Recueil d'annales en Mathématiques

Terminale S – Enseignement obligatoire

Intégrales

Frédéric Demoulin[1]

Dernière révision : 3 juin 2010

Document diffusé via le site www.bacamaths.net de Gilles Costantini[2]

1. frederic.demoulin (chez) voila.fr
2. gilles.costantini (chez) bacamaths.net

Tableau récapitulatif des exercices

$\star$ *indique que cette notion a été abordée dans l'exercice*

F.I. : fonction définie par une intégrale ; I.P.P. : intégration par parties ; E.D. : équations différentielles

N°	Lieu	Année	ROC	F.I.	I.P.P.	Aires	Vol.	E.D.	Trigo.	exp	ln	Suites
Session 2010												
1	Liban	juin 2010	$\star$							$\star$		$\star$
2	Inde	avril 2010	$\star$		$\star$	$\star$					$\star$	$\star$
Session 2009												
3	Amérique du Nord	juin 2009	$\star$							$\star$		$\star$
4	Centres étrangers	juin 2009								$\star$		$\star$
5	France	juin 2009			$\star$	$\star$				$\star$	$\star$	
6	France (sujet initial)	juin 2009		$\star$	$\star$	$\star$				$\star$		
7	La Réunion	juin 2009			$\star$	$\star$				$\star$		
8	Liban	juin 2009								$\star$	$\star$	$\star$
9	Polynésie	juin 2009				$\star$				$\star$		$\star$
10	Inde	avril 2009				$\star$				$\star$		$\star$
11	Nouvelle-Calédonie	mars 2009			$\star$	$\star$				$\star$		$\star$
Session 2008												
12	Antilles-Guyane	sept 2008				$\star$				$\star$	$\star$	
13	France / La Réunion	sept 2008								$\star$		$\star$
14	Polynésie	sept 2008				$\star$				$\star$	$\star$	
15	Centres étrangers	juin 2008	$\star$		$\star$	$\star$				$\star$	$\star$	
16	France	juin 2008			$\star$	$\star$					$\star$	
17	La Réunion	juin 2008		$\star$	$\star$	$\star$					$\star$	
18	Liban	juin 2008		$\star$	$\star$	$\star$				$\star$		
19	Polynésie	juin 2008	$\star$							$\star$	$\star$	
20	Amérique du Nord	mai 2008			$\star$				$\star$			$\star$
21	Inde	avril 2008		$\star$		$\star$				$\star$	$\star$	
Session 2007												
22	Antilles-Guyane	sept 2007	$\star$		$\star$	$\star$					$\star$	
23	Polynésie	sept 2007								$\star$		
24	Amérique du Nord	juin 2007	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$				$\star$		
25	Antilles-Guyane	juin 2007	$\star$	$\star$							$\star$	
26	Asie	juin 2007	$\star$		$\star$			$\star$	$\star$			
27	France	juin 2007	$\star$		$\star$				$\star$	$\star$		
28	Liban	juin 2007			$\star$	$\star$					$\star$	
29	Polynésie	juin 2007			$\star$	$\star$					$\star$	
Session 2005												
30	Asie	juin 2005			$\star$					$\star$		$\star$
31	La Réunion	juin 2005		$\star$	$\star$	$\star$				$\star$	$\star$	
32	Liban	juin 2005			$\star$					$\star$		$\star$
33	Inde	avril 2005		$\star$		$\star$				$\star$		
Session 2004												
34	Amérique du Sud	nov 2004			$\star$		$\star$	$\star$		$\star$	$\star$	
35	France	sept 2004			$\star$						$\star$	
36	Polynésie	sept 2004		$\star$	$\star$	$\star$					$\star$	$\star$
37	Antilles-Guyane	juin 2004		$\star$	$\star$						$\star$	$\star$
38	Polynésie	juin 2004								$\star$		$\star$

N°	Lieu	Année	ROC	F.I.	I.P.P.	Aires	Vol.	E.D.	Trigo.	exp	ln	Suites
Session 2001												
39	Polynésie	sept 2001			⋆					⋆		⋆
40	Inde	avril 2001			⋆					⋆		⋆
Années 90												
41	France	juin 1999			⋆					⋆		⋆
42	Asie	juin 1998			⋆						⋆	⋆
43	La Réunion	1997		⋆						⋆		⋆
Années 80												
44	Bordeaux-Caen	1986							⋆			
45	Nancy-Metz	1980									⋆	

Exercice 1 Liban, juin 2010 (5 points)

Partie A – Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

- $e^0 = 1$;
- pour tous réels x et y, $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
2. Démontrer que, pour tout réel x et pour tout entier naturel n, $\left(e^x\right)^n = e^{nx}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$$

1. a. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.
   b. Calculer u_1. En déduire u_0.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.
   b. En déduire, que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leqslant \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 Inde, avril 2010 (6 points)

Partie A – Restitution organisée de connaissances

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. On suppose connus les résultats suivants :

- $\displaystyle\int_a^b [f(t)+g(t)]\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$;
- si, pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $f(t) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Montrer que : si pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln\left(1+x^n\right)$$

et on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,\mathrm{d}x$.

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthononnal $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\right)$.

1. a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f_1 sur $[0\,;\,+\infty[$.
   c. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.
   (Pour le calcul de I_1 on pourra utiliser le résultat suivant :
   pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$)
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2$.
   b. Étudier les variations de la suite (I_n).
   c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.
3. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - x$$

   a. Étudier le sens de variation de g sur $[0\,;\,+\infty[$.
   b. En déduire le signe de g sur $[0\,;\,+\infty[$. Montrer alors que, pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a :

$$\ln\left(1+x^n\right) \leqslant x^n$$

   c. En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice 3 Amérique du Nord, juin 2009 (5 points)

Partie A – Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$.

- si $u \geqslant 0$ sur $[a\ ;\ b]$, alors $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$;
- pour tous réels α et β, $\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

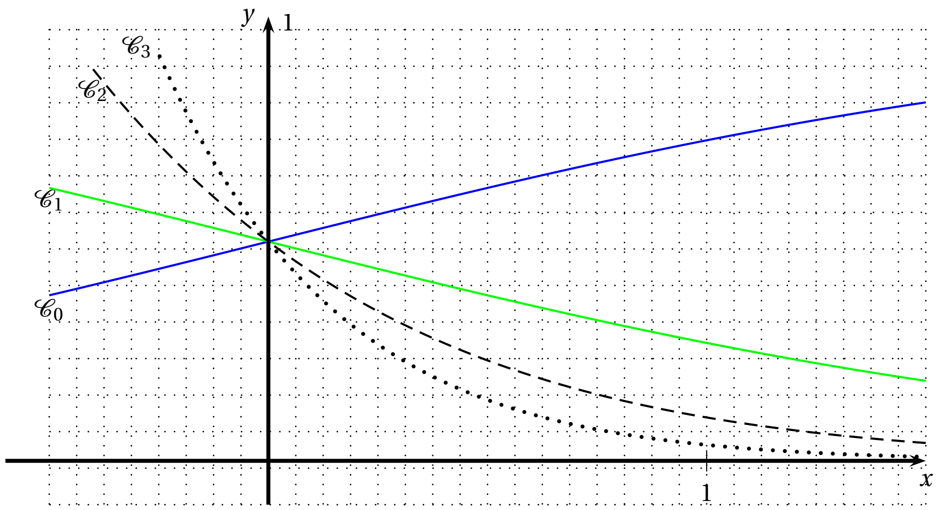
1. a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant 1$.
   b. En déduire que $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant u_0 \leqslant 1$.
2. Calculer u_1.
3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n$.
   b. Étudier les variations de la suite (u_n).
   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   b. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 Centres étrangers, juin 2009 (6 points)

Soit n un entier naturel.
On note f_n la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\right)$. Les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont représentées ci-dessous :



Partie A – Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes $\mathcal{C}_n$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les courbes $\mathcal{C}_n$ ont un point A en commun. On précisera ses coordonnées.
2. Étude de la fonction f_0
   a. Étudier le sens de variation de f_0.
   b. Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.
   c. Dresser le tableau de variation de fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.
3. Étude de la fonction f_1
   a. Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x.
   b. En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.
   c. Donner une interprétation géométrique de 3.a. pour les courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.
4. Étude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$
   a. Vérifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a :
   $$f_n(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{(n-1)x}}$$
   b. Étudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
   c. Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

Partie B – Étude d'une suite liée aux fonctions f_n

On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer u_1 puis montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_0.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$$

3. Calculer l'intégrale $\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 5 France, juin 2009 (6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + x\mathrm{e}^{-x}\right)$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}$ est représentée sur le graphique ci-dessous.

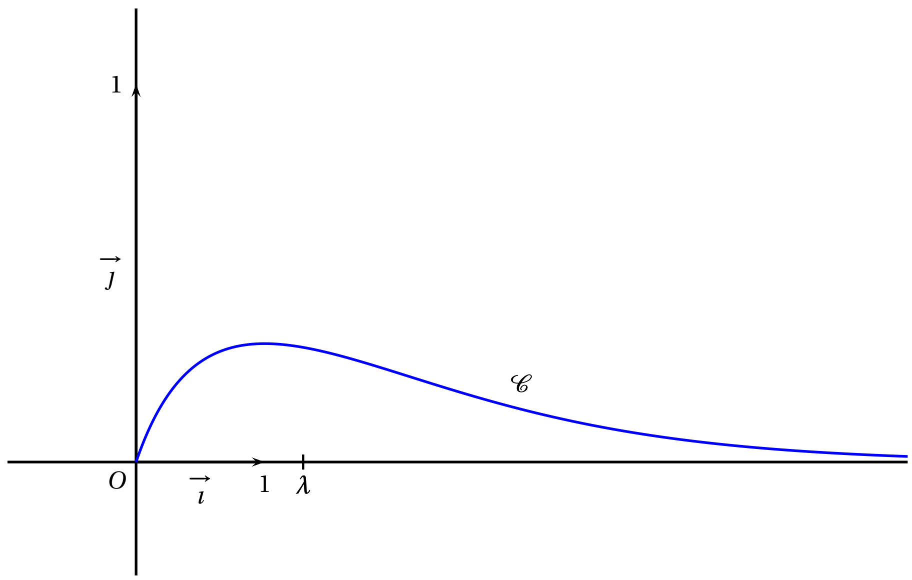
Partie A

1. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. Justifier que pour tout nombre réel positif x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $\mathscr{A}(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x$. On se propose de majorer $\mathscr{A}(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.

1. **Première méthode**
   a. Représenter, sur le graphique ci-dessous, la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $\mathscr{A}(\lambda)$.
   b. Justifier que pour tout nombre réel λ strictement positif, $\mathscr{A}(\lambda) \leqslant \lambda \times f(1)$.
2. **Deuxième méthode**
   a. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\displaystyle\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de λ.
   b. On admet que pour tout nombre réel positif u, $\ln(1 + u) \leqslant u$.
   Démontrer alors que, pour tout nombre réel λ strictement positif,
   $\mathscr{A}(\lambda) \leqslant -\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} + 1$.
3. **Application numérique**
   Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de $\mathscr{A}(5)$, arrondi au centième. Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda = 5$?

