Recueil d'annales en Mathématiques

Terminale S - Enseignement obligatoire

Problèmes d'analyse

Frédéric Demoulin[1]

Dernière révision : 8 août 2005

[1] frederic.demoulin@voila.fr

Tableau récapitulatif des exercices

⋆ indique que cette notion a été abordée dans l'exercice

F.R. : fonctions rationnelles ; E.D. : équations différentielles ; S.F. : suites de fonctions ; S.N. : suites numériques

N°	Lieu	Année	exp	ln	F.R.	E.D.	Intégrales	S.F.	S.N.	Trigo.	Baryc.
1	Amérique du Nord	Juin 2004	⋆			⋆	⋆	⋆			
2	Asie	Juin 2004		⋆			⋆		⋆		
3	Centres étrangers	Juin 2004	⋆		⋆		⋆	⋆	⋆		
4	Inde	Avril 2004	⋆	⋆	⋆		⋆				
5	Nouvelle-Calédonie	Mars 2004	⋆				⋆		⋆		
6	Amérique du Sud	Nov 2003	⋆				⋆		⋆		
7	Nouvelle-Calédonie	Nov 2003			⋆		⋆	⋆	⋆	⋆	
8	Antilles-Guyane	Sept 2003	⋆	⋆			⋆		⋆		
9	France	Sept 2003	⋆			⋆	⋆		⋆		
10	Polynésie	Sept 2003		⋆			⋆		⋆		
11	Amérique du Nord	Juin 2003	⋆	⋆			⋆		⋆		
12	Antilles-Guyane	Juin 2003	⋆			⋆	⋆				
13	Asie	Juin 2003		⋆			⋆		⋆		
14	Centres étrangers	Juin 2003		⋆							
15	France	Juin 2003	⋆			⋆					
16	La Réunion	Juin 2003	⋆			⋆	⋆				
17	Liban	Juin 2003	⋆				⋆		⋆		
18	Polynésie	Juin 2003	⋆			⋆	⋆			⋆	
19	Inde	Avril 2003	⋆		⋆		⋆				
20	Nouvelle-Calédonie	Mars 2003		⋆			⋆		⋆		
21	Amérique du Sud	Nov 2002	⋆				⋆		⋆		
22	Nouvelle-Calédonie	Nov 2002	⋆				⋆		⋆		
23	Antilles-Guyane	Sept 2002		⋆	⋆		⋆				
24	France	Sept 2002	⋆	⋆			⋆				
25	Polynésie	Sept 2002	⋆	⋆			⋆				
26	Amérique du Nord	Juin 2002	⋆	⋆			⋆				
27	Antilles-Guyane	Juin 2002	⋆				⋆	⋆	⋆		
28	Asie	Juin 2002		⋆			⋆				
29	Centres étrangers	Juin 2002	⋆	⋆			⋆	⋆	⋆		
30	France	Juin 2002	⋆				⋆				⋆
31	La Réunion	Juin 2002	⋆				⋆	⋆	⋆		
32	Liban	Juin 2002									
33	Polynésie	Juin 2002	⋆				⋆	⋆	⋆		

Exercice 1 Amérique du Nord, Juin 2004

Partie A

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(E_n) \quad y' + y = \frac{x^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel :

$$g(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

   (a) Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel :

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}\,.$$

   (b) En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$.
   Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation :

$$(F) \quad y' + y = 0.$$

   (b) Résoudre (F).
   (c) Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n).
   (d) Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie B

Le but de cette partie est de montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} \quad \text{(on rappelle que par convention } 0! = 1\text{)}.$$

1. On pose, pour tout x réel,

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x},\ \ f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

   (a) Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.
   (b) Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.
   En utilisant la partie **A**, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geqslant 1$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x. \quad \text{(on ne cherchera pas à calculer } I_n\text{)}$$

   (a) Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle $[0\,;\,1]$, l'encadrement :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{x^n}{n!}\,.$$

   En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n).

(b) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité :

$$I_k - I_{k-1} = -\frac{1}{k!}\,\mathrm{e}^{-1}.$$

(c) Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que :

$$I_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}.$$

(d) En déduire finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

Exercice 2 Asie, Juin 2004

Partie A – Étude d'une fonction f

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \ln(1+2x).$$

1. Justifier que f est strictement croissante sur l'intervalle I.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\frac{1}{2}$.
3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par $g(x) = f(x) - x$.
   (a) Étudier les variations de g sur l'intervalle I.
   (b) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions : 0 et une autre, notée β, appartenant à l'intervalle $[1\,;\,2]$.
   (c) En déduire le signe de $g(x)$, pour x appartenant à l'intervalle I.
4. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,\beta[$, $f(x)$ appartient aussi à $]0\,;\,\beta[$.

Partie B – Étude d'une suite récurrente

On appelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n appartient à $]0\,;\,\beta[$.
2. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
3. Justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

Partie C – Recherche de la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$

1. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $f'(x) \leqslant \frac{2}{3}$.
2. Recherche de la limite de la suite $(u_n)_{\geqslant 0}$
   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_{u_n}^{\beta} f'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{3}(\beta - u_n)$.

(b) En déduire que pour tout entier naturel n, $\beta - u_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}(\beta - u_n)$, puis à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $0 \leqslant \beta - u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(c) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$?

Exercice 3 Centres étrangers, Juin 2004

On s'intéresse à des courbes servant de modèle à la distribution de la masse salariale d'une entreprise. Les fonctions f associées définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ doivent vérifier les conditions suivantes :
(1) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;
(2) f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$
(3) Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) \leqslant x$.
Le plan est rapporté au repère orthonormal $\mathscr{R} = (O\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath})$, unité graphique 10 cm.

Partie A – Étude d'un modèle

On appelle g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$g(x) = x\mathrm{e}^{x-1}.$$

1. Prouver que g vérifie les conditions (1) et (2).
2. Montrer que $g(x) - x = \frac{x}{\mathrm{e}}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e})$ et en déduire que g vérifie la condition (3).
3. Tracer les droites d'équations $y = x$ et $x = 1$ et la courbe représentative de g dans le repère $\mathscr{R}$.

Partie B – Un calcul d'indice

Pour une fonction f vérifiant les conditions (1), (2), (3), on définit un indice I_f égal à l'aire exprimée en unité d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équations $y = x$, $x = 1$ et la courbe représentative de f.

1. Justifier que $I_f = \displaystyle\int_0^1 [x - f(x)]\,\mathrm{d}x$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'indice I_g associé à g.
3. On s'intéresse aux fonctions f_n définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{2x^n}{1+x}$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On admet que ces fonctions vérifient les conditions (1), (2), (3) et on se propose d'étudier l'évolution de leur indice I_n lorsque n tend vers l'infini.

(a) On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 [x - f_n(x)]\,\mathrm{d}x$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Prouver que $I_n = \frac{1}{2} - u_n$.

(b) Comparer $\frac{t^{n+1}}{1+t}$ et $\frac{t^n}{1+t}$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$; en déduire que la suite (u_n) est décroissante.

(c) Prouver que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$$0 \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n.$$

(d) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n+1}$.

(e) Déterminer alors la limite de I_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 4 Inde, Avril 2004

Partie A – Étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)\mathrm{e}^{-x} - 1$.

1. (a) Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.

   (b) Étudier le sens de variation de φ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, qui sera notée α.

   Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le présenter dans un tableau.

Partie B – Étude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire

Sur le graphique ci-dessous sont tracées les courbes représentatives de deux fonctions f et g.
Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ sont notées $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

1. Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$ et admettent en ce point la même tangente.

2. (a) Démontrer que, pour tout nombre réel x :

   $$f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$$

   où φ est la fonction étudiée dans la partie **A**.

