EXERCICES SUR LE CALCUL INTÉGRAL

Exercice 1

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{e}^{-nx} \sin x \, \mathrm{d}x$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{e}^{-nx} \cos x \, \mathrm{d}x$

1. Calculer I_0 et J_0.
2. On suppose maintenant que n est non nul.
   a) En intégrant par parties I_n, puis J_n, montrer que : $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = \mathbf{e}^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$
   b) En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

Exercice 2

On pose pour tout entier naturel n non nul : $I_n = \int_1^{\mathbf{e}} x^2 (\ln x)^n \, \mathrm{d}x$

1. Calculer $I_0 = \int_1^{\mathbf{e}} x^2 \, \mathrm{d}x$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.
3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $3I_{n+1} + (n + 1)I_n = \mathbf{e}^3$.
4. En déduire I_2.
5. Démontrer que, pour tout entier naturel n, I_n est positive.
6. Déduire de la question 3 que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$I_n \leqslant \frac{\mathbf{e}^3}{n+1}$$

7. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^4 x$

1. Exprimer $\sin^2 x$ ainsi que $\cos^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$.
2. Exprimer $\sin^4 x$ en fonction de $\cos(2x)$ et $\cos(4x)$
3. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x) \, \mathrm{d}x$.

Exercice 4

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathbf{e}^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$

1. À l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que :

$$I_n = (-1)^n \mathbf{e}^{-n\pi} \frac{\mathbf{e}^{-\pi} + 1}{2}$$

2. Démontrer que la suite (I_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.

Exercice 5

On pose pour tout entier naturel n : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, \mathrm{d}x$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.

2. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \geqslant 2$:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

(On pourra remarquer que $\cos^n x = \cos x \times \cos^{n-1} x$)

3. En déduire I_3 et I_4.

Exercice 6

1. Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, \mathrm{d}x$.

2. On désire maintenant calculer l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, \mathrm{d}x$
   a) Démontrer que $\cos^5 x = \cos x(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)$
   b) En déduire J.

Exercice 7

On rappelle les formules d'Euler :

$$\cos x = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} + \mathbf{e}^{-\mathbf{i}x}}{2} \qquad \sin x = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}}$$

1. Exprimer $\cos^2 x$ en fonction de $\cos x$.

2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, \mathrm{d}x$.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{\mathbf{e}^x}{1+\mathbf{e}^x}$.

On note C sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unités graphiques : 2 cm par axes)

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Préciser les éventuelles asymptotes.
2. Calculer la fonction dérivée f' de f et préciser son signe.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C en 0.
5. Tracer la courbe C et ses éventuelles asymptotes ainsi que la droite T.
6. Calculer l'aire du domaine suivant en cm^2 :

$$D = \{M(x\,;y) \text{ tels que } -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

Exercice 9

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_1^{\mathbf{e}} x(\ln x)^n \, \mathrm{d}x$

1. Calculer I_1 et I_2.
2. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$: $I_n = \dfrac{\mathbf{e}^2}{2} - \dfrac{n}{2} I_{n-1}$.
3. Calculer I_3 et I_4.

Exercice 10

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\dfrac{2x^2+3x}{x+2} = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$ pour tout réel $x \neq -2$.
2. Calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{2x^2+3x}{x+2}\,\mathrm{d}x$.
3. Calculer l'intégrale : $J = \displaystyle\int_0^2 (4x+3)\ln(x+2)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathbf{e}^x}$

Le but de l'exercice est calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour cela, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - f(x)$.

1. Calculer une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 12

Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^{\pi} (at^2+bt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$

Exercice 13

Soient α et β deux entiers naturels. On pose :

$$I(\alpha\,;\,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\beta}\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer $I(\alpha\,;\,0)$.
2. On suppose que $\beta \geqslant 1$. À l'aide d'un intégration par parties, démontrer que :

$$I(\alpha\,;\,\beta) = \frac{\beta}{\alpha+1}\,I(\alpha+1\,;\,\beta-1)$$

3. En déduire que : $I(\alpha\,;\,\beta) = \dfrac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta)!}\,I(\alpha+\beta\,;\,0)$ puis que $I(\alpha\,;\,\beta) = \dfrac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta+1)!}$

Exercice 14

Le but de cet exercice est d'étudier l'intégrale :

$$I(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

On pose, pour tout réel $x > 0$: $J(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $K(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, démontrer que $K(x) = -J(x)$. Conclure.