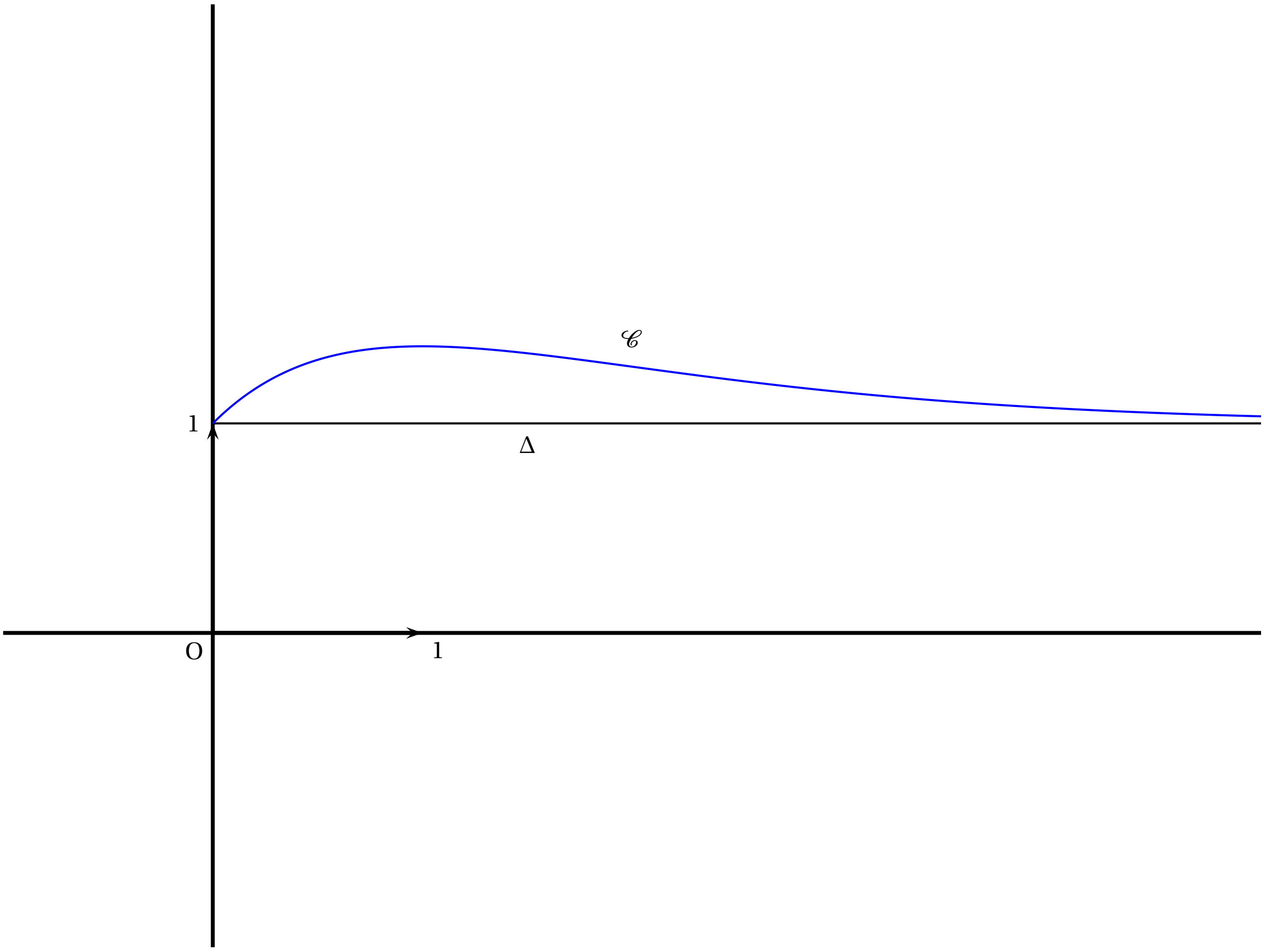


Exercice 6 France (sujet initial), juin 2009 (6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + x\mathrm{e}^{-x}$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath}\right)$ et la droite Δ d'équation $y = 1$ sont tracées ci-dessous.

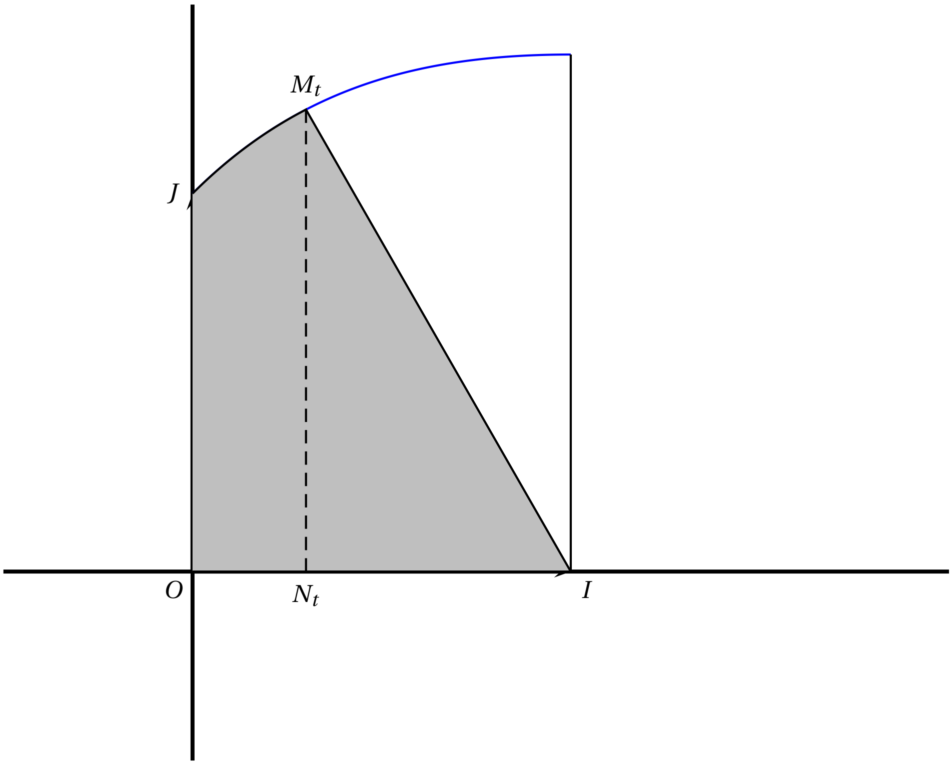


Partie A

1. Justifier les propriétés suivantes constatées sur la représentation graphique.
   a. La droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   b. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
2. Soit t un nombre réel positif. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.
   a. Interpréter graphiquement cette intégrale.
   b. Montrer que $\displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = t - t\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-t} + 1$.

Partie B

On note I le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$ et J le point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$.
Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, M_t désigne le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse t et N_t le point de coordonnées $(t\ ;\ 0)$.
On appelle $\mathscr{D}_t$, le domaine du plan délimité par la droite (IM_t), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe $\mathscr{C}$. Ce domaine est représenté par la zone grisée du graphique ci-joint. Soit $\mathscr{A}(t)$ la mesure de son aire exprimée en unité d'aire.



1. Interpréter graphiquement $\mathscr{A}(0)$ et donner sa valeur exacte.
2. Interpréter graphiquement $\mathscr{A}(1)$ et donner sa valeur exacte.
3. Calculer l'aire du triangle M_tN_tI.
4. En déduire que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$:

$$\mathscr{A}(t) = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + 1\right)\mathrm{e}^{-t}$$

5. *Dans cette question toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Existe-t-il un unique nombre réel α de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ tel que $\mathscr{A}(\alpha) = \frac{1}{2} \times \mathscr{A}(1)$?

   Justifier la réponse.

Exercice 7 La Réunion, juin 2009 (6 points)

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

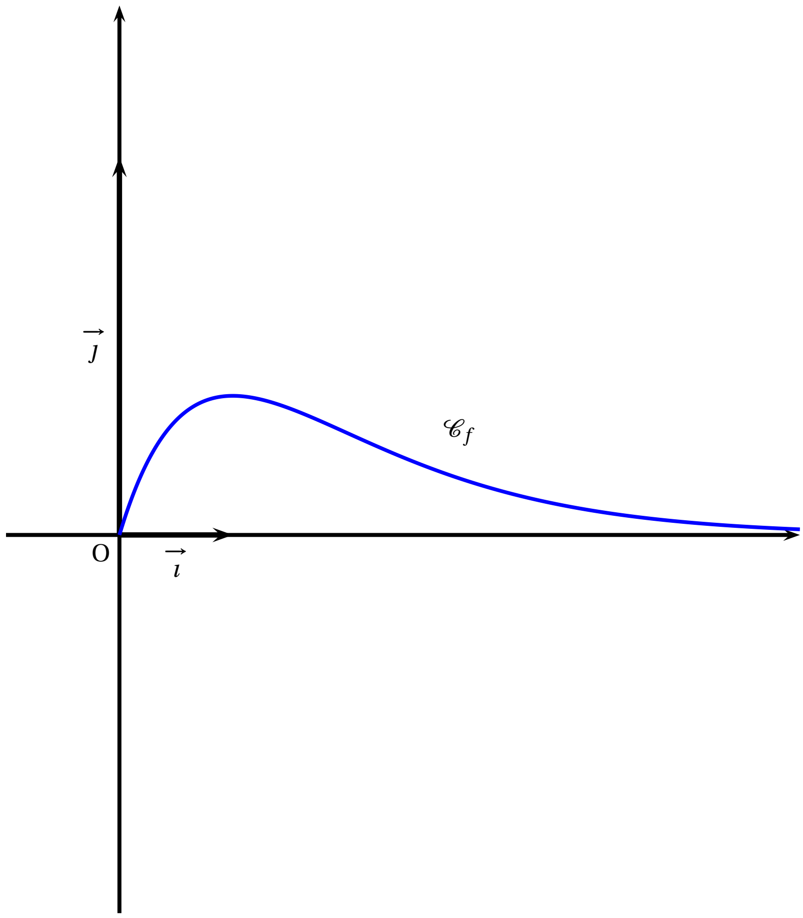
La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\right)$ est donnée dans e graphique ci-dessous.

1. D'après le graphique, quelles semblent être les variations de la fonction f et sa limite en $+\infty$?
2. Valider ces conjectures à l'aide d'une démonstration.
3. Tracer sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g.
4. Quelle semble être la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$?
   Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

Partie B

L'objectif de cette partie est de calculer, en unités d'aire, la mesure de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

1. Hachurer sur le graphique cette partie du plan.
2. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Démontrer que $I = 1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}}$.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit H la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :
   $$H(x) = -\left(x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{-x}$$
   a. Calculer la dérivée H' de la fonction H.
   b. En déduire une primitive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ de la fonction g.
4. Déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$.


$\vec{\jmath}$
$\mathscr{C}_f$
O
$\vec{\imath}$

Exercice 8 Liban, juin 2009 (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{3}x$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée dans le graphique ci-dessous.
Ce graphique sera complété.