   (b) À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

   (c) En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

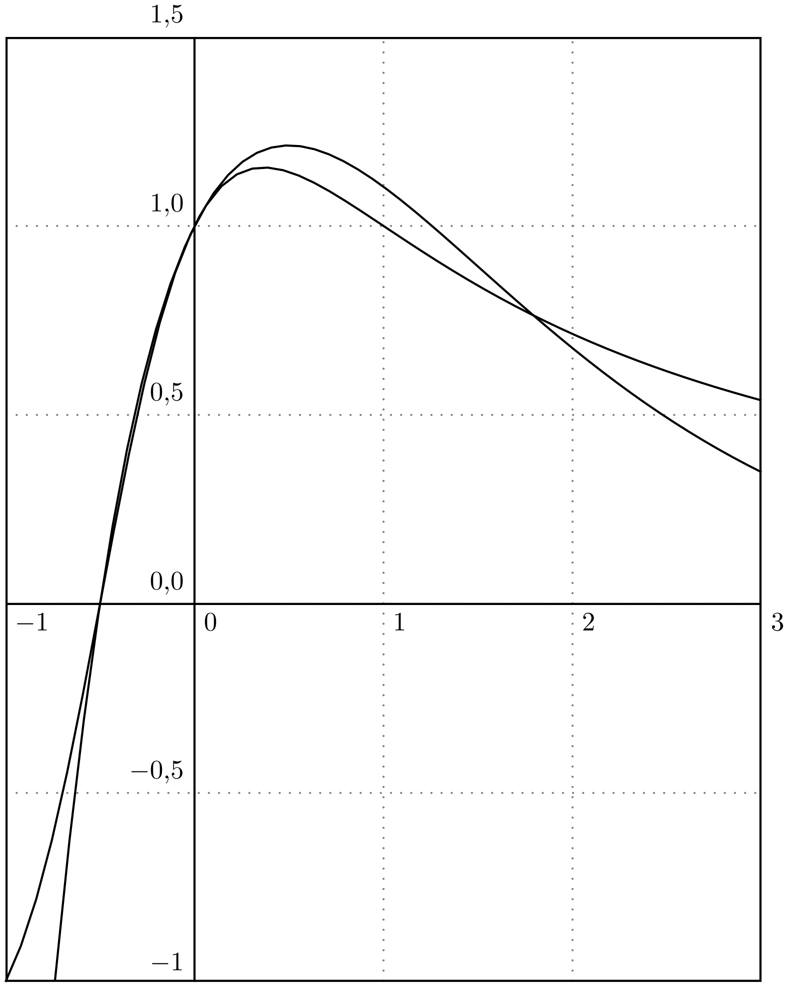
3. (a) Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$h(x) = (-2x-3)\mathrm{e}^{-x} - \ln\left(x^2+x+1\right)$$

   est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$.

   (b) En déduire l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = 0$.

   Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-4} de cette aire.



Exercice 5 Nouvelle-Calédonie, Mars 2004 (non relu)

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-2x}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, (unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 8 cm sur l'axe des ordonnées).

1. (a) Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(X) = 1 + X - 2X^2$.
   Étudier le signe de $P(X)$.
   (b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Qu'en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
3. Vérifier que $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2\right)$, puis déterminer la limite de f en $-\infty$.
4. (a) Soit f' la fonction dérivée de la fonction f, calculer $f'(x)$.
   (b) Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $(4 - \mathrm{e}^{x})$, puis étudier le signe de $f'(x)$.
   (c) Dresser le tableau de variation de f. On montrera que le maximum est un nombre rationnel.

5. (a) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$ n'ont qu'un point d'intersection A dont on déterminera les coordonnées.
   (b) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
6. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
7. Tracer les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{T}$, puis la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B – Étude d'une suite

1. Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$.
2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_{(n-1)+\ln 2}^{n+\ln 2} [f(x) - 1] \, \mathrm{d}x$$

   (a) Démontrer que la suite (u_n) est à termes positifs.
   (b) Donner une interprétation géométrique de (u_n).
3. (a) En utilisant le sens de variation de f, montrer que, pour tout $n \geqslant 2$:
   si $x \in [(n-1) + \ln 2\,;\, n + \ln 2]$ alors $f(n + \ln 2) - 1 \leqslant f(x) - 1 \leqslant f\,[(n-1) + \ln 2] - 1$.
   (b) En déduire que, pour tout n, $n \geqslant 2$, on a :

$$f(n + \ln 2) - 1 \leqslant u_n \leqslant f\,[(n-1) + \ln 2] - 1.$$

   (c) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 2.
   (d) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4. Soit la suite (S_n) définie pour $n > 0$, par :

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

   (a) Écrire S_n à l'aide d'une intégrale.
   (b) Interpréter géométriquement S_n.
   (c) Calculer S_n et déterminer la limite de la suite (S_n).

Exercice 6 Amérique du Sud, Novembre 2003

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

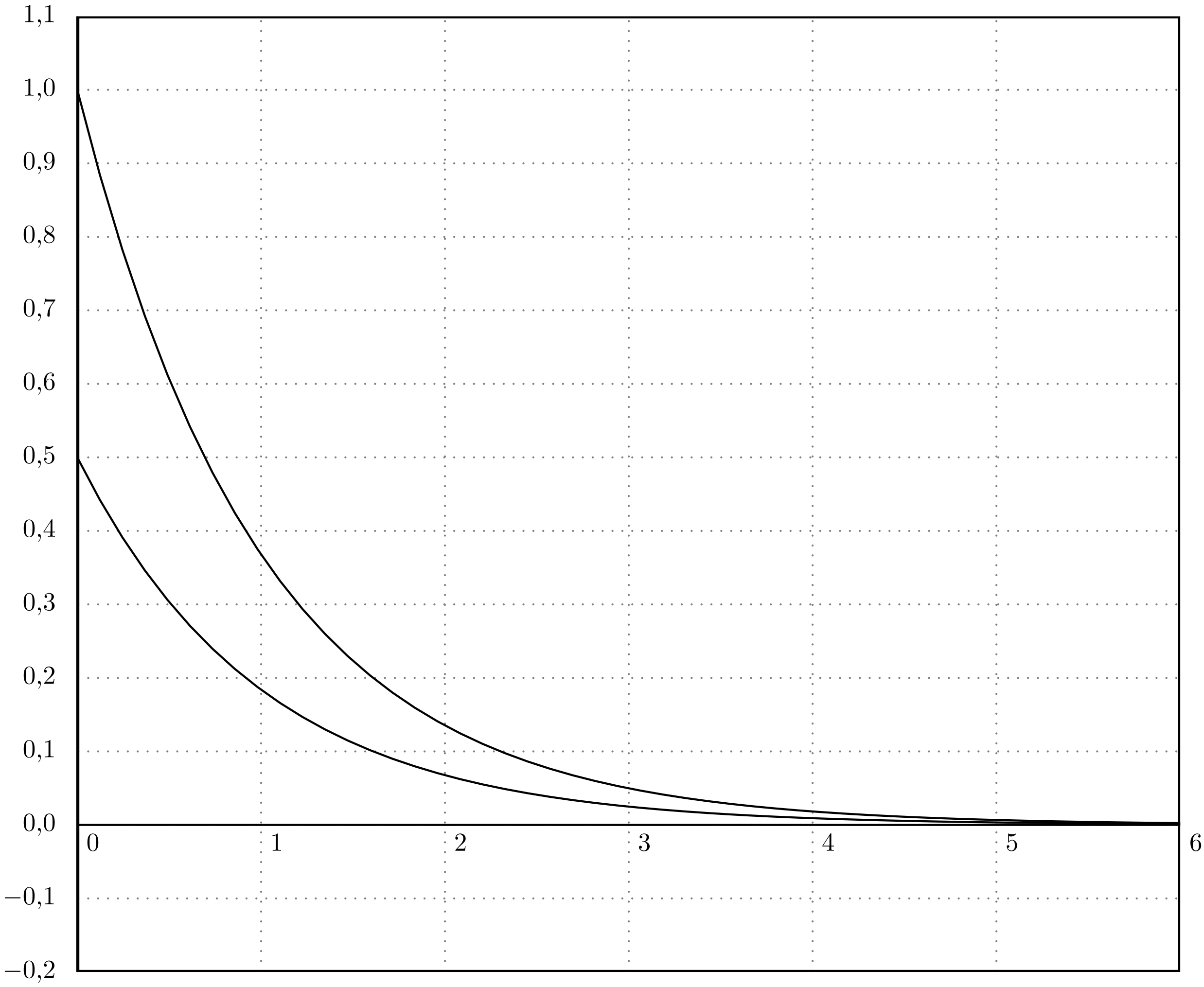
$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.

