TP - Introduction de la fonction exponentielle par la méthode d'Euler -

De nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques ou autres sont modélisés par une **fonction f qui est proportionnelle à sa dérivée f'**. (Par exemple, le phénomène de désintégration de noyaux radioactifs)
Nous allons ici nous intéresser à l'une des fonctions de ce type.
Plus particulièrement, que peut-on dire d'une **fonction qui serait égale à sa dérivée** ?

Nous connaissons déjà au moins une fonction égale à sa dérivée : la fonction nulle ! Mais cette fonction est sans intérêt. Notre objectif est d'en rechercher d'autres.

<u>Première partie (théorique)</u> : *de l'importance d'une "condition initiale"*

Supposons qu'il existe une fonction f, non nulle, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \text{ sur } \mathbb{R}$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $g = \lambda f$.

   Démontrer que : $g' = g$ sur $\mathbb{R}$

2. Soit g une fonction vérifiant aussi $g' = g$ sur $\mathbb{R}$.

   Que peut-on dire de $f + g$?

3. Supposons maintenant qu'il existe une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions :

$$(P)\ \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   a. On considère la fonction c définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$c(x) = f(x)f(-x)$$

   Montrer que c est une fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.

   En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

   b. Démontrer que si g est une fonction qui vérifie (P) alors $g = f$ sur $\mathbb{R}$.

   On pourra considérer la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h = \frac{g}{f}$ ...

> <u>Commentaire</u>
> On constate dans cette partie que s'il existe une fonction non nulle solution de l'équation différentielle $y' = y$, alors il en existe une infinité.
> Cependant, en imposant une condition initiale (ici $f(0) = 1$), s'il existe une solution à notre équation différentielle, alors elle est unique.

Dans la suite, la fonction f est l'unique fonction[(1)] satisfaisant les conditions

$$(P)\ \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Nous allons maintenant essayer de tracer la représentation graphique de f grâce à la méthode d'Euler.

(1) On suppose pour le moment qu'une telle fonction existe. La preuve rigoureuse de cette existence sera faite ultérieurement.

Deuxième partie (numérique) : *vers la représentation graphique*

On rappelle que si f est une fonction dérivable en a, alors il existe une fonction φ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

D'où l'approximation :

$$f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$$

Cette approximation est d'autant meilleure que h est petit.

C'est sur cette approximation (dite "affine") qu'est basée la méthode d'Euler.

1. En utilisant les conditions satisfaites par f, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$f(a+nh) \simeq (1+h)^n f(a)$$

2. On note (u_n) la suite définie, sur $\mathbb{N}$, par : $u_n = (1+h)^n f(a)$

   Démontrer que (u_n) est géométrique et préciser sa raison.

3. Dans cette question, on suppose $\boldsymbol{a = 0}$. On a donc :

$$f(nh) \simeq (1+h)^n$$

   a. On pose $x = nh$. Démontrer que pour n assez grand :

$$f(x) \simeq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

   Note : cette approximation est d'autant meilleure que n est grand.

   C'est cette suite $(u_n(x))$ définie par

   $$u_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

   que nous utiliserons pour montrer rigoureusement l'existence de la fonction exponentielle.

   b. A l'aide de la calculatrice (ou d'un tableur), tracer les courbes des approximations de la fonction f pour des valeurs de n égales à 10, 100, et 1000.

   c. En prenant $n = 10000$, donner une valeur approchée du nombre $f(1) \simeq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

   Note : le nombre $f(1)$ est encore noté $\mathbf{e}$. On a déjà vu (DM 2) que $\mathbf{e} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Voilà. Cette fonction f vérifiant les conditions $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ est appelée **fonction exponentielle**.

On vient de voir à quoi ressemble sa représentation graphique. Nous verrons, dans le cours, que cette fonction possède des propriétés remarquables notamment celle de transformer des "sommes" en "produits", c'est-à-dire :

pour tous réels x et y : $f(x+y) = f(x)f(y)$

Tiens, d'ailleurs, essayez de le montrer en fixant $y \in \mathbb{R}$ et en considérant la fonction g_y définie par :

$$g_y(x) = f(x+y)f(-x)$$

Si on arrivait à prouver que g_y est une fonction constante (égale à $f(y)$) sur $\mathbb{R}$, ce serait pas mal non ?

TP - Introduction de la fonction exponentielle par la méthode d'Euler - Corrigé

<u>Première partie (théorique)</u> : *de l'importance d'une "condition initiale"*

Supposons qu'il existe une fonction f, non nulle, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f$$

1. On a, sur $\mathbb{R}$: $$g' = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda f = g$$
   D'où : $$g' = g \text{ sur } \mathbb{R}$$
2. On a, sur $\mathbb{R}$: $$(f+g)' - (f+g) = f' - f + g' - g = 0$$
   D'où : $$(f+g)' = (f+g) \text{ sur } \mathbb{R}$$
   La fonction $f+g$ est aussi égale à sa dérivée.
3. Supposons maintenant qu'il existe une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions :
   $$(P)\ \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
   a. On considère la fonction c définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$c(x) = f(x)f(-x)$$
   La fonction c est dérivable sur $\mathbb{R}$ (puisque f l'est) et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$c'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x))$$
   Et puisque $f' = f$: $$c'(x) = c(x) - c(x) = 0$$
   Donc c est une fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.