Partie A

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$. Tracer $\mathscr{D}$.
   c. Étudier la position relative de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{C}$.
   d. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - \frac{2}{3}x$.
   e. En déduire la limite de f en $-\infty$.
2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 2}{3\left(\mathrm{e}^x + 1\right)}$.
   b. En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

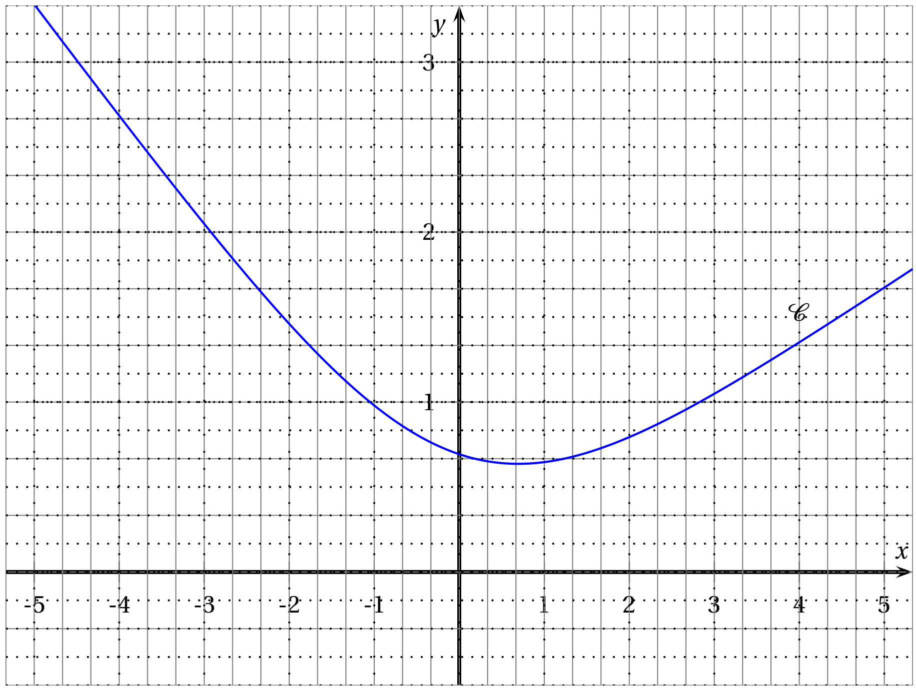
Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n, l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $d_n = \displaystyle\int_0^n \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$.
2. On admet que, pour tout réel x, $\ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
   Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \leqslant 1$. La suite $(d_n)_{n \geqslant 1}$ est-elle convergente ?

Partie C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe $\mathscr{C}$.
On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de $\mathscr{T}$ puis construire $\mathscr{T}$ sur le graphique.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soient M et N deux points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite $\mathscr{T}$.



y
x
3
2
1
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
𝒞

Exercice 9 Polynésie, juin 2009 (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

La courbe $\mathscr{C}$, donnée ci-dessous, est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, de fonction dérivée f' continue sur $[0\,;\,+\infty[$.

La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points O et $A\left(1\,;\,\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\right)$ et, sur $[0\,;\,1]$, elle est au dessus du segment $[OA]$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{e}}$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4\mathrm{e}}$.

Partie B

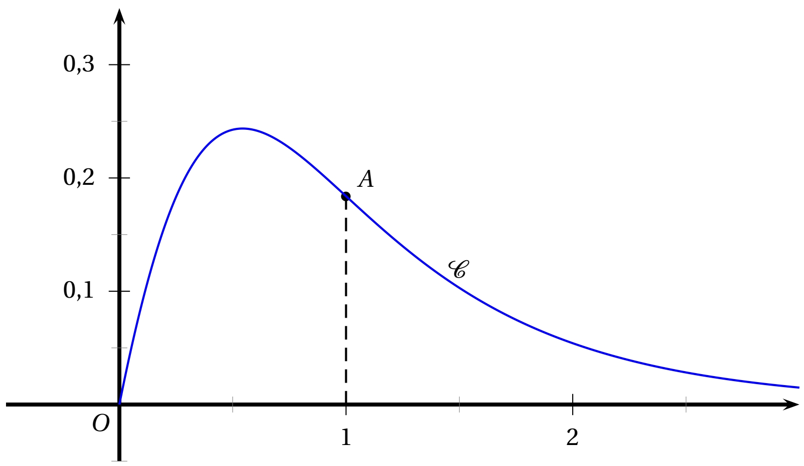
On sait désormais que la fonction f considérée dans la partie A est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.
   Établir que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. a. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.
   b. En déduire les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{2n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

   a. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   b. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-2n}\right)$.
   c. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

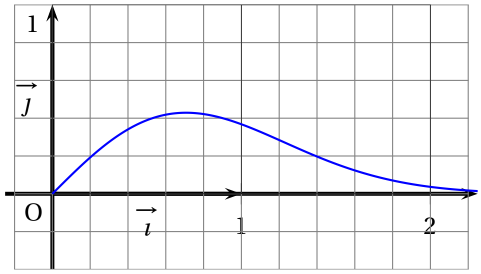


Exercice 10 Inde, avril 2009 (7 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\right)$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   (On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$).

   b. Démontrer que f admet un maximum en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

2. Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a, l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.
   Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

On ne cherchera pas à expliciter u_n.

1. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et de 1 :

   $$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$$

   b. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$?

   c. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

2. a. Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n, $F(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   On donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,4999382951	0,4999999437	0,5	0,5	0,5

   Interpréter ces résultats.

Exercice 11 Nouvelle – Calédonie, mars 2009 (6 points)

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. a. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$.
   En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;\,5]$.
2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_{-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

   Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.
   a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \geqslant 0$.
   b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
3. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b :

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = (-2-b)\mathrm{e}^{-b} + (2+a)\mathrm{e}^{-a}$$

   b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.
   c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
   d. Donner une interprétation graphique de cette limite.
4. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}$.
   Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?

Exercice 12 Antilles – Guyane, septembre 2008 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Démontrer que la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   c. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_1$.
2. a. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a :
   $$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$$
   b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. a. Que peut-on dire de la tangente $\mathscr{D}_2$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point I d'abscisse $\ln 3$?
   b. En utilisant les variations de la fonction f, étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_2$.
4. a. Montrer que la tangente $\mathscr{D}_3$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = \frac{1}{4}x + 1$.
   b. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente $\mathscr{D}_3$ sur l'intervalle $]-\infty ; \ln 3]$.
   On pourra utiliser la dérivée seconde de f notée f'' définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :
   $$f''(x) = \frac{12e^x\left(e^x - 3\right)}{\left(e^x + 3\right)^3}$$
5. On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.
   Tracer la courbe $\mathscr{C}$, les tangentes $\mathscr{D}_3$, $\mathscr{D}_3$ et les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$. On rappelle que l'unité graphique choisie est 2 cm.
6. a. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 3}$.
   b. Soit λ un réel strictement négatif.
   On note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$.
   Montrer que $\mathscr{A}(\lambda) = 4\ln 4 - 4\ln\left(e^\lambda + 3\right)$.
   c. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathscr{A}(\lambda)$.

Exercice 13 France / La Réunion, septembre 2008 (4 points)

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$J_n = \int_1^n \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
2. *Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

   On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par :

   $$I_n = \int_1^n (t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

   a. Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.

   b. En déduire que $J_n \leqslant I_n$.

   c. Calculer I_n en fonction de n. En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).

   d. Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

Exercice 14 Polynésie, septembre 2008 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(e^x + 2e^{-x}\right)$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

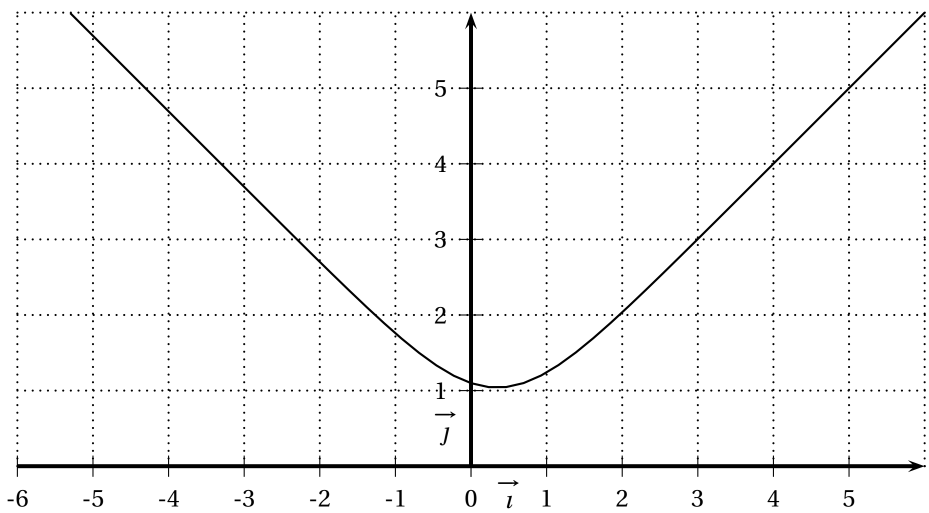
Partie A – Étude de la fonction *f*

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x + \ln\left(1 + 2e^{-2x}\right)$.
   On admet que, pour tout réel x, $f(x) = -x + \ln\left(2 + e^{2x}\right)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
   Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que la droite $\mathscr{D}'$ d'équation $y = -x + \ln 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
4. Étudier les variations de la fonction f.
   Montrer que le minimum de la fonction f est égal à $\dfrac{3}{2}\ln 2$.
5. Tracer les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sur le graphique ci-dessous.

Partie B – Encadrement d'une intégrale

On pose $I = \displaystyle\int_2^3 [f(x) - x]\,dx$.

1. Donner une interprétation géométrique de I.
2. Montrer que, pour tout $X \in [0\ ;\ +\infty[$, $\ln(1 + X) \leqslant X$.
3. En déduire que $0 \leqslant I \leqslant \displaystyle\int_2^3 2e^{-2x}\,dx$ et donner un encadrement de I d'amplitude 0,02.



Exercice 15 Centres étrangers, juin 2008 (7 points)

Partie A – Restitution organisée des connaissances

Prérequis : on rappelle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$.

Partie B – Étude d'une fonction *f*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.
   a. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b. Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Étude de la fonction f
   a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b. Déterminer la fonction dérivée de f et construire le tableau de variations de la fonction f.
3. Éléments graphiques et tracés.
   a. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.
   b. Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
   c. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ.

Partie C – Calcules d'aires

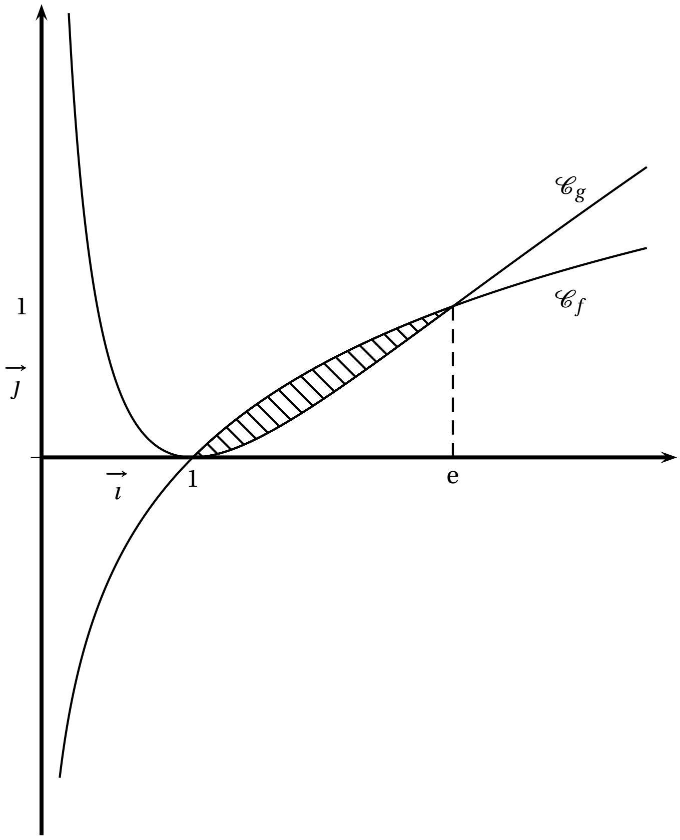
On note α un nombre réel strictement positif et on désigne par $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.

1. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$.
   a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\mathscr{A}(\alpha) = 1 - \dfrac{\ln \alpha}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha}$.
   b. Déterminer la limite ℓ de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse. sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Démontrer que $\ell = \mathscr{A}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

Exercice 16 France, juin 2008 (5 points)

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $\left(O~;~\vec{\imath}~;~\vec{\jmath}\right)$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln x)^2$$



1. On cherche à déterminer l'aire $\mathscr{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.
   On note $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x$.
   a. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.
   b. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = \mathrm{e} - 2I$.
   c. En déduire J.
   d. Donner la valeur de $\mathscr{A}$.
2. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*
   Pour x appartenant à l'intervalle $[1~;~\mathrm{e}]$, on note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ de même abscisse. Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

Exercice 17 La Réunion, juin 2008 (5 points)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$, construite dans un repère orthonormal, et son tableau de variations sont donnés ci-dessous.

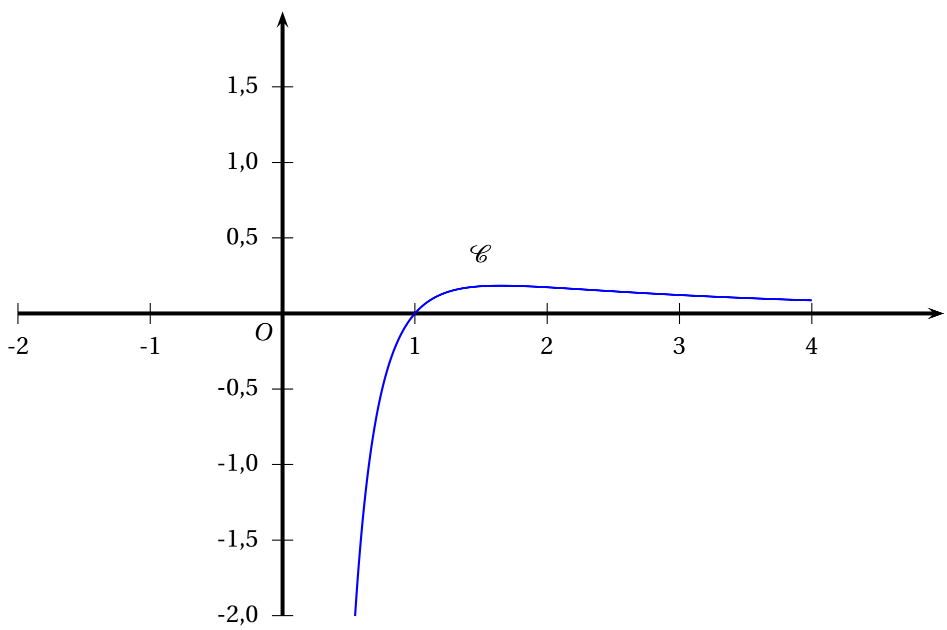
1. Le tableau de variations de f donne des propriétés sur les variations de la fonction, les limites aux bornes de l'ensemble de définition ainsi que l'extremum.
   Énoncer puis démontrer ces propriétés.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Existe-t-il des tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ qui contiennent le point O origine du repère ? Si oui, donner leur équation.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. a. Que représente f pour la fonction g ?
   b. En déduire le sens de variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Interpréter géométriquement les réels $g(3)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$.
3. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $g(x) = 1 - \frac{\ln x + 1}{x}$.
   b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.



x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

Exercice 18 Liban, juin 2008 (5 points)

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$.
On donne le tableau de ses variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	1

Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie A

1. En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe $\mathscr{C}$ susceptible de représenter f dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).
2. a. Interpréter graphiquement $g(2)$.
   b. Montrer que $0 \leqslant g(2) \leqslant 2,5$.
3. a. Soit x un réel supérieur à 2.
   Montrer que $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant x-2$. En déduire que $g(x) \geqslant x-2$.
   b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$.

Partie B

On admet que, pour tout réel t, $f(t)=(t-1)\mathrm{e}^{-t}+1$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer en fonction du réel x l'intégrale $\displaystyle\int_0^x (t-1)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire que, pour tout réel x, $g(x)=x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$.
3. Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

Exercice 19 Polynésie, juin 2008 (7 points)

Partie A – Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$.

- si $u \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$;
- pour tous réels α et β, $\displaystyle\int_a^b \left[\alpha u(x) + \beta v(x)\right]\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

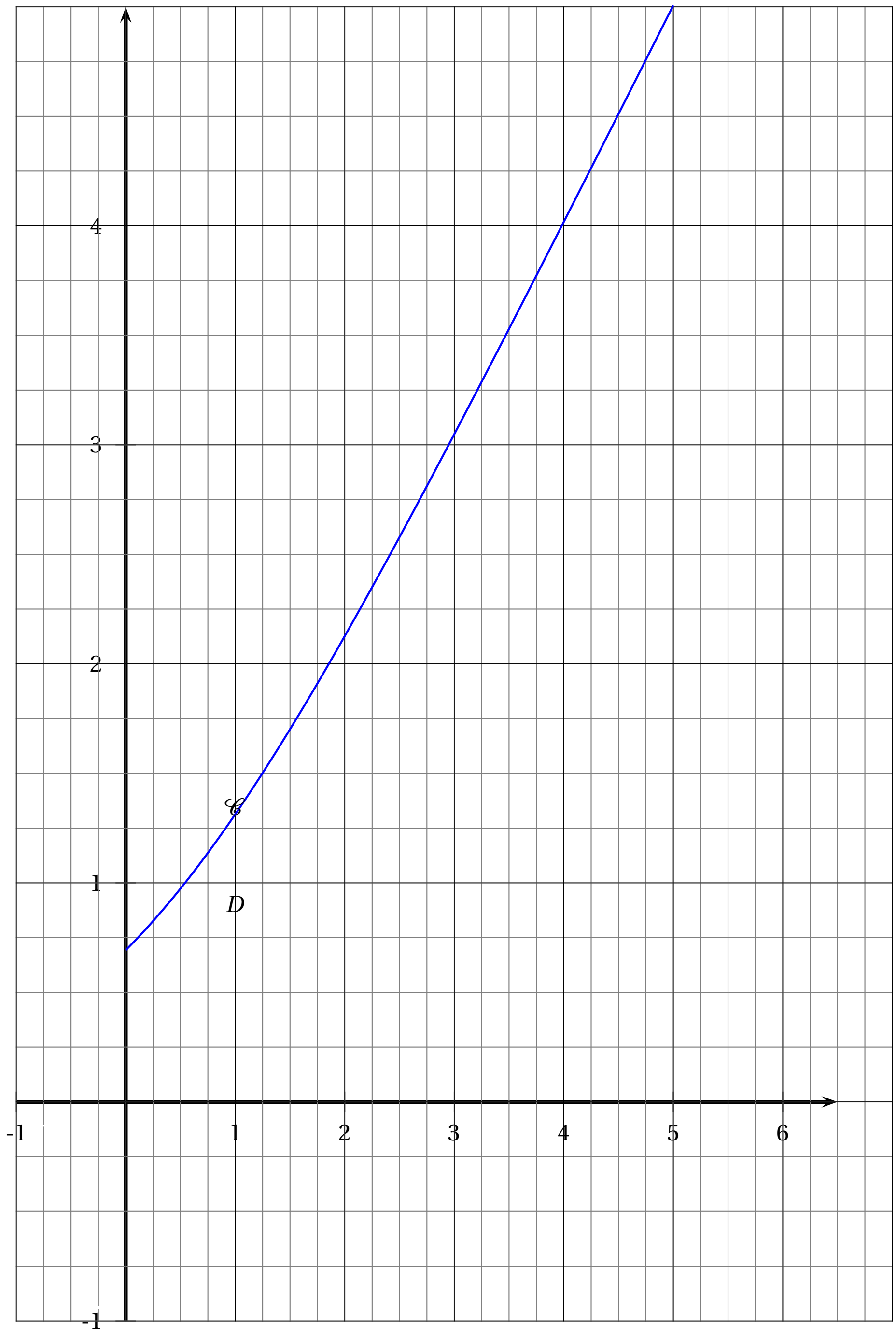
Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ sont données ci-dessous dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que f est croissante et positive sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. a. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite $\mathscr{D}$.
   b. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.
3. Soit I l'intégrale définie par : $I = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x) - x]\,\mathrm{d}x$.
   On ne cherchera pas à calculer I.
   a. Donner une interprétation géométrique de I.
   b. Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $\ln(1 + t) \leqslant t$ (on pourra étudier les variations de la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = \ln(1 + t) - t$). On admettra que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $\dfrac{t}{t+1} \leqslant \ln(1 + t)$.
   c. En déduire que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, on a :
   $$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x} + 1} \leqslant \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$$
   d. Montrer que $\ln\left(\dfrac{2}{1 + \mathrm{e}^{-1}}\right) \leqslant I \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-1}$.
   e. En déduire un encadrement de I d'amplitude $0,4$ par deux nombres décimaux.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On désigne par M et N les points de même abscisse x appartenant respectivement à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.
   On juge que M et N sont indiscernables sur le graphique lorsque la distance MN est inférieure à $0,5$ mm.
   Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles M et N sont indiscernables.


4
3
2
1
-1
$\mathscr{C}$
D
-1
1
2
3
4
5
6

Exercice 20 Amérique du Nord, mai 2008 (4 points)

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, \mathrm{d}t$$

1. a. Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.
   b. Étudier les variations de la suite (x_n).
   c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   b. En déduire la limite de la suite (x_n).
3. a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$$

   b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.
4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$.
   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_n$.

Exercice 21 Inde, avril 2008 (4 points)

1. Soit f et H les fonctions définies sur $[1\ ;\ +\infty[$ respectivement par :

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \quad \text{et} \quad H(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

   a. Justifier que f et H sont bien définies sur $[1\ ;\ +\infty[$.

   b. Quelle relation existe-t-il entre H et f ?

   c. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\right)$ du plan. Interpréter en termes d'aire le nombre $H(3)$.

2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre $H(3)$.

   a. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = x \times \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$.

   b. En déduire que $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\ln\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) - \int_1^3 \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$.

   c. Montrer que si $1 \leqslant x \leqslant 3$, alors $\ln\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) \leqslant \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \ln\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}\right)$.

   d. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_1^3 \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$ puis de $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 22 Antilles – Guyane, septembre 2007 (5 points)

Question de cours

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soient u et v deux fonctions continues, dérivables sur I telles que u' et v' soient continues sur I.
Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\,;\,b]$ de I.

Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
On note f' la fonction dérivée de f.
On suppose que f' est continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. Utiliser la question de cours pour montrer que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - \int_0^1 x f'(x)\,\mathrm{d}x$$

2. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \left[f(x) - f(1)\right]\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On désigne par ln la fonction logarithme nepérien.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$ dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

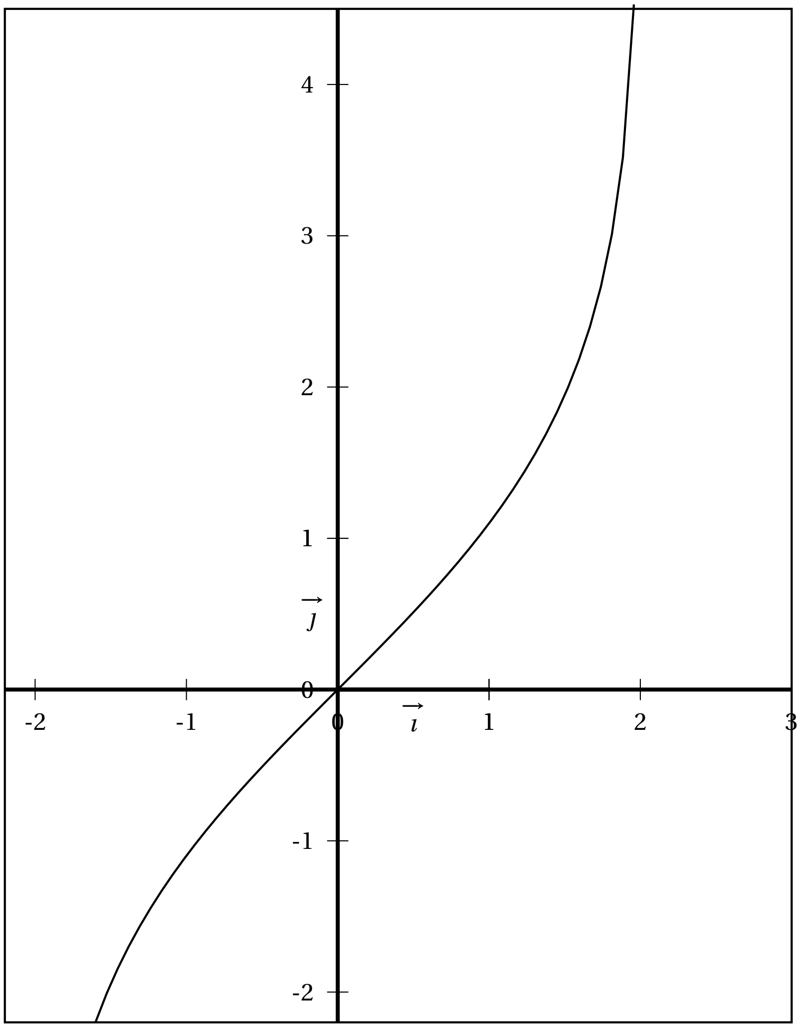
1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. a. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]-2\,;\,2[$, on a $f'(x) = \dfrac{4}{4-x^2}$.
   b. En déduire les variations de f sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$.

Partie C

La courbe $\mathscr{C}$ est tracée sur le graphique ci-dessous.
Hachurer sur ce graphique la partie $\mathscr{P}$ du plan constituée des points $M(x\,;\,y)$ tels que :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant y \leqslant \ln 3$$

En utilisant la partie A, calculer en cm^2 l'aire de $\mathscr{P}$.


4
3
2
1
$\vec{\jmath}$
0
-2
-1
0
$\vec{\imath}$
1
2
3
-1
-2

Exercice 23 Polynésie, septembre 2007 (7 points)

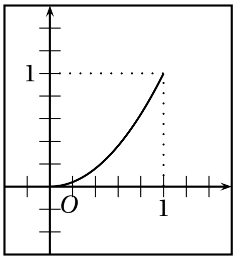
On désigne par (E) l'ensemble des fonctions f continues sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et vérifiant les conditions (P_1), (P_2) et (P_3) suivantes :

- (P_1) : f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$;
- (P_2) : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;
- (P_3) : pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, $f(x) \leqslant x$.

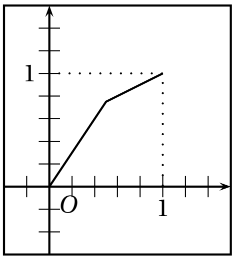
Dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\right)$ du plan, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f de l'ensemble (E) et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$.

À toute fonction f de (E), on associe le nombre réel $I_f = \displaystyle\int_0^1 [x - f(x)]\,\mathrm{d}x$.

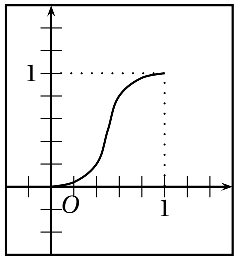
1. a. Une seule des trois courbes ci-dessous représente une fonction de (E). La déterminer en justifiant l'élimination des deux autres.



Courbe n° 1



Courbe n° 2



Courbe n° 3

   b. Montrer que, pour toute fonction f de (E), $I_f \geqslant 0$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $h(x) = 2^x - 1$ (on rappelle que, pour tout x réel, $2^x = \mathrm{e}^{x\ln 2}$).
   a. Montrer que la fonction h vérifie les conditions (P_1) et (P_2).
   b. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $\varphi(x) = 2^x - x - 1$.
   Montrer que, pour tout x de $[0\ ;\ 1]$, $\varphi(x) \leqslant 0$ (on pourra étudier le sens de variation de la fonction φ sur $[0\ ;\ 1]$).
   En déduire que la fonction h appartient à l'ensemble (E).
   c. Montrer que le réel I_h associé à la fonction h est égal à $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\ln 2}$.

3. Soit P une fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels tels que $0 < a < 1$. On se propose de déterminer les valeurs des réels a, b et c pour que la fonction P appartienne à l'ensemble (E) et que $I_p = I_h$.
   a. Montrer que la fonction P vérifie la propriété (P_2) si et seulement si, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, $P(x) = ax^2 + (1-a)x$.
   Montrer que toute fonction P définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $P(x) = ax^2 + (1-a)x$ avec $0 < a < 1$ appartient à (E).
   b. Exprimer en fonction de a le réel I_P associé à la fonction P.
   c. Montrer qu'il existe une valeur du réel a pour laquelle $I_P = I_h$. Quelle est cette valeur ?

Exercice 24 Amérique du Nord, juin 2007 (7 points)

1. **Restitution organisée de connaissances.**

   L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$.

   On supposera connus les résultats suivants :

   - la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;
   - $\mathrm{e}^0=1$;
   - pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x>x$;
   - soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A~;~+\infty[$ où A est un réel positif.
     Si pour tout x de $[A~;~+\infty[$, $\psi(x)\leqslant\varphi(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$.

   a. On considère la fonction g définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{x^2}{2}$.
      Montrer que pour tout x de $[0~;~+\infty[$, $g(x)\geqslant 0$.

   b. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$

2. On appelle f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{4}x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

   On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O~;~\vec{\imath}~;~\vec{\jmath}\right)$.
   La courbe $\mathscr{C}$ est représentée ci-dessous.

   a. Montrer que f est positive sur $[0~;~+\infty[$.

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour $\mathscr{C}$.

   c. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0~;~+\infty[$.

3. On considère la fonction F définie sur $[0~;~+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t$.

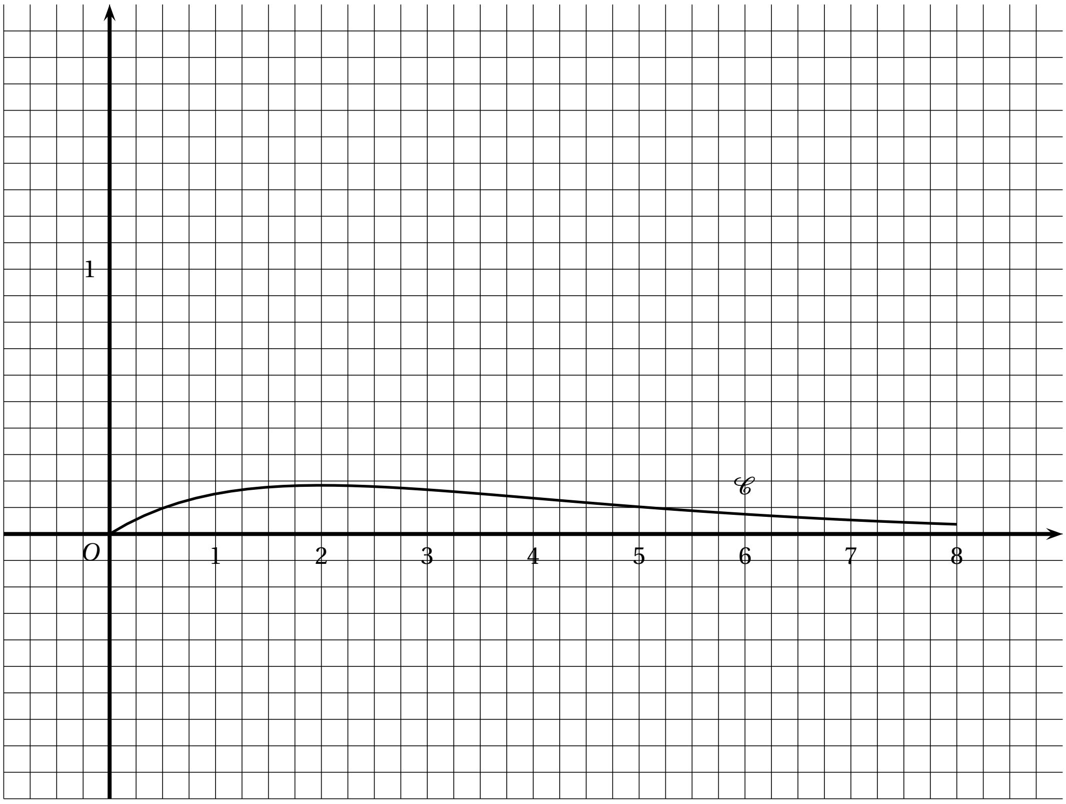
   a. Montrer que F est une fonction strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$.

   b. Montrer que $F(x)=1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}-\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

   c. Calculer la limite de F en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de F sur $[0~;~+\infty[$.

   d. Justifier l'existence d'un unique réel positif α tel que $F(\alpha)=0,5$.
      À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

4. Soit n un entier naturel non nul. On note A_n l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan située entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x=0$ et $x=n$.
   Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $A_n\geqslant 0,5$.