Partie A

1. Étudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?
2. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^x$.
3. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Étudier les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. On considère les fonctions g et h définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{2\mathrm{e}^x}$.
   Sur le graphique ci-dessous sont tracées, dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, les courbes représentatives de g et h, notées respectivement Γ_1 et Γ_2.
   (a) Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.
   (b) Que peut-on en déduire pour les courbes Γ, Γ_1 et Γ_2 ?
   Tracer Γ sur le graphique en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.



Partie B

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de I_n et donner une interprétation géométrique de I_n.
2. (a) Démontrer, que pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leqslant I_n \leqslant f(n)$.
   (b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
   (c) Démontrer que la suite (I_n) est convergente et determiner sa limite.

Partie C

Soit (J_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $J_n = \displaystyle\int_0^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. En utilisant l'encadrement obtenu dans la question **A.4.(a)**, démontrer que, pour tout entier naturel n :
$$\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-n}\right) \leqslant J_n \leqslant 1-\mathrm{e}^{-n} \leqslant 1.$$
2. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
En déduire qu'elle converge.
3. On note ℓ la limite de la suite (J_n) et on admet le théorème suivant :
« Si u_n, v_n et w_n sont trois suites convergentes de limites respectives a, b et c et si, à partir d'un certain rang on a pour tout n, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors $a \leqslant b \leqslant c$ ».
Donner un encadrement de ℓ.
4. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$u(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
On note v la primitive de u sur $\mathbb{R}$ telle que $v(1) = \dfrac{\pi}{4}$.
On admet que la courbe représentative de v admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}$.
   (a) Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2+1}$.
   (b) Démontrer que, pour tout réel x, f est la dérivée de la fonction $x \mapsto v\left(\mathrm{e}^x\right)$.
   (c) En déduire la valeur exacte de ℓ.

Exercice 7 Nouvelle-Calédonie, Novembre 2003

Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.
Pour tout entier naturel n, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction numérique f_n par :
$$f_0(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ et pour } n \text{ entier naturel non nul, } f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2}.$$
On note Γ_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, unité graphique : 4 cm.
On désigne par I_n l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie A

1. (a) Étudier les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$. Quelle est la conséquence graphique de ces résultats ?
   (b) Étudier les variations de f_1.
   (c) Tracer la courbe Γ_1.
   (d) Calculer I_1.
2. (a) Étudier les limites de f_3 en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Étudier les variations de f_3.
   (c) Tracer la courbe Γ_3 sur le même dessin qu'au **1.(c)**.
3. Calculer $I_1 + I_3$. En déduire la valeur de I_3.
4. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par les courbes Γ_1, Γ_3 et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Partie B

Pour cette partie, on dessinera la figure demandée dans un nouveau repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, unité graphique : 4 cm.

1. (a) Étudier les limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Étudier les variations de f_0.
2. Soit (a_n) la suite définie, pour n entier naturel non nul, par :

$$a_n = \int_0^n \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   (a) Interpréter graphiquement a_n.
   (b) Montrer que la suite (a_n) est croissante.
   (c) Montrer que pour tout réel t : $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ et en déduire que $a_1 \leqslant 1$.
   (d) Montrer que pour tout réel t non nul : $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et en déduire que pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.
   (e) Montrer, en utilisant les questions précédentes, que pour tout entier naturel n non nul, $a_n \leqslant 2$. Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (a_n) ?

Partie C

Soit F la fonction telle que :

$$F(0) = 0,\ F \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } F'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. On pose, pour tout x de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = F[\tan(x)]$.
   (a) Calculer $H(0)$.
   (b) Montrer que H est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer $H'(x)$.
   (c) En déduire que, pour tout x de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = x$.
   (d) Montrer que $F(1) = \dfrac{\pi}{4}$.
2. On pose, pour tout x réel positif ou nul, $k(x) = F\left(\dfrac{1}{x+1}\right) + F\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$.
   (a) Montrer que la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer $k'(x)$.
   (b) En déduire la valeur de $F\left(\dfrac{1}{2}\right) + F\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Exercice 8 Antilles-Guyane, Septembre 2003

Partie A – Étude préliminaire d'une fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (2-x)\mathrm{e}^x - 1$

1. Déterminer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Montrer que la fonction φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier le signe de sa dérivée.
   En déduire les variations de la fonction φ et préciser les valeurs de $\varphi(-2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.
3. Prouver que la fonction φ s'annule uniquement en deux valeurs que l'on nommera α et β. On prendra $\alpha < \beta$. Étudier alors le signe de la fonction φ sur l'ensemble des réels et récapituler cette étude dans un tableau.
4. À l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude 10^{-2} des valeurs α et β.
5. Montrer que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{2-\alpha}$.

Partie B – Étude d'une fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$ et calcul intégral

1. Montrer que $e^x - x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f puis, à l'aide des résultats de la partie **A**, construire le tableau des variations de f.
4. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$, le nombre α étant la plus petite des deux valeurs pour lesquelles la fonction φ de la **partie A** s'annule.
5. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Donner une valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 0,01 près de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x - x}\,dx.$$

Partie C – Étude de deux suites

1. Préciser l'ensemble de définition D_g de la fonction g définie sur cet ensemble par $g(x) = \ln\left(\dfrac{1}{2-x}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   Prouver que la fonction g est croissante sur son ensemble de définition et que l'image par g de l'intervalle $I = [-2\,;\,0]$ est incluse dans cet intervalle.
2. (a) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= -2 \\ u_{n+1} &= g(u_n) \end{cases}.$$

   Montrer que u_1 appartient à l'intervalle $I = [-2\,;\,0]$. Prouver par récurrence, à l'aide des variations de la fonction g, que la suite (u_n) a tous ses termes dans l'intervalle I et est croissante.

   (b) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 &= 0 \\ v_{n+1} &= g(v_n) \end{cases}.$$

   Calculer le terme v_1 et montrer que $-2 \leqslant u_1 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 0$.
   Établir par récurrence, à l'aide de la croissance de la fonction g sur l'intervalle $[-2\,;\,0]$, que pour tout entier naturel n strictement positif, on a :

$$-2 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant 0.$$

   Préciser le sens de variation de la suite (v_n).
3. (a) Soit m la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $m(x) = x - \ln(1+x)$.
   Montrer que m est croissante et calculer $m(0)$. En déduire que, pour tout x positif, on a :

$$\ln(1+x) \leqslant x.$$

(b) Vérifier que, pour tout entier n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(1 + \dfrac{v_n - u_n}{2 - v_n}\right)$.

En déduire que $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{v_n - u_n}{2 - v_n}$.

Sachant que, pour tout entier n, les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle $[-2\,;\,0]$, donner un encadrement de $\dfrac{1}{2 - v_n}$ et établir que :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n)\,.$$

Prouver alors que, pour tout entier naturel n :

$$v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)\,.$$

Que peut-on en déduire pour la suite de terme général $v_n - u_n$ et pour les suites (u_n) et (v_n) ?

4. Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-4} de u_{10} et v_{10}.

Exercice 9 France, Septembre 2003

Partie A – Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' - 3y = \frac{-\,3\mathrm{e}}{\left(1 + \mathrm{e}^{-3x}\right)^2}\,.$$

On donne une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}\varphi(x)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, exprimer $\varphi'(x) - 3\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$.
2. Déterminer f de sorte que φ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\varphi(0) = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

Partie B – Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{1-3x}}{1 + \mathrm{e}^{-3x}}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier les variations de f.
2. Tracer $\mathscr{C}$.
3. Pour α réel non nul, on pose $I_\alpha = \displaystyle\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Donner le signe et une interprétation graphique de I_α en fonction de α.
   (b) Exprimer I_α en fonction de α.
   (c) Déterminer la limite de I_α lorsque α tend vers $+\infty$.

Partie C – Étude d'une suite

On définit sur $\mathbb{N}^*$ la suite (u_n) par :

$$u_n = \int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x,\ \text{où } f \text{ est la fonction définie dans la partie } \mathbf{B}.$$

On ne cherchera pas à calculer u_n.