   > Puisque $c = 1$ sur $\mathbb{R}$, on a :
   > pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(-x) = 1$
   > Cette propriété sera utile par la suite.

   Montrons que f ne s'annule pas (sur $\mathbb{R}$) en raisonnant par l'absurde :
   S'il existait un réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$, alors on aurait $c(x_0) = 0$, ce qui est absurde puisque $c = 1$ sur $\mathbb{R}$.
   Donc, l'hypothèse initiale est fausse.
   Donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

   > Puisque f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on a :
   > pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$

   b. Comme f ne s'annule pas, la fonction $h = \dfrac{g}{f}$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
   $$h' = \frac{g'f - gf'}{f^2} = 0 \text{ puisque } g' = g \text{ et } f' = f$$
   Là encore, on en déduit que h est constante sur $\mathbb{R}$ et comme :
   $$h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$$
   h est constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$, d'où : $$g = f \text{ sur } \mathbb{R}$$

Dans la suite, la fonction f est l'unique fonction[(1)] satisfaisant les conditions

$$(P)\ \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

[(1)] On suppose pour le moment qu'une telle fonction existe. La preuve rigoureuse de cette existence sera faite ultérieurement.

Deuxième partie (numérique) : *vers la représentation graphique*

On rappelle que si f est une fonction dérivable en a, alors il existe une fonction φ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

D'où l'approximation :

$$f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$$

Cette approximation est d'autant meilleure que h est petit.

C'est sur cette approximation (dite "affine") qu'est basée la méthode d'Euler.

1. On considère la propriété $\wp$, définie sur $\mathbb{N}$, par :

   $$\text{pour tout } a \in \mathbb{R}, \text{ et } h \text{ assez petit, } f(a+nh) \simeq (1+h)^n f(a)$$

   - Comme $f = f'$, on a : $\quad f(a+h) \simeq (1+h)f(a)$

     D'où $\wp(1)$. La propriété est donc initialisée au rang 1. (Et même au rang 0)
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\wp(n)$. Alors :

     $$f(a+(n+1)h) = f((a+nh)+h) \overset{\wp(1)}{\simeq} (1+h)f(a+nh) \overset{\wp(n)}{\simeq} (1+h)^{n+1} f(a)$$

     D'où $\wp(n+1)$.

     La propriété $\wp$ est donc héréditaire à partir du rang 1.

   Note : on sort ici du domaine des mathématique exactes. En effet, nous ne savons rien sur la transitivité du symbole $\simeq$. La méthode d'Euler est itérative et chaque erreur est reportée dans l'étape suivante sans que l'on puisse donner un majorant de l'erreur à l'étape n.

   D'après le principe du raisonnement par récurrence, on en déduit que la propriété $\wp$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Et comme elle triviale au rang 0, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$f(a+nh) \simeq (1+h)^n f(a)$$

   Bien comprendre la portée de cette approximation : si on connaît la valeur de f en a, alors on peut calculer des valeurs approchées de f en $a + nh$.

2. On note (u_n) la suite définie, sur $\mathbb{N}$, par : $\quad u_n = (1+h)^n f(a)$

   On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = (1+h)^{n+1} f(a) = (1+h)(1+h)^n f(a) = (1+h)u_n$

   La suite (u_n) est donc géométrique de raison $1 + h$.

3. Dans cette question, on suppose $\boldsymbol{a = 0}$. On a donc :

   $$f(nh) \simeq (1+h)^n$$

   a. Puisque $x = nh$, on a $h = \dfrac{x}{n}$ (n est supposé assez grand pour avoir h assez petit).

   Ainsi :

   $$f(x) \simeq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

   C'est cette suite $(u_n(x))$ définie par

   $$u_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

   que nous utiliserons pour montrer rigoureusement l'existence de la fonction exponentielle.

   b. Voir feuille suivante.

   c. En prenant $n = 10000$, on obtient :

   $$\mathbf{e} \simeq 2{,}71815$$

Enfin, montrons que l'exponentielle transforme les sommes en produits :

$$g_y(x) = f(x+y)f(-x)$$

$$g'_y(x) = f'(x+y)f(-x) - f(x+y)f'(-x) = 0 \quad \text{car } f' = f$$

Donc g_y est constante et comme $g'_y(0) = f(y)f(0) = f(y)$, il vient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(y) = f(x+y)f(-x)$$

Et comme, on vu que $f(x)f(-x) = 1$, nous obtenons finalement :

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

Courbes approchant la fonction exponentielle obtenues par la méthode d'Euler