1
O
1
2
3
4
5
6
7
8
𝒞

Exercice 25 Antilles – Guyane, juin 2007 (6 points)

Question de cours

Prérequis : positivité et linéarité de l'intégrale.
Soient a et b deux réels d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur I telles que pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) \geqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie A

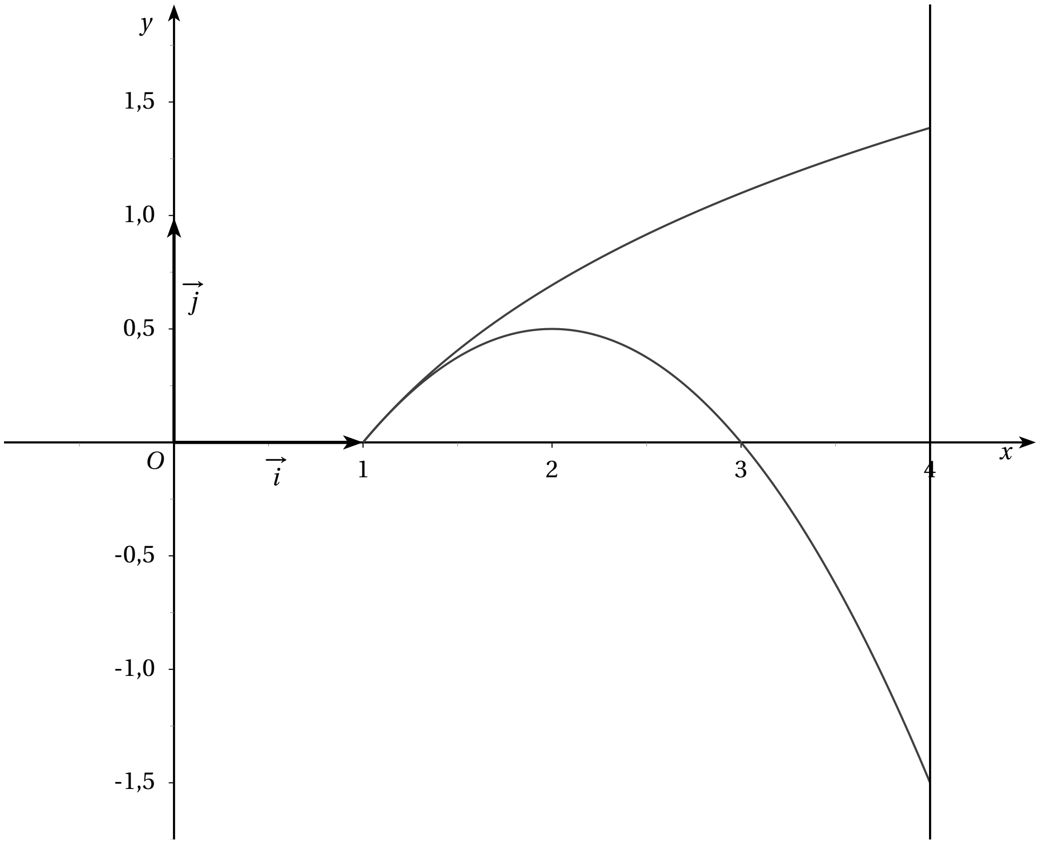
1. Soit x un réel supérieur ou égal à 1.
   Calculer en fonction de x l'intégrale $\int_1^x (2-t)\,\mathrm{d}t$.
2. Démontrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, on a : $2-t \leqslant \frac{1}{t}$.
3. Déduire de ce qui précède que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \leqslant \ln x$$

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$.
Sur le graphique ci-dessous, le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\right)$ dans lequel on a tracé les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1\ ;\ 4]$. On a a tracé également la droite Δ d'équation $x = 4$.

1. a. Démontrer que $\int_1^4 h(x)\mathrm{d}x = 0$.
   b. Illustrer sur le graphique le résultat de la question précédente.
2. On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan délimité par la droite Δ et les courbes représentatives des fonction h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1\ ;\ 4]$.
   En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire de $\mathscr{D}$ en unités d'aire.


y
1,5
1,0
0,5
-0,5
-1,0
-1,5
O
1
2
3
4
x

Exercice 26 Asie, juin 2007 (4 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à proposer un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si f est la fonction définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = \sin^2 x$, alors sa fonction dérivée vérifie, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \sin 2x$.
2. Soit f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 1]$, dont la dérivée est continue sur cet intervalle.
   Si $f(-1) = -f(1)$, alors : $\displaystyle\int_{-1}^{1} t f'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0 ; 3]$.
   Si $\displaystyle\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^3 g(t)\,\mathrm{d}t$, alors pour tout nombre réel x appartenant à $[0 ; 3]$: $f(x) \leqslant g(x)$.
4. Si f est solution de l'équation différentielle $y' = -2y + 2$ et si f n'est pas une fonction constante, alors la représentation de f dans un repère du plan, n'admet aucune tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 27 France, juin 2007 (3 points)

1. **Restitution organisée de connaissances**
   Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a\,;\ b]$.
2. Soient les deux intégrales définies par :

$$I = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x \quad \text{et } J = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x$$

   a. Démontrer que $I = -J$ et que $I = J + \mathrm{e}^{\pi} + 1$.
   b. En déduire les valeurs exactes de I et de J.

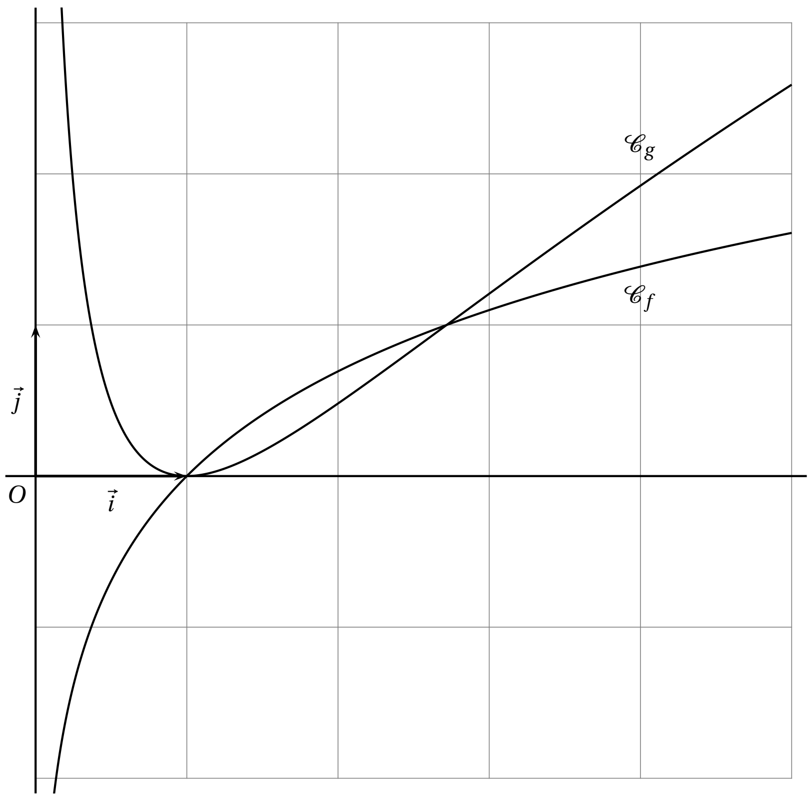
Exercice 28 Liban, juin 2007 (6 points)

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \text{ et } g(x) = (\ln x)^2$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthogonal. Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données dans le graphique ci-dessous.

1. a. Étudier le signe de $(\ln x)(1 - \ln x)$ sur $]0~;~+\infty[$.
   b. En déduire la position relative des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $]0~;~+\infty[$.
2. Pour x appartenant à $]0~;~+\infty[$, M est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et N est le point de $\mathscr{C}_g$ de même abscisse.
   a. Soit h la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.
   Étudier les variations de la fonction h sur $]0~;~+\infty[$.
   b. En déduire que sur l'intervalle $[1~;~e]$, la valeur maximale de la distance MN est obtenue pour $x = \sqrt{\text{e}}$.
   c. Résoudre dans $]0~;~+\infty[$ l'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$.
   d. En déduire que, sur $]0~;~1[\cup]\text{e}~;~+\infty[$, il existe deux réels a et b ($a < b$) pour lesquels la distance MN est égale à 1.
3. a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^{\text{e}} \ln x\,\text{d}x$.
   b. Vérifier que la fonction G définie sur $]0~;~+\infty[$ par $G(x) = x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right]$ est une primitive de la fonction g sur $]0~;~+\infty[$.
   c. On considère la partie du plan délimitée par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ en unités d'aire de cette partie du plan.



Exercice 29 Polynésie, juin 2007 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + x\ln x$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O~;~\vec{\imath}~;~\vec{\jmath}\right)$.
Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

Partie A

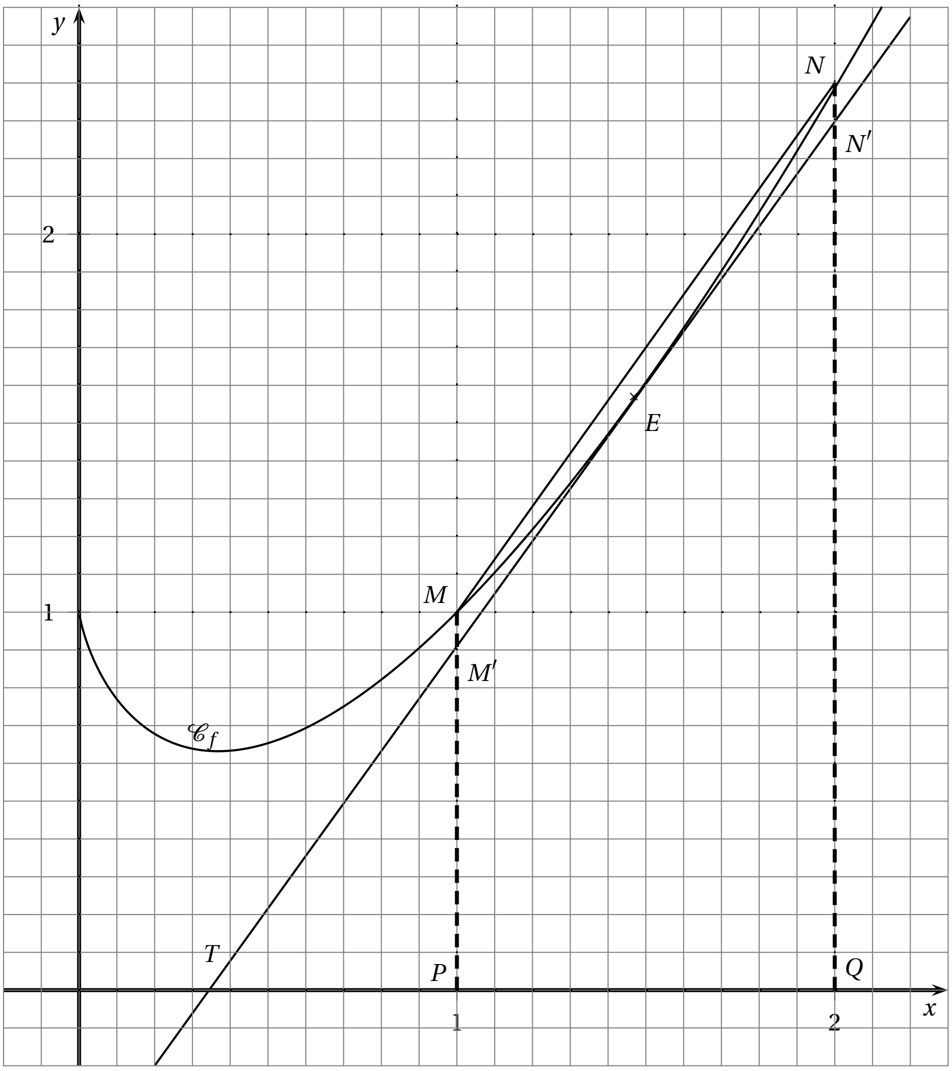
Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
On note M et N les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 1 et 2, P et Q leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses.
La figure est donnée ci-dessous.