1. (a) Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le signe de u_n.
   (b) Donner le sens de variation de la suite (u_n).
   (c) La suite (u_n) est-elle convergente ?
2. (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$I_1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} I_1$$

   où I_1 est l'intégrale de la partie **B** obtenue pour α égal à 1.
   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).
   Donner sa valeur exacte.

Exercice 10 Polynésie, Septembre 2003

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) & = & 1 \\ f(x) & = & \dfrac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1 \quad \text{si} \quad x>0 \end{cases}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.

Partie A

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. (a) Étudier la dérivabilité de f en 0.
   (b) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$, f' désignant la fonction dérivée de f.
3. Étudier le sens de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$, puis dresser son tableau de variation.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. Déterminer une valeur approchée décimale de α à 10^{-2} près.

Partie B

1. Calculer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = 1$.
2. On considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - 2x - \dfrac{1}{2}$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (a) Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$ où g' et g'' désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g. Étudier le sens de variation de g'. En déduire le signe de $g'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
   (b) Étudier le sens de variation de g.
   En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente $\mathscr{D}$.
3. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{D}$ (unité graphique : 2 cm).

Partie C

1. n est un entier naturel non nul.
   Exprimer en fonction de n le réel $I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$ (on pourra utiliser une intégration par parties).
2. En déduire en fonction de l'entier n, l'aire $\mathcal{A}_n$ exprimée en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la tangente $\mathscr{D}$ et les deux droites d'équation $x = \dfrac{1}{n}$ et $x = 1$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n$ et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 11 Amérique du Nord, Juin 2003

Partie A – Étude d'une fonction f et construction de sa courbe

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \ln(1 + \mathrm{e}^x)$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$. L'unité graphique est 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1. (a) On rappelle que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   (b) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^{-x} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)$.
   Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (c) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes que l'on précisera.
2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t).$$

   (a) Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   (b) En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$.
3. (a) Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g\left(\mathrm{e}^x\right)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation.
4. Tracer les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$ et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B – Comportements asymptotiques d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction F.
2. (a) Vérifier que, pour tout nombre réel t, $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t} = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}$ et calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^t}$.
   (b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F(x)$.
   (c) Vérifier que $F(x)$ peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$(1) \quad F(x) = x - \ln(1+\mathrm{e}^x) - f(x) + 2\ln 2.$$
$$(2) \quad F(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right) - f(x) + 2\ln 2.$$

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} [F(x) - x]$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Partie C – Étude d'une suite

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-k} \ln(1 + \mathrm{e}^k).$$

1. Hachurer sur la représentation graphique un domaine dont l'aire, en unités d'aire, est u_4.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3. (a) Justifier que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (b) Comparer u_n et $F(n)$.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 12 Antilles-Guyane, Juin 2003

Partie A

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E) \;:\; y' - 2y = 2\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right).$$

1. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x\mathrm{e}^{2x} + 1$ est solution de l'équation différentielle (E).
2. On pose $y = z + h$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle $z' - 2z = 0$. Résoudre cette dernière équation différentielle et en déduire les solutions de (E).
3. Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0. Elle sera appelée g et étudiée dans la partie **B**.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (2x - 1)\mathrm{e}^{2x} + 1.$$

1. Déterminer le sens de variation de g. Présenter son tableau de variation. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1 - g(x) \geqslant 0$.

   (b) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} [1 - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

   (c) Interpréter graphiquement les résultats des questions **(a)** et **(b)**.

Partie C

On considère la fonction numérique f définie pour x réel non nul par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{x}.$$

1. Calculer les limites de f en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$.
2. En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote que l'on précisera.
3. Déterminer le sens de variation de f et donner son tableau de variation (on pourra utiliser la partie **B**).
4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $(O\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath})$, avec pour unités 4 cm sur $(O\,;\,\overrightarrow{\imath})$ et 2 cm sur $(O\,;\,\overrightarrow{\jmath})$.
   Après avoir recopié et complété le tableau ci-dessous avec des valeurs approchées arrondies à 10^{-2} près, construire la courbe $\mathscr{C}$ pour des valeurs de x comprises entre -2 et 1.

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	$-0,2$	$-0,1$	$-0,05$	$0,05$	$0,1$	$0,2$	$0,5$	1
$f(x)$												

5. Soit f_1 la fonction définie par : $\begin{cases} f_1(x) = f(x),\ x \neq 0 \\ f_1(0) = 2 \end{cases}$.
   Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$. En supposant que f_1 est dérivable en 0, expliquer comment on peut déterminer graphiquement une valeur approchée du nombre dérivé $f_1'(0)$; faire cette lecture graphique. Quel résultat de limite cela permet-il de conjecturer ?

Partie D

On se propose de trouver un encadrement de l'intégrale :

$$J = \int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que pour tout x de $[-2\,;\,-1]$ on a :

$$-\frac{0,86}{x} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{x} \leqslant -\frac{0,99}{x}.$$

En déduire un encadrement de J d'amplitude $0,1$.

Exercice 13 Asie, Juin 2003

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath})$.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 + 2\ln x}{x^2}.$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et soit $\mathscr{C}'$ celle de la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. En déduire que $\mathscr{C}$ a deux asymptotes que l'on déterminera.
2. Calculer la dérivée f' de f et étudier les variations de f.
3. Soit I le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées de I.
4. Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on pose $g(x) = 1 - x + 2\ln x$.
   (a) Étudier les variations de la fonction g.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $]0\,;\,2[$ et $]2\,;\,4[$. Soit α la solution appartenant à $]2\,;\,4[$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5. (a) Montrer que $f(x) - \dfrac{1}{x} = \dfrac{g(x)}{x^2}$ et en déduire que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupent en deux points.
   (b) Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 4, la double inégalité suivante est vraie :
$$0 < f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$
6. Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Partie B

1. Soit $\mathcal{D}$ la partie du plan définie par les inégalités suivantes :
$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant \alpha & (\alpha \text{ est le réel défini dans la partie } \mathbf{A}) \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}.$$
   (a) Déterminer l'aire de $\mathcal{D}$, notée $\mathcal{A}(\alpha)$, en unités d'aire (on utilisera une intégration par parties).
   (b) Montrer que $\mathcal{A}(\alpha) = 2 - \dfrac{2}{\alpha}$ et donner une valeur approchée de $\mathcal{A}(\alpha)$ à 10^{-2} près.
2. Soit la suite (I_n) définie pour n supérieur ou égal à 1 par :
$$I_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
   (a) Montrer que, pour tout n supérieur ou égal à 4, la double inégalité suivante est vraie :
$$0 \leqslant I_n \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$
   (b) En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.
   (c) Soit $S_n = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n$. Calculer S_n, puis la limite de la suite (S_n).

Partie C

On considère, pour tout n supérieur ou égal à 1, la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f_n(x) = \frac{1 + 2\ln x}{x^{2n}}.$$
1. Calculer la dérivée f_n' de la fonction f_n.
2. Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$. Soit x_n la solution de cette équation.
3. Déterminer la limite de la suite (x_n).

Exercice 14 Centres étrangers, Juin 2003

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-2\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = 1 + x\ln(x+2).$$
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ (unité graphique 4 cm).

Partie A – Étude de la fonction *f*

1. Étude des variations de la dérivée f'.
   (a) f' désigne la fonction dérivée première de f et f'' la fonction dérivée seconde. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.
   (b) Étudier les variations de f' sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.
   (c) Déterminer les limites de f' en -2 et en $+\infty$.
2. Étude du signe de $f'(x)$
   (a) Montrer que sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ l'équation $f'(x)=0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[-0,6\,;-0,5]$.
   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
3. Étude des variations de f
   (a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.
   (b) Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variation de f.

Partie B – Position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à ses tangentes

Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $]-2\,;+\infty[$, on appelle T_{x_0} la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0.
On note, pour x appartenant à l'intervalle $]-2\,;+\infty[$:

$$d(x)=f(x)-\left[f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\right].$$

1. Étude des variations de d
   (a) Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-2\,;+\infty[$:
   $$d'(x)=f'(x)-f'(x_0).$$
   (b) En utilisant la croissance de la fonction f', donner le signe de $d'(x)$ selon les valeurs de x. En déduire les variations de d sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.
2. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de T_{x_0}.