Exercice 15

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 x^2 \, dx \qquad J = \int_0^1 \mathbf{e}^x \, dx \qquad K = \int_{-1}^1 x\mathbf{e}^{x^2} \, dx \qquad L = \int_1^3 \frac{3x}{x^2+1} \, dx$$

Exercice 16

1. Factoriser, sur $\mathbb{R}$, le polynôme $P = X^3 - 1$.
2. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+x+1}{x^3-1} \, dx$.

Exercice 17

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 0$ par :

$$u_n = \int_1^2 \mathbf{e}^{-nt^2} \, dt$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [1 ; 2]$: $0 \leqslant \mathbf{e}^{-nt^2} \leqslant \mathbf{e}^{-nt}$
2. En déduire que : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\mathbf{e}^{-n} - \mathbf{e}^{-2n}}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 18

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 0$ par :

$$u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) \, dx$$

1. Calculer $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \ln(x+1) \, dx$ et u_1.
2. Démontrer que : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 19

Le but de cet exercice est d'étudier l'intégrale : $I = \displaystyle\int_{-3}^0 x^2 \mathbf{e}^x \, dx$

1. En étudiant l'application $f : x \mapsto x^2 \, \mathbf{e}^x$, démontrer que f est bornée sur $[-3 ; 0]$.

   En déduire que : $0 \leqslant I \leqslant \dfrac{12}{\mathbf{e}^2}$.

2. À l'aide de deux intégrations par parties, démontrer que $I = 2 - \dfrac{17}{\mathbf{e}^3}$.

Exercice 20

Soit f une fonction strictement positive et intégrable sur un intervalle $I = [a ; b]$ (avec $a < b$).

Soit $J = [c ; d]$ (avec $c < d$) tel que : $J \subset I$.

Démontrer que :

$$\int_c^d f(x) \, dx \leqslant \int_a^b f(x) \, dx$$

Exercice 21

1) Résoudre le système $\begin{cases} x - 3y = 2\ln 2 \\ x + y = 4\ln 2 \end{cases}$.

2) On pose $I = \int_0^{\ln 16} \frac{\mathbf{e}^x + 3}{\mathbf{e}^x + 4}\,\mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{\mathbf{e}^x + 4}\,\mathrm{d}x$. Calculer $I - 3J$ et $I + J$. Déduire de la question 1) les valeurs exactes de I et J.

Exercice 22

Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $h(x) = (\ln x)^2$

1. Calculer la dérivée h' de la fonction h.
2. Calculer l'intégrale : $I = \int_1^{\mathbf{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 23

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + x - \mathbf{e}^{-\frac{x}{2}}$

On note C_f sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\ \vec{i}, \vec{j}\ )$. (Unités graphiqes : 2 cm)

1. a. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Montrer que la droite D d'équation $y = 1 + x$ est asymptote oblique à la courbe C_f en $+\infty$.
   c. Étudier la position de C_f par rapport à D.
2. a. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
   b. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Tracer, dans le repère $(O,\ \vec{i}, \vec{j}\ )$ la courbe C_f et la droite D.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On désigne par A_n l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimité par la droite D, la courbe C_f et les droites d'équation $x = n$ et $x = n + 1$.

1. Hachurer, sur le graphique le domaine défini ci-dessus pour $n = 2$.
2. Exprimer A_n en fonction de n.
3. En déduire que la suite (A_n) est géométrique. On précisera sa raison q et son premier terme A_1.
4. Exprimer la somme $S_n = A_1 + A_2 + ... + A_n$ en fonction de n. Que représente S_n graphiquement ?
5. Calculer la limite de la suite (S_n).

Exercice 24

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_1^{\mathbf{e}} \frac{(\ln x)^{2n-1}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n(n+1)}$