1. a. Montrer que f est positive sur $[1~;~2]$.
   b. Montrer que le coefficient directeur de la droite (MN) est $2\ln 2$.
   c. Soit E le point d'abscisse $\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.
   Montrer que, sur l'intervalle $[1~;~2]$, le point E est l'unique point de $\mathscr{C}_f$ en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à (MN).
   d. On appelle T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point E.
   Montrer qu'une équation de T est $y = (2\ln 2)x - \dfrac{4}{\mathrm{e}} + 1$.
2. Soit g la fonction définie sur $[1~;~2]$ par $g(x) = f(x) - \left[(2\ln 2)x - \dfrac{4}{\mathrm{e}} + 1\right]$.
   a. Montrer que, pour tout x de $[1~;~2]$, $g'(x) = 1 + \ln\left(\dfrac{x}{4}\right)$.
   b. Étudier les variations de g sur $[1~;~2]$ et en déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de la tangente T sur cet intervalle.
3. Soient M' et N' les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite T. On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ reste sous la droite (MN) sur l'intervalle $[1~;~2]$ et que les points M' et N' ont des ordonnées strictement positives.
   a. Calculer les aires des trapèzes $MNQP$ et $M'N'QP$.
   b. En déduire, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de $\mathscr{A}$ d'amplitude 10^{-1}.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire la valeur exacte de $\mathscr{A}$.


y
x
2
1
1
2
N
N′
E
M
M′
$\mathscr{C}_f$
T
P
Q

Exercice 30 Asie, juin 2005 (7 points)

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.
On définit, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_1.
2. Établir que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{2^n}{n!}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:
$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$
4. Démontrer par récurrence que $\mathrm{e}^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots + \frac{2^n}{n!} + I_n$.
5. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{2^n}{n!}$.
   a. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}u_n$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.
6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n).
7. Justifier enfin que :
$$\mathrm{e}^2 = \lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots + \frac{2^n}{n!}\right)$$

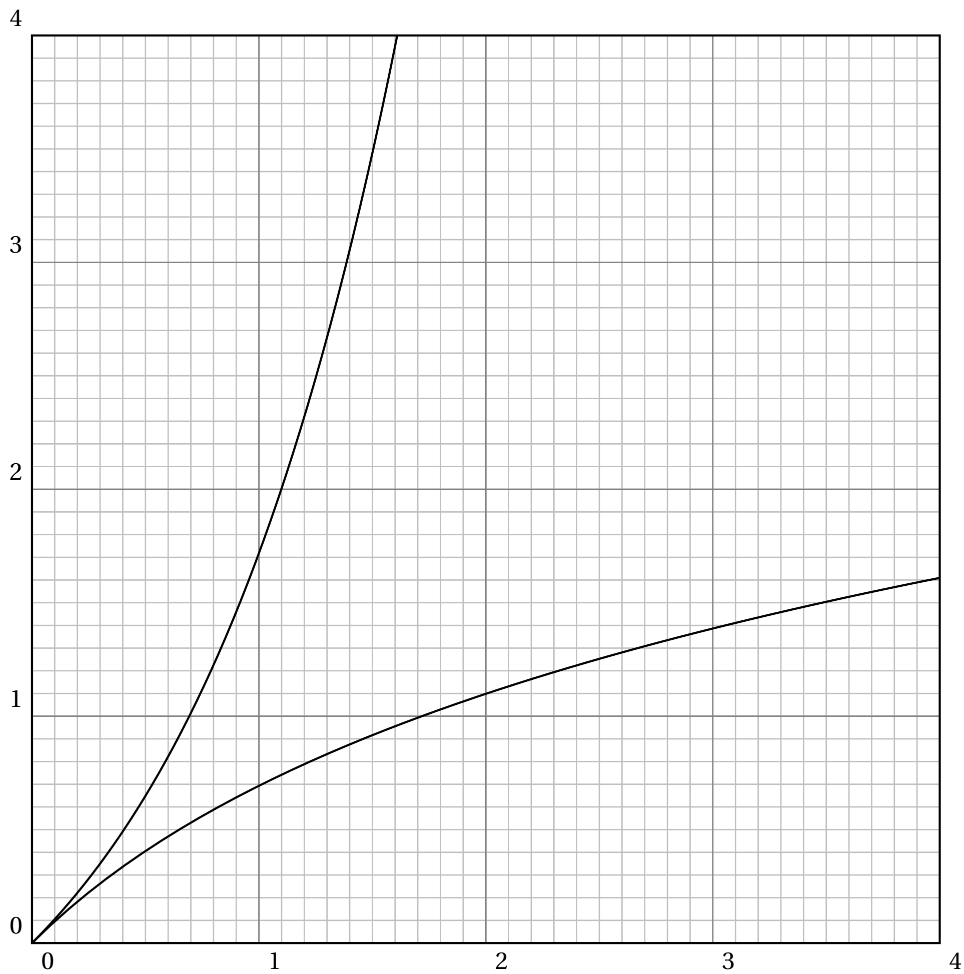
Exercice 31 La Réunion, juin 2005 (3 points)

On considère les fonctions f et g définies, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, par :

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^x - 1$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal $\left(O\,;\ \vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath}\right)$. Ces courbes sont tracées sur le graphique ci-dessous (le candidat en disposera comme il le jugera utile ; il sera à joindre à la copie, avec les éventuels ajouts effectués par le candidat).

1. Vérifier que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune au point $O(0\,;0)$. Préciser la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente.
2. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
3. Soit a un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer de deux façons différentes le nombre $I(a) = \displaystyle\int_0^a \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.
   a. En utilisant des considérations d'aires, démontrer que :
   $$I(a) = a\ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} \left(\mathrm{e}^x - 1\right)\mathrm{d}x$$
   b. En déduire la valeur de $I(a)$.
   c. Retrouver la valeur de $I(a)$ en effectuant une intégration par parties.



Exercice 32 Liban, juin 2005 (8 points)

Partie A

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que la fonction $f : t \mapsto (2-t)\mathrm{e}^t$ est une primitive de $g : t \mapsto (1-t)\mathrm{e}^t$ sur $[0; 1]$.
   En déduire la valeur de u_1.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad (R)$$

Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.
Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par la première calculatrice	Valeur de u_n affichée par la deuxième calculatrice
1	7,1828182845E−01	7,1828182846E−01
2	4,3656365691E−01	4,3656365692E−01
3	3,0969097075E−01	3,0969097076E−01
4	2,3876388301E−01	2,3876388304E−01
5	1,9381941508E−01	1,9381941520E−01
6	1,6291649051E−01	1,6291649120E−01
7	1,4041543358E−01	1,4041543840E−01
8	1,2332346869E−01	1,2332350720E−01
9	1,0991121828E−01	1,0991156480E−01
10	9,9112182825E−02	9,9115648000E−01
11	9,0234011080E−02	9,0272128000E−02
12	8,2808132963E−02	8,3265536000E−02
13	7,6505728522E−02	8,2451968000E−02
14	7,1080199309E−02	1,5432755200E−01
15	6,6202989636E−02	1,3149132800E+00
16	5,9247834186E−02	2,0038612480E+01
17	7,2131811612E−03	3,3965641216E+02
18	−8,7016273909E−01	6,1128154189E+03
19	−1,7533092042E+01	1,1614249296E+05
20	−3,5166184085E+02	2,3228488592E+06
21	−7,3858986580E+03	4,8779825043E+07
22	−1,6249077047E+05	1,0731561499E+09
23	−3,7372887209E+06	2,4682591448E+10
24	−8,9694930302E+07	5,9238219474E+11
25	−2,2423732585E+09	1,4809554869E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la relation de définition :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant 0$.
2. a. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel non nul n :

$$(1-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} \times (1-t)^n$$

   b. En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n) :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

Étant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = a \text{ et pour tout entier naturel non nul } n,\ v_{n+1} = (n+1)v_n - 1$$

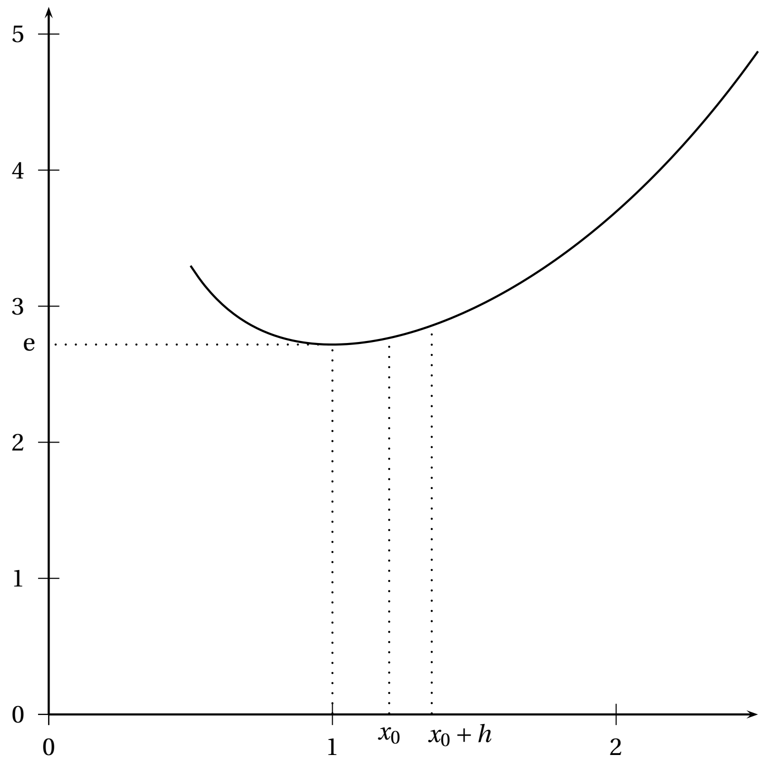
On s'intéresse à l'influence du terme initial a de cette suite sur son comportement à l'infini.

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n + (n!)(a+2-\mathrm{e})$ où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.
2. Étudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a.
   (On rappelle que $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$)
3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

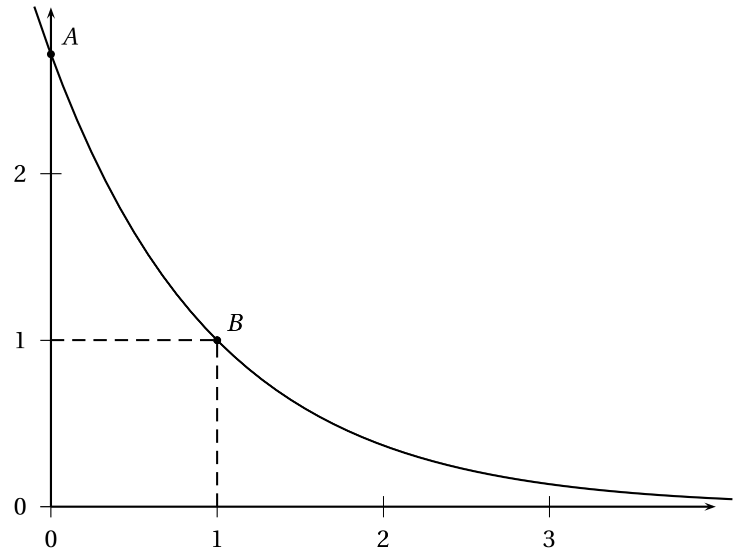
Exercice 33 Inde, avril 2005

On considère la fonction f, définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$.

1. a. Justifier la continuité de f sur $[1\,;\,+\infty[$.
   b. Montrer que f est croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.
2. **Restitution organisée de connaissances**
   On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.
   Pour tout réel x_0 de $[1\,;\,+\infty[$, on note $\mathscr{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$.
   On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1\,;\,+\infty[$ est une primitive de f.
   a. Que vaut $\mathscr{A}(1)$?
   b. Soit x_0 un réel quelconque de $[1\,;\,+\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :
   $$f(x_0) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x_0+h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$$
   c. Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ et tel que $x_0 + h \geqslant 1$?
   d. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$ ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$.
   e. Conclure.