Partie C – Tracés dans le repère $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$

1. Déterminer une équation de la droite T_0, tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ; tracer T_0.
2. Trouver les réels x_0 pour lesquels les tangentes T_{x_0} passent par l'origine du repère puis tracer ces droites.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ pour les valeurs de x comprises entre -1 et 2. On prendra pour α la valeur $-0,54$ et pour $f(\alpha)$ la valeur 0,8.

Exercice 15 France, Juin 2003

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t=0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).
Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :
*– un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (partie **A**) ;*
*– un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (partie **B**).*

Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.
Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y' = ay$ (où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.
   Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période.
Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :
Soit $g(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ qui vérifie pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$ la relation :

$$(E) \quad g(t) = ag(t)\left(1 - \frac{g(t)}{M}\right).$$

où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la partie **A**.

1. (a) Démontrer que si g est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction $\frac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle :

   $$(E') \quad y' + ay = \frac{a}{M}.$$

   (b) Résoudre (E').

   (c) Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E'), alors $\frac{1}{h}$ vérifie (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel positif t, $g(t) = \dfrac{M}{1 + C\mathrm{e}^{-at}}$ où C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.

   (a) Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité : $0 < g(t) < M$.

   (b) Étudier le sens de variation de g (on pourra utiliser la relation (E)).
   Démontrer qu'il existe un réel unique t_0 positif tel que $g(t_0) = \dfrac{M}{2}$.

   (c) Démontrer que $g'' = a\left(1 - \dfrac{2g}{M}\right)g'$. Étudier le signe de g''. En déduire que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant t_0 défini ci-dessus.
   Exprimer t_0 en fonction de a et C.

   (d) Sachant que le nombre de bactéries à l'instant t est $g(t)$, calculer le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0, en fonction de M et C.

Partie C

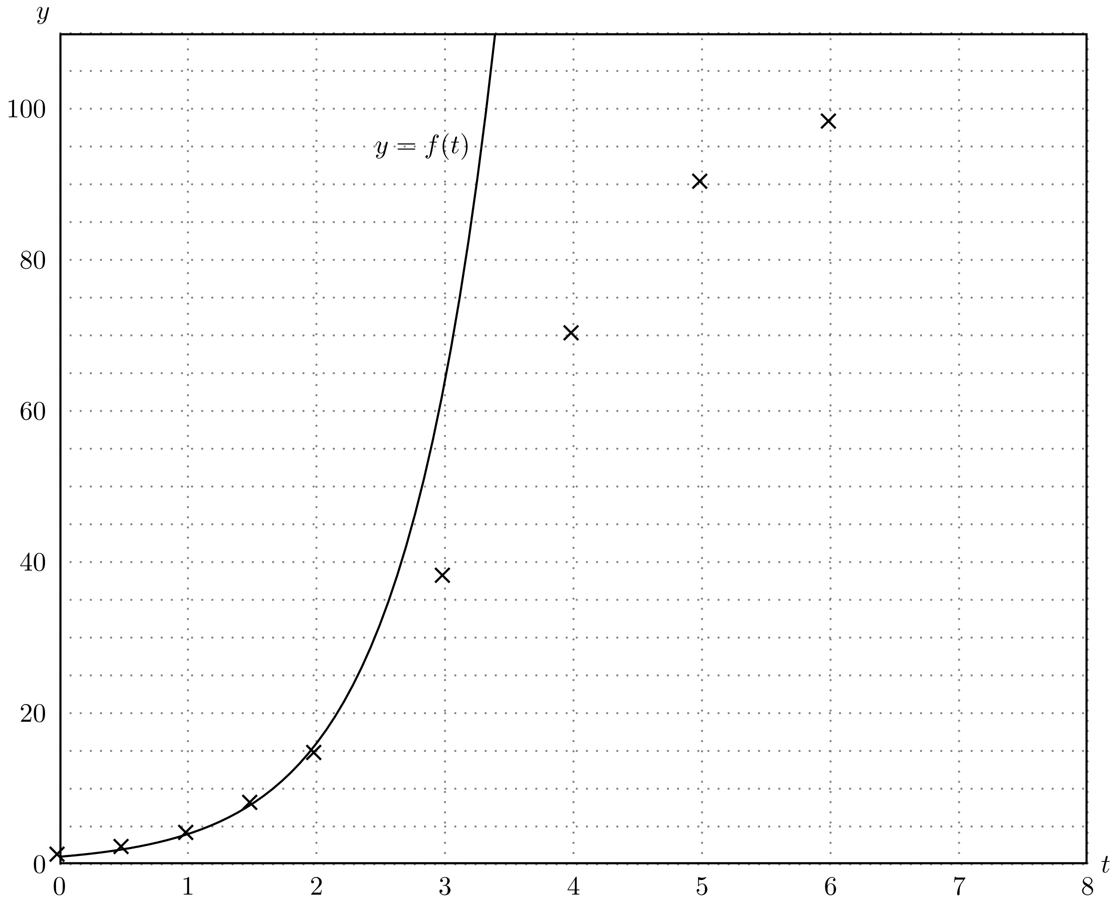
1. Le tableau présenté ci-dessous a permis d'établir que la courbe représentative de f passait par les points de coordonnées respectives $(0\,;\,1)$ et $(0,5\,;\,2)$. En déduire les valeurs de N_0, T et a.

t (en h)	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
Nombre de bactéries (en millions)	1,0	2,0	3,9	7,9	14,5	37,9	70,4	90,1	98

2. Sachant que $g(0) = N_0$ et que $M = 100N_0$, démontrer, pour tout réel t positif ou nul, l'égalité suivante :

$$g(t) = \frac{100}{1 + 99 \times 4^{-t}}.$$

3. Tracer, sur la figure ci-dessous, la courbe Γ représentative de g, l'asymptote à Γ ainsi que le point de Γ d'abscisse t_0.
4. Dans quelles conditions le premier modèle vous semble-t-il adapté aux observations faites ?



Exercice 16 La Réunion, Juin 2003

On considère l'équation différentielle (E) : $y - y' = \dfrac{e^x}{x^2}$ et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. (a) Démontrer que la fonction u définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $u(x) = \dfrac{e^x}{x}$ est solution de (E).
   (b) Démontrer qu'une fonction v définie sur $]0\,;\,+\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $v - u$, définie sur $]0\,;\,+\infty[$, est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.
   (c) En déduire toutes les solutions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation (E).

2. Pour tout réel k négatif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_k(x) = \frac{kx+1}{x}\,\mathrm{e}^x.$$

   (a) Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.

   (b) Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et déterminer le nombre de solutions sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation $f_k'(x) = 0$.

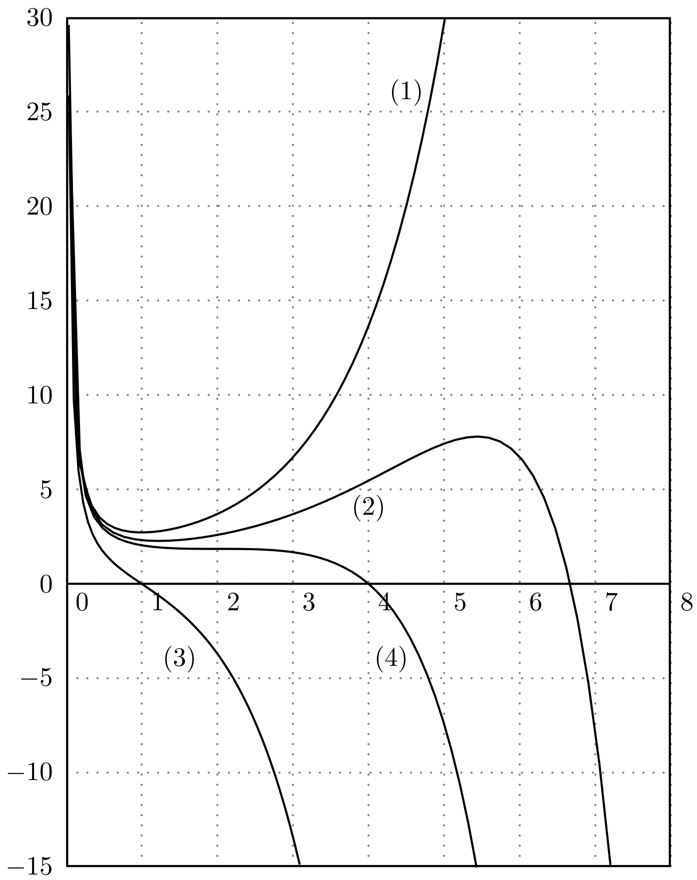
3. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormaI $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.
On a tracé sur le graphique ci-joint les courbes $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_{-0,25}$, $\mathscr{C}_{-0,15}$ et $\mathscr{C}_0$.
En utilisant la deuxième question, reconnaître chaque courbe (les réponses doivent être justifiées).

