Exercice 1

1. On se propose d'étudier la limite en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \qquad \text{pour } x \neq \frac{\pi}{2}.$$

   a) Vérifier que l'on est en présence d'une forme indéterminée.

   b) En considérant l'accroissement moyen de la fonction cosinus en $\frac{\pi}{2}$, déterminer la limite ci-dessus.

2. Par une méthode analogue, étudier les limites de f en a dans les cas suivants :

   a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ en $a = 0$.

   b) $f(x) = \dfrac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$ en $a = \dfrac{\pi}{4}$.

   c) $f(x) = \dfrac{\cos(\alpha x) - \cos\alpha}{\mathbf{e}^{-\alpha x^2} - \mathbf{e}^{-\alpha}}$ en $a = 1$.

   (On pourra utiliser les fonctions φ et ϕ définies par $\varphi(x) = \cos(\alpha x)$ et $\phi(x) = \mathbf{e}^{-\alpha x^2}$)

Exercice 2

On considère la fonction f définie, sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = |x^2 - 1|$.

1. Tracer dans un repère la parabole d'équation $y = x^2 - 1$ et en déduire le tracé de la courbe C_f représentative de f.
2. Vérifier que f est une fonction paire.
3. Étudier la limite à droite en 1, puis la limite à gauche en 1 de $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

   La fonction f est-elle dérivable en 1 ?
4. Donner les équations des demi-tangentes à la courbe C_f aux points d'abscisse 1 et -1. Tracer ces demi-tangentes.

Exercice 3

On dispose d'une ficelle de longueur ℓ. Soit x un réel de l'intervalle $[0 ; \ell]$. On se propose de "couper" la ficelle de façon à obtenir un morceau de longueur x et un morceau de longueur $\ell - x$.

Avec le morceau de longueur x, on forme un cercle, et avec l'autre un carré.

Déterminer la valeur de x pour laquelle la somme des aires des domaines obtenus est maximale.

Exercice 4

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 3x - 18$ et la fonction f définie sur $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 9}{x^2 - 1}.$$

1. Étude du polynôme P
   a) Montrer que 3 est une racine du polynôme P.
   b) Résoudre l'inéquation $P(x) \geqslant 0$.
2. Étude de la fonction f
   a) Montrer que $f(x) = x + \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-1}$ où α et β sont des réels que l'on déterminera.
   b) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
   c) Calculer la dérivée $f\,'$ de la fonction f. Étudier son signe (on pourra utiliser les résultats de la partie 1) et établir le tableau de variations de f.

Exercice 5

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sin x \text{ pour } x \in \left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3}\right]$$

1. Établir un encadrement de $f'(x)$ sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3}\right]$.
2. Démontrer que :

$$\frac{1}{12} \leqslant \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\pi} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{12}$$

Exercice 6

On considère la fonction f définie par :

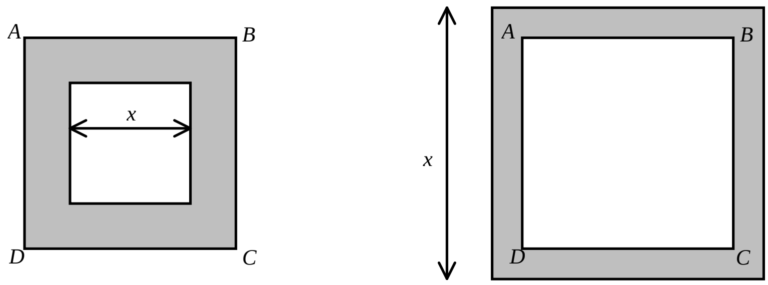
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$$

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique : 2 cm)

1. Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de C_f.
   [Indication : on pourra se placer dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ où $\Omega(2 ; 0)$.]
3. Étude de la fonction f sur $[4 ; +\infty[$
   a) Étudier la dérivabilité de la fonction f au point d'abscisse $x = 4$.
   b) Calculer la dérivée $f\,'$ de f. Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[4 ; +\infty[$.
   c) À l'aide de la question 2), tracer C_f pour $x \in [-2 ; 6] \cap D_f$.

Exercice 7

ABCD est un carré de côté 2. On considère un carré variable de côté x ($x > 0$) ayant le même centre et dont les côtés sont parallèles à ceux du carré *ABCD* :



On note $f(x)$ l'aire du domaine limité par les deux carrés.

1. Expliciter la fonction f.
2. Étudier la continuité de f en $x_0 = 2$.
3. Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 2$.

Exercice 8

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant 0. On note C_f sa représentation graphique.

1. Exprimer en fonction de $f(0)$ et $f'(0)$ l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0. On notera g la fonction affine correspondant à cette tangente.

   Vocabulaire : g est appelée "approximation affine de f en 0".
2. Déterminer l'approximation affine g de la fonction f en 0 lorsque $f(x) = (1+x)^2$.
3. On note $e(x) = |f(x) - g(x)|$ l'erreur de l'approximation. Trouver une expression simple de $e(x)$.
4. Expliquer comment déterminer, sans calculatrice, une approximation de $1{,}002^2$. Quelle est l'erreur commise dans cette approximation ?