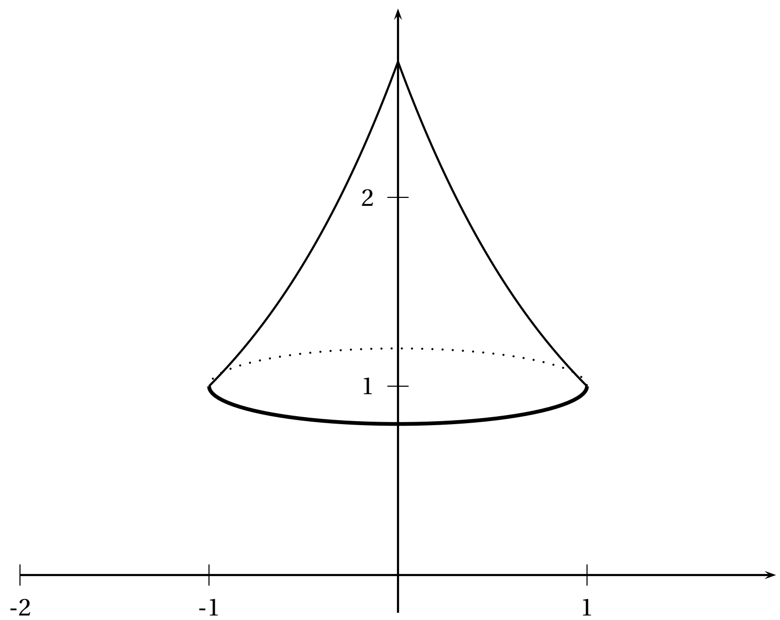
Exercice 34 Amérique du Sud, novembre 2004



On a représenté ci-dessus, dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle

$$(E)\ :\quad y' + y = 0 \quad \text{et telle que} \quad y(0) = \text{e}$$

1. Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.
2. Soit t un réel donné de l'intervalle $[1\,;\,\text{e}]$.
   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{e}^{1-x} = t$ d'inconnue x.
3. Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe.
   On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe $\overset{\frown}{AB}$ comme représenté ci-dessous. On note V son volume et on admet que $V = \pi \displaystyle\int_1^{\text{e}} (1-\ln t)^2\,\text{d}t$.
   Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.



Exercice 35 France, septembre 2004

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x\left(x^2-1\right)}.$$

   a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$:

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$

   b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

   Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer :

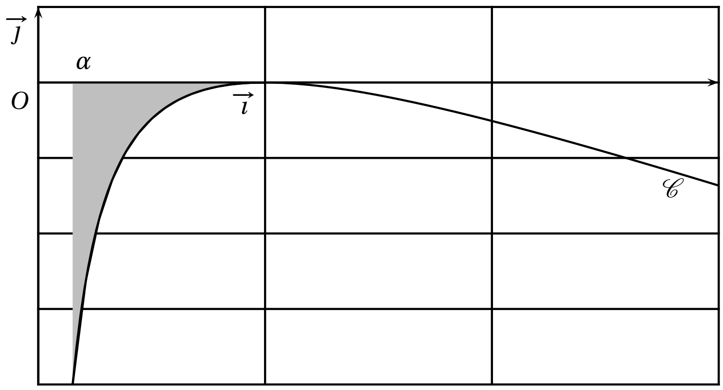
$$I = \int_2^3 \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2} \ln x \,\mathrm{d}x.$$

   On donnera le résultat exact sous la forme $p\ln 2 + q\ln 3$, avec p et q rationnels.

Exercice 36 Polynésie, septembre 2004

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x.$$



1. a. Montrer que f est dérivable et que, pour tout x strictement positif, $f'(x)$ est du signe de :

$$N(x) = -\left[2\left(x\sqrt{x} - 1\right) + \ln x\right].$$

   b. Calculer $N(1)$ et déterminer le signe de $N(x)$ en distinguant les cas $0 < x < 1$ et $x > 1$.

   c. En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et les coordonnées du point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée maximale.

2. On note $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où α désigne un réel de $]0\,;\,1[$.

   a. Exprimer $\mathscr{A}(\alpha)$ en fonction de α (on pourra utiliser une intégration par parties).

   b. Calculer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Donner une interprétation graphique de cette limite.

3. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 élément de $[1\,;\,2]$ et :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1.$$

   a. Démontrer, pour tout réel x élément de $[1\,;\,2]$, la double inégalité $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \leqslant 1$.

   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[1\,;\,2]$.

4. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

5. a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

   b. Déterminer la valeur exacte de ℓ.

Exercice 37 Antilles-Guyane, juin 2004

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Soit $a \in [0\,;+\infty[$. On note $I_0(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $I_0(a)$ en fonction de a.
2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_1(a)$ en fonction de a.
3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$.
   Démontrer en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$.
5. Soit $J(a) = \displaystyle\int_0^a (t-a)^5\,\mathrm{d}t$. Calculer $J(a)$.
6. a. Démontrer que pour tout $t \in [0\,;a]$, $\dfrac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geqslant (t-a)^5$.

   b. Démontrer que pour tout $a \in [0\,;+\infty[$, $J(a) \leqslant I_5(a) \leqslant 0$.
7. En déduire que pour tout $a \in [0\,;+\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leqslant \dfrac{a^6}{6}$.
8. Déterminer, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

Exercice 38 Polynésie, juin 2004

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+t+n}\,dt.$$

1. a. Déterminer le sens de variation de cette suite.

   b. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive.

   c. Montrer que pour tout $t \in [0\,;\,1]$ on a $\dfrac{e^{-t^2}}{1+t+n} \leqslant \dfrac{1}{1+n}$ et en déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   Que peut-on en conclure quant à la convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. On considère f et g deux fonctions définies sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = e^{-x} + x - 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}.$$

   a. Étudier le sens de variation et le signe de f.

   b. En déduire le sens de variation de g sur $[0\,;\,1]$.

   c. Établir, pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$, l'encadrement :

$$1 - x \leqslant e^{-x} \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

   d. En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout t appartenant à $[0\,;\,1]$.

   e. Établir l'encadrement :

$$\frac{2}{3(n+2)} \leqslant I_n \leqslant \frac{23}{30(n+1)}.$$

   f. Donner une valeur de p telle que $I_p \leqslant 10^{-2}$.

Exercice 39 Polynésie, septembre 2001

Pour tout naturel $n \geqslant 1$ on pose :

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}\,n!}\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.
2. Démontrer que pour tout naturel $n \geqslant 1$ on a :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

3. En déduire par récurrence que pour tout naturel $n \geqslant 1$ on a :

$$\sqrt{\mathrm{e}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!} + I_n.$$

4. Montrer que l'on peut trouver une constante A telle que :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^n\,n!}\mathrm{A}.$$

   On pourra déterminer A en majorant la fonction :

$$t \longmapsto (1-t)^n\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \text{ sur l'intervalle } [0\,;\,1].$$

   En déduire la limite quand n tend vers plus l'infini de :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!}.$$

Exercice 40 Inde, avril 2001

1. On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

   a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

   b. Prouver que, pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

   c. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n.$$

2. On considère la suite réelle (a_n), définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul :

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

   a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$a_n = \frac{1}{\mathrm{e}} + (-1)^n I_n.$$

   b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Exercice 41 France, juin 1999

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}}\, dt.$$

1. a. Soit φ la fonction définie sur $[0\,;2]$ par $\varphi(t) = \dfrac{2t+3}{t+2}$.
   Étudier les variations de φ sur $[0\,;2]$. En déduire que, pour tout réel t dans $[0\,;2]$:
   $$\frac{3}{2} \leqslant \varphi(t) \leqslant \frac{7}{4}.$$
   b. Montrer que, pour tout réel t dans $[0\,;2]$, on a :
   $$\frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} \leqslant \varphi(t) e^{\frac{t}{n}} \leqslant \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}}.$$
   c. Par intégration en déduire que :
   $$\frac{3}{2} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) \leqslant u_n \leqslant \frac{7}{4} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right).$$
   d. On rappelle que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.
   Montrer que, si (u_n) possède une limite ℓ, alors $3 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{7}{2}$.
2. a. Vérifier que, pour tout t dans $[0\,;2]$, on a : $\dfrac{2t+3}{t+2} = 2 - \dfrac{1}{t+2}$.
   En déduire l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\, dt$.
   b. Montrer que, pour tout t dans $[0\,;2]$, on a $1 \leqslant e^{\frac{t}{n}} \leqslant e^{\frac{2}{n}}$.
   En déduire que $I \leqslant u_n \leqslant e^{\frac{2}{n}} I$.
   c. Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

Exercice 42 Asie, juin 1998

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
$\mathbb{N}^*$ *est l'ensemble des entiers strictement positifs.*

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \,\mathrm{d}x.$$

1. a. Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $]1\,;\,\mathrm{e}[$ et pour tout entier naturel n, on a :

$$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0.$$

   b. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
2. a. Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
   b. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n.$$

   c. En déduire I_2, I_3 et I_4. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.
3. a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geqslant 0$.
   b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n \leqslant \mathrm{e}$.
   c. En déduire la limite de I_n.
   d. Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

Exercice 43 La Réunion, 1997

Pour n entier naturel non nul, soit f_n la fonction définie sur $I = [0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Soit a un élément non nul fixe dans I. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n(a) = \int_0^a f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer $I_0(a)$.
2. Montrer que, pour tout x de I et pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x) \quad \text{et} \quad f_n(0) = 0$$

   et en déduire que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-a}.$$

3. En déduire que pour tout $n > 0$, $I_n(a) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right)\mathrm{e}^{-a}$.
4. Dans cette question, on pose $a = 1$.
   On appelle (u_n) la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)\mathrm{e}^{-1} = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

   On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormal $\mathscr{R}$ (unité graphique : 4 cm).

   a. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$ et donner une interprétation géométrique de u_n.
   b. Montrer que pour tout entier naturel n, et pour tout $x \in [0\,;\,1]$:

$$f_n(x) \leqslant \frac{1}{n!}\,x^n.$$

   c. En déduire l'encadrement pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$$

   puis la limite de u_n.
   d. Déduire enfin que $\mathrm{e} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$.

Exercice 44 Bordeaux-Caen, 1986

On considère les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \quad ; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}.$$

1. a. Quelle est la dérivée de la fonction tangente ?

   b. Calculer I.

2. a. Soit la fonction $f : \left[0\,;\, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$.

   Démontrer que f est dérivable sur $\left[0\,;\, \frac{\pi}{4}\right]$ et que, pour tout x appartenant à cet intervalle :

   $$f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}.$$

   b. Déduire du calcul précédent une relation entre I et J, puis calculer J.

Exercice 45 Nancy-Metz, 1980

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

1. Déterminer une fonction polynôme P, de degré inférieur ou égal à 3, qui a même valeur et même nombre dérivé que f en 0 et 1.
2. Soit k la fonction numérique définie par :

$$k(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - 1.$$

   Factoriser k et en déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_P$, courbes représentatives de f et P, dans un repère $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\right)$ orthonormé du plan.
3. À l'aide d'un encadrement de $1+x$ pour $x \in [0\,;\,1]$, montrer que :

$$\frac{1}{240} < \int_0^1 k(x)\,\mathrm{d}x < \frac{1}{120}.$$

4. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x$.
5. Déduire des résultats précédents la valeur de $n \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\frac{n}{240} < \ln 2 < \frac{n+1}{240}.$$