4. Pour tout réel a strictement positif, on pose $\mathcal{A}(a) = \displaystyle\int_a^{a+1} \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$.

   (a) Interpréter géométriquement $\mathcal{A}(a)$.

   (b) On désigne par F une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
   En remarquant que $\mathcal{A}(a) = F(a+1) - F(a)$ étudier le sens de variation de la fonction qui à tout réel a élément de $]0\,;\,+\infty[$ associe le réel $\mathcal{A}(a)$.

   (c) On veut découper dans le plan une bande verticale de largeur une unité de telle sorte que l'aire située dans cette bande entre les courbes $\mathscr{C}_0$ et (Ox) soit minimale. Comment doit-on procéder ?



Exercice 17 Liban, Juin 2003

Partie A – Étude d'une fonction auxiliaire g

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\mathrm{e}^x - 2x - 7$.

1. Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α telle que :
$$0,94 < \alpha < 0,941.$$
4. Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B – Étude d'une fonction f

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-5)\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath})$.

1. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f et vérifier que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Dresser le tableau de variation de f.
4. (a) Démontrer l'égalité : $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$.

   (b) Étudier le sens de variation de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$ sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\dfrac{5}{2}\right[$.

   En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la partie **A**, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f(\alpha)$.
5. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$, d'équation $y = 2x - 5$, est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$. Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.
6. Tracer la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(O\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

Partie C – Calcul d'aire

À l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la portion de plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \dfrac{5}{2}$.

Partie D – Étude d'une suite de rapports de distances

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on considère les points A_n, B_n et C_n d'abscisse n, appartenant respectivement à l'axe des abscisses, à la droite $\mathscr{D}$ et à la courbe $\mathscr{C}$; soit u_n le réel défini par :
$$u_n = \frac{C_nB_n}{A_nB_n}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :
$$u_n = \frac{2n - 5 - f(n)}{2n-5}.$$
2. (a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

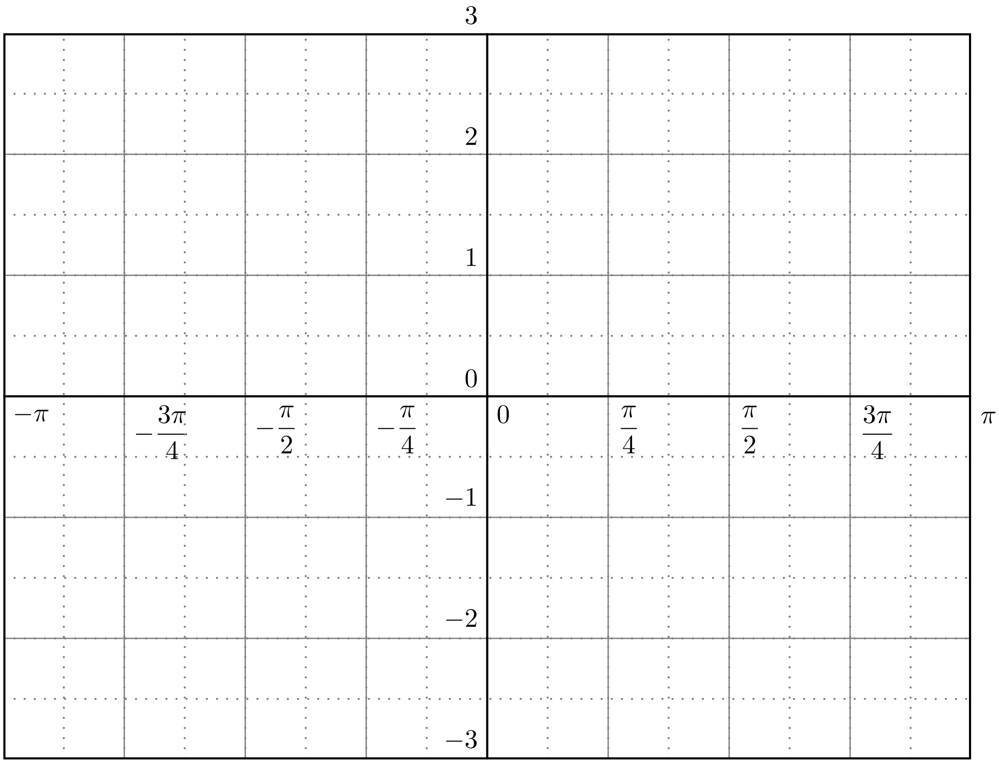
   (b) Calculer la limite de la suite (u_n). Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Exercice 18 Polynésie, Juin 2003

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$. On appelle $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal.

1. Montrer que pour tout réel x, $-\mathrm{e}^x \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^x$.
   En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote au voisinage de $-\infty$. Quelle est cette asymptote ?
2. Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
3. On étudie f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Démontrer que pour tout réel $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ on a :
   $$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$
4. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f. Montrer que f est croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Dresser le tableau de variation de f sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Indiquer les valeurs prises par f en $-\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{2}$.
5. Tracer $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur le graphique ci-dessous.



6. Démontrer que, sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution unique α. Trouver, à l'aide de la calculatrice, la valeur approchée décimale de α arrondie au centième.

7. On note f'' la fonction dérivée seconde de f. Montrer que $f''(x) = -2\mathrm{e}^x \sin x$.
   En déduire que, sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x atteint, pour $x = 0$, une valeur maximale que l'on précisera.
   Trouver l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ en 0 et tracer $\mathscr{T}$ sur le graphique de la question **5**.

Partie B

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que $\sin(n\pi) = 0$.
2. À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :
$$I_n = \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{\pi} - 1}{1 + n^2}.$$
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|I_n| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{\pi} + 1}{1 + n^2}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n$.

Partie C

On considère les équations différentielles :

$$(E) \quad y' - 2y - 1 = 0$$

$$(E') \quad y' - 2y = 1 - \mathrm{e}^x \sin x$$

où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Dire, en le justifiant, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. (E) admet une fonction polynôme du premier degré comme solution.
2. Soit g une fonction positive définie sur $\mathbb{R}$; si g est solution de (E) alors elle est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $x \mapsto 3\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{2}$ est une solution de (E).
4. La primitive F de f qui s'annule en 0 est une solution de (E').

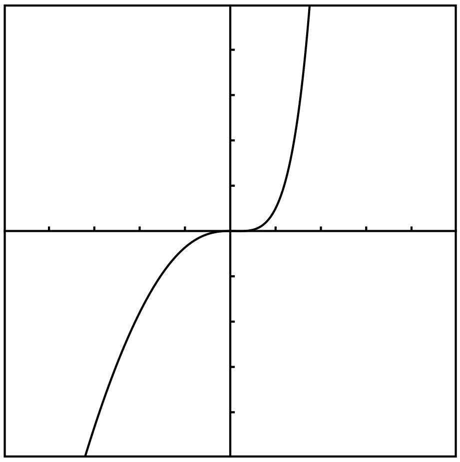
Exercice 19 Inde, Avril 2003

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \mathrm{e}^{x-1} - \frac{x^2}{2}.$$

Le graphique ci-dessous est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.

Conjectures



À l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant :
(a) le sens de variations de f sur $[-3\,;\,2]$?
(b) la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$?
Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures et de les compléter.