Exercice 9

On considère la fonction f définie, pour $x \in \,]-\infty\,;1[\, \cup \,]1 +\infty[$, par :

$$f(x) = \frac{x^2+2x+6}{x-1}$$

On désigne par C_f sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité graphique : 2 cm)

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$; $+\infty$; 1^- et 1^+. Préciser les éventuelles asymptotes.
3. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 3$ est une asymptote oblique à C_f.
4. Calculer la fonction dérivée f'. Démontrer que $f'(x) = \dfrac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$
5. Établir le tableau de variations de la fonction f.
6. Tracer soigneusement C_f et Δ.

Exercice 10

Le but de cet exercice est de résoudre dans $[0\,;\,\pi]$ l'équation $1 - \frac{1}{2}x + \cos x = 0$ (x est en radians).

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,\pi]$ par $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \cos x$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier le sens de variation de f.
2. Déterminer une équation de chacune des tangentes D_1 et D_2 à la courbe $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses respectives 0 et π.
3. Tracer $\mathscr{C}$ ainsi que les deux tangentes D_1 et D_2 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 2 cm).
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution x_0 dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
5. Démontrer que $x_0 \in [1{,}7\,;\,1{,}8]$.
6. En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de x_0.

Exercice 11

On considère le polynôme $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 4$ et la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2}{2(x-2)}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et par $\mathscr{C}_P$ celle de P.

1. Étude du polynôme P
   a) Calculer la dérivée P' du polynôme P.
   b) Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole représentative de P.
2. Étude de la fonction f
   a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
   b) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
   c) Démontrer que la dérivée f' de la fonction f est $f'(x) = \dfrac{x(x^2 - 6x + 12)}{(x-2)^2}$
   d) Quel est le signe de $x^2 - 6x + 12$? En déduire celui de $f'(x)$.
   e) Dresser le tableau de variations de f.
   f) Tracer les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_P$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 1cm).
   g) Montrer que $f(x) = ax^2 + bx + c + \dfrac{d}{x-2}$ où a, b, c et d sont des réels que l'on déterminera.
   h) En déduire que $f(x) - P(x) = -\dfrac{8}{x-2}$. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} [\,f(x) - P(x)\,]$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [\,f(x) - P(x)\,]$

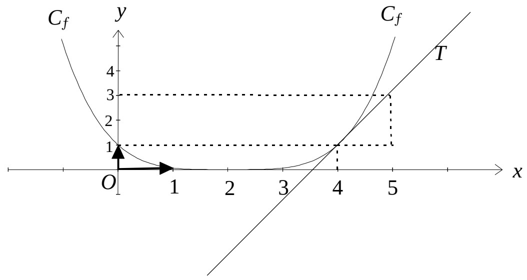
Exercice 12

Sur le graphique ci-dessous sont représentées la courbe C_f de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^4$$

ainsi que la tangente T à C_f au point d'abscisse $x_0 = 4$.

1. Donner, par lecture graphique, et sans justification, la valeur du nombre $f'(4)$.
2. Déterminer, à l'aide du calcul de la dérivée de f, la valeur du nombre $f'(3)$.



Exercice 13

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + 3x + 2$$

1. Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction g.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1 ; 0]$.
4. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
5. En déduire le signe de la fonction g.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$$

On note C_f sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(Unités graphiques conseillées : 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 4 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées)

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{x\,g(x)}{\left(x^2+1\right)^2}$.

   En déduire le tableau de variations de la fonction f. (On ne précisera pas la valeur exacte de $f(\alpha)$)
3. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse $x_0 = 0$.
4. Tracer T et C_f. (On se limitera à l'intervalle $[-2 ; 2]$)

Exercice 14

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 10}{x+1}$$

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unités : 1 cm par axe)

1. Calculer $f(0)$. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des ordonnées.
2. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.
3. Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

4. Étudier les limites de f en -1^+ et en -1^-. En déduire que la courbe C_f admet une asymptote verticale D dont on précisera l'équation.
5. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. La courbe C_f admet-elle une asymptote horizontale ?
6. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 6$ est asymptote oblique à la courbe C_f en $+\infty$ et en $-\infty$. Préciser la position relative de C_f et de Δ.
7. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe. En déduire le tableau de variation de f.
8. Déterminer une équation des tangentes T_{-2} et T_{-3} aux points de la courbe C_f d'abscisses respectives -2 et -3.
9. Tracer, dans le repère, D, Δ, T_{-2}, T_{-3} et C_f. (On se limitera à $[-10 ; -1[\cup]-1 ; 6]$)

Exercice 15

Le but de cet exercice est de démontrer que : $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}t} - 1}{t} = \mathbf{i}$.

1. Première méthode

   En considérant le taux de variation en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{i}t}$, déterminer la limite ci-dessus. (On admettra que la fonction f qui est a valeurs complexes est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(t) = \mathbf{i}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}t}$)
2. Deuxième méthode

   Démontrer que $\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}t} - 1}{t} = \frac{2\mathbf{i}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{t}{2}} \sin\frac{t}{2}}{t} = \mathbf{i}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{t}{2}} \frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}$. En déduire la limite ci-dessus.

Exercice 16

Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I = [0 ; 1]$ telles que : $f(0) = g(0)$ et $f' \leqslant g'$ sur I.

Démontrer que $f \leqslant g$ sur I. (On pourra étudier les variations de $g - f$)

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

1. Démontrer que f est bornée.
2. Étudier la parité de f.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.
4. Démontrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1 ; 1[$.