer les points A, B et C sur une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
   b. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
3. Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$.
   On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
   a. Quelles sont les affixes respectives de F et de G ?
   b. Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.
4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme $COFH$.
   a. Montrer que le quadrilatère $COFH$ est un carré.
   b. Calculer l'affixe du point H.
   c. Le triangle AGH est-il équilatéral ?

Exercice 110 Polynésie, Septembre 1998

Le plan $(\mathscr{P})$ est muni du repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
À tout point M du plan $(\mathscr{P})$ est associé le nombre complexe z, affixe du point M.

1. a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes

$$z_1 = -1, \quad z_2 = \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

   b. Déterminer le module et un argument de chacun des cubes z_1^3, z_2^3, z_3^3 des complexes ci-dessus, puis la partie réelle et la partie imaginaire de z_1^3, de z_2^3 et de z_3^3.
2. a. Si $z = x + \mathrm{i}y = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est un nombre complexe (avec x, y et θ réels et ρ réel supérieur à zéro), déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z^3 en fonction de x et y, puis le module et un argument de z^3 en fonction de ρ et θ.
   b. Déterminer l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M d'affixe z caractérisé par : z^3 est un nombre réel.
   c. Déterminer et tracer l'ensemble $(\mathscr{E}')$ des points M d'affixe z, caractérisé par : z^3 est un nombre réel et $1 \leqslant z^3 \leqslant 8$.