Partie A – Contrôle de la première conjecture

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x-1} - 1.$$

2. Étude du signe de $g(x)$ pour x réel
   (a) Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis quand x tend vers $-\infty$.
   (b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x.
   (c) En déduire le sens de variation de la fonction g, puis dresser son tableau de variation.
   (d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution. Montrer que $0,20 < \alpha < 0,21$.
   (e) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. Sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$
   (a) Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f.
   (c) Que pensez-vous de votre première conjoncture ?

Partie B – Contrôle de la deuxième conjecture

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$. On se propose de contrôler la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$.

1. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-\,\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.
2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$h(x) = \frac{-\,x^3}{2(x+2)}.$$

   (a) Calculer $h'(x)$ pour x élément de $[0\,;\,1]$, puis déterminer le sens de variation de h sur $[0\,;\,1]$.
   (b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

3. (a) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe $(x'x)$.
   (b) Préciser alors la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.
   (c) Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?

Partie C – Tracé de la courbe

Compte tenu des résultats précédents, on se propose de tracer la partie Γ de $\mathscr{C}$ correspondant à l'intervalle $[-0,2\,;\,0,4]$, dans le repère orthogonal $(O\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath})$, avec les unités suivantes :
– sur l'axe des abscisses 1 cm représentera 0,05 ;
– sur l'axe des ordonnées 1 cm représentera 0,001.

1. Recopier le tableau suivant et compléter celui-ci à l'aide de la calculatrice en indiquant les valeurs approchées sous la forme $n \times 10^{-4}$ (n entier relatif).

x	$-0,2$	$-0,15$	$-0,1$	$-0,05$	0	$0,05$	$0,1$	$0,15$	$0,2$	$0,25$	$0,3$	$0,35$	$0,4$
$f(x)$													

2. Tracer alors Γ dans le repère choisi.

Partie D – Calcul d'aire

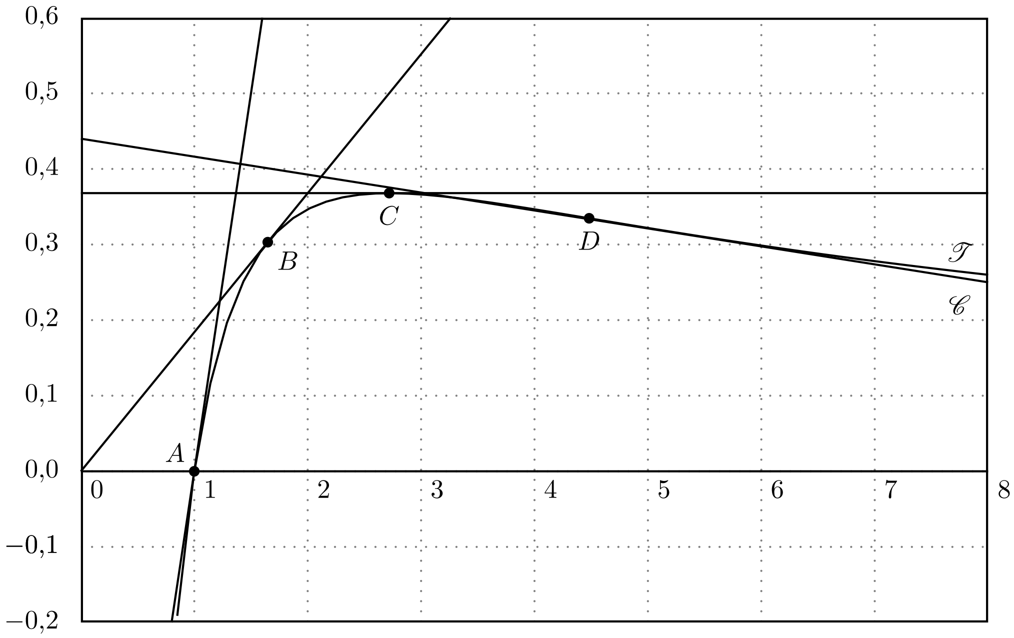
On désire maintenant calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1 - \ln 2$.

1. À l'aide d'une double intégration par parties, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$x \mapsto x^2 \mathrm{e}^x.$$

2. En déduire une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
3. Calculer alors, en unités d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$ puis en donner une valeur approchée en cm^2.

Exercice 20 Nouvelle-Calédonie, Mars 2003



Partie A

Sur la figure ci-dessus est tracée dans un repère orthogonal la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f où f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Les points A, B, C et D sont les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1, $\sqrt{\mathrm{e}}$, e et $\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}$; de plus, A appartient à l'axe des abscisses. La droite $\mathscr{T}$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point D.

1. Dans cette question, on ne demande qu'une observation graphique.
   Avec la précision permise par ce graphique :
   (a) Donner une estimation à 5×10^{-2} près des coefficients directeurs des tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points A, B, C et D.
   (b) Préciser combien la courbe $\mathscr{C}$ admet de tangentes horizontales, de tangentes passant par l'origine, de tangentes de coefficient directeur 1. Pour chacune de ces tangentes, donner l'abscisse du point de contact avec la courbe $\mathscr{C}$.
   (c) Choisir le seul tableau pouvant décrire les variations de la fonction dérivée de f. Justifier ce choix.

x	0	e	$+\infty$
	↗		↘

x	0	$\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}$	$+\infty$
	↘		↗

x	0	$+\infty$
	↗	

2. On rappelle que $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f.
   On admet que la fonction dérivée de f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

   (a) Étudier les variations de g. Cela corrobore-t-il votre choix dans la question **1.(c)** ?
   (b) Déterminer les limites de g en 0, puis en $+\infty$.
   (c) Calculer $g(1)$, $g\left(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\right)$; puis démontrer que l'équation $g(x) = 1$ n'a qu'une seule solution. Quelle observation de la question **1.(b)** a-t-on démontrée ?
   (d) Expliquer pourquoi f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \int_1^x \left(\frac{1 - \ln t}{t^2}\right) \mathrm{d}t.$$

   Calculer $f(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.

Partie B

On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

1. Étudier les variations de f, préciser ses limites en 0 puis en $+\infty$.
2. On cherche à justifier les observations de la question **A.1.** concernant les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ qui sont horizontales, qui ont un coefficient directeur égal à 1 ou qui passent par le point O origine du repère.
   Démontrer que, dans chacun de ces cas, une seule tangente vérifie la condition donnée, préciser les abscisses des points de contact correspondants (on pourra utiliser les résultats démontrés dans la partie **A.2.(c)**) et préciser ces points.
3. Étude de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point D (le point D a pour abscisse $\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}$).

(a) Démontrer qu'une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point D est :

$$y = \frac{-x + 4\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}{2\mathrm{e}^3}.$$

(b) Montrer que le signe de $\left(2\mathrm{e}^3 \ln x + x^2 - 4\mathrm{e}x\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ détermine la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à cette tangente.

(c) On note φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x) = 2\mathrm{e}^3 \ln x + x^2 - 4\mathrm{e}x\sqrt{\mathrm{e}}.$$

À partir des variations de φ, déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente $\mathscr{T}$.

Partie C

1. Démontrer que les abscisses des points A, B et C sont les trois premiers termes d'une suite géométrique dont on précisera la raison. Vérifier que l'abscisse de D est le quatrième terme de cette suite.
2. Soit x_0 un nombre réel strictement supérieur à 1 et E le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse x_0. On considère les droites Δ_A, Δ_B, Δ_C, Δ_D et Δ_E parallèles à l'axe des ordonnées et passant respectivement par A, B, C, D et E.
   On note U_1 l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites Δ_A et Δ_C ; U_2 l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites Δ_B et Δ_D et U_3 l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites Δ_C et Δ_E.
   (a) Calculer U_1, puis U_2.
   (b) Déterminer x_0 pour que U_1, U_2 et U_3 soient les trois premiers termes d'une suite arithmétique. Quelle remarque peut-on faire sur l'abscisse du point E ?

Exercice 21 Amérique du Sud, Novembre 2002

Partie A – Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^x(1 - x) + 1.$$

1. Étudier le sens de variation de g.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1,27\,;\,1,28]$; on note α cette solution.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty\,;\,0[$.
   Justifier que $g(x) > 0$ sur $[0\,;\,\alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

Partie B – Étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x + 1} + 2$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath})$; unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.
2. (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   (b) Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 2$ est une asymptote pour $\mathscr{C}_f$.

(c) Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{D}$.

3. (a) Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g étudiée dans la partie **A**.
   (b) Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $f(\alpha) = p\alpha + q$.
   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath})$ avec ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse α.

Partie C – Encadrement d'aires

Pour tout entier naturel n, tel que $n \geqslant 2$, on note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan, dont les coordonnées vérifient :

$$2 \leqslant x \leqslant n \quad \text{et} \quad 2 \leqslant y \leqslant f(x)$$

et on appelle $\mathcal{A}_n$ son aire, exprimée en unités d'aire.

1. Faire apparaître $\mathcal{D}_5$ sur la figure.
2. Démontrer que pour tout x, tel que $x \geqslant 2$, on a :
$$\frac{7}{8}x\mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1} \leqslant x\mathrm{e}^{-x}.$$
3. On pose $I_n = \displaystyle\int_2^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
   À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n en fonction de n.
4. Écrire un encadrement de $\mathcal{A}_n$ en fonction de I_n.
5. On admet que $\mathcal{A}_n$ a une limite lorsque n tend vers $+\infty$.
   (a) Déterminer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) Que peut-on en déduire pour la limite de $\mathcal{A}_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?
   (c) Donner une interprétation géométrique de ce dernier résultat.

Exercice 22 Nouvelle-Calédonie, Novembre 2002

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthononnal direct $(O\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath})$. (Unité graphique : 2 cm).

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (3 + x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$, puis en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. Construire la courbe (Γ) représentative de f dans le repère $(O\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath})$.
4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \displaystyle\int_{-3}^{0} x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$ et en déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine défini par les couples $(x\,;\,y)$ tels que $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ et $x \leqslant 0$.
5. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.
   Soit α la solution non nulle, montrer que $-2 < \alpha < -\dfrac{3}{2}$.
   (b) Plus généralement, déterminer graphiquement, suivant les valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Partie B

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 3\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 3$.

1. Démontrer que $f(x) = 3$ si et seulement si $\varphi(x) = x$.
2. Soit φ' et φ'' les dérivées première et seconde de la fonction φ.
   (a) Calculer, pour tout réel x, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$. Justifier que $\varphi'(\alpha) = \dfrac{\alpha+3}{2}$.
   (b) Étudier le sens de variation de φ', puis celui de φ.
   On se place désormais dans l'intervalle $I = [-2\,;\,\alpha]$.
3. Montrer que, pour tout x appartenant à I :
   (a) $\varphi(x)$ appartient à I.
   (b) $\dfrac{1}{2} \leqslant \varphi'(x) \leqslant \dfrac{3}{4}$.
   (c) En déduire, à l'aide d'une intégration, que pour tout x de l'intervalle I, on a :
   $$0 \leqslant \frac{1}{2}(\alpha - x) \leqslant \varphi(\alpha) - \varphi(x) \leqslant \frac{3}{4}(\alpha - x).$$
4. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
   $$\begin{cases} u_0 & = & -2 \\ u_{n+1} & = & \varphi(u_n) \end{cases}.$$
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, u_n appartient à l'intervalle I.
   (b) Justifier que, pour tout entier n :
   $$0 \leqslant \alpha - u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}(\alpha - u_n) \quad \text{puis que} \quad 0 \leqslant \alpha - u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.
   (d) Déterminer le plus petit entier p tel que : $\left(\dfrac{3}{4}\right)^p \leqslant 10^{-2}$.
   Donner une approximation décimale à 10^{-2} près de u_p à l'aide d'une calculatrice, puis une valeur approchée de α à 2×10^{-2} près.

Exercice 23 Antilles-Guyane, Septembre 2002

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$\begin{cases} f(0) & = & 0 \\ f(1) & = & 0 \\ f(x) & = & (\ln x) \times \ln(1-x), \quad \text{pour} \quad x \in]0\,;\,1[\end{cases}$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 10 cm).
On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$, ainsi que le résultat suivant :

$$\text{pour } \alpha > 0, \quad \lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0.$$

Partie A – Étude de la fonction *f*

1. (a) Déterminer la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\dfrac{\ln(1-x)}{x}$.
   (b) En déduire la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\dfrac{f(x)}{x}$; que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Montrer que pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$, $\quad f\left(\dfrac{1}{2}-x\right) = f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)$.
   Que peut-on en conclure pour $\mathscr{C}$?
3. Soit φ la fonction définie sur $]0\,;\,1[$ par :
   $$\varphi(x) = (1-x)\ln(1-x) - x\ln x.$$
   (a) Déterminer $\varphi'(x)$, puis montrer l'égalité suivante : $\varphi''(x) = \dfrac{2x-1}{x(1-x)}$; en déduire les variations de φ' sur $]0\,;\,1[$.
   (b) Montrer que φ' s'annule en deux valeurs α_1 et α_2 sur $]0\,;\,1[$ (on ne cherchera pas à calculer ces valeurs). Donner le signe de φ' sur $]0\,;\,1[$.
   (c) Déterminer la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\varphi(x)$ et la limite quand x tend vers 1 de $\varphi(x)$. Calculer $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)$. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $]0\,;\,1[$.
4. (a) Montrer que $f'(x)$ a même signe que $\varphi(x)$ sur $]0\,;\,1[$.
   (b) Donner le tableau de variation de f.
   (c) Montrer que, pour tout $x \in]0\,;\,1[$, les inégalités suivantes sont vraies :
   $$0 < (\ln x) \times \ln(1-x) \leqslant (\ln 2)^2.$$
   (d) Tracer $\mathscr{C}$.

Partie B – Encadrement d'une intégrale

Pour $t \in \left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$, on pose :

$$I_1(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} x\ln x\,\mathrm{d}x, \quad I_2(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} x^2\ln x\,\mathrm{d}x, \quad I(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. (a) À l'aide d'intégrations par parties, montrer que :
   $$\begin{aligned} I_1(t) &= -\frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}t^2\ln t + \frac{t^2}{4}\,; \\ I_2(t) &= \frac{\ln 2}{24} - \frac{1}{72} - \frac{t^3\ln t}{3} + \frac{t^3}{9}\,. \end{aligned}$$
   (b) Déterminer les limites de $I_1(t)$ et de $I_2(t)$ quand t tend vers 0.
2. Soit g et h les fonctions définies sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$ par :
   $$g(x) = -\left(x + \frac{x^2}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad h(x) = g(x) - \frac{x^2}{2}\,.$$
   (a) Étudier sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$ les variations de la fonction :
   $$x \mapsto \ln(1-x) - g(x).$$

(b) En déduire que, pour tout $x \in \left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$:

$$\ln(1-x) \leqslant g(x).$$

(c) Par un procédé analogue, montrer que pour tout $x \in \left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$:

$$\ln(1-x) \geqslant h(x).$$

(d) En déduire un encadrement de $f(x)$ sur $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$.

3. (a) Montrer que :

$$-I_1(t) - \frac{1}{2}I_2(t) \leqslant I(t) \leqslant -I_1(t) - I_2(t).$$

(b) En supposant que $I(t)$ admet une limite notée I quand t tend vers 0, donner un encadrement de I.

Exercice 24 France, Septembre 2002

Partie A

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\mathrm{e}^{2x} - 1 > 0$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}-1}$.
   (a) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.
   (b) Calculer $g'(x)$. Étudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ est donnée en fin d'énoncé avec sa tangente au point d'abscisse e.
On admet l'égalité suivante : $f(x) = 2x\left[a(\ln x)^2 + b\ln x + c\right]$ où a, b et c désignent trois réels.

1. (a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.
   (b) À l'aide des informations données sur le graphique, déterminer les valeurs de $f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$, $f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ et $f'(\mathrm{e})$.
   (c) En déduire l'égalité : $f(x) = 2x\left[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right]$ pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$.
2. (a) Déterminer la limite de f en 0. On pourra poser $t = -\ln x$ et vérifier pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$ l'égalité :

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-t}\left[2t^2 + 3t + 2\right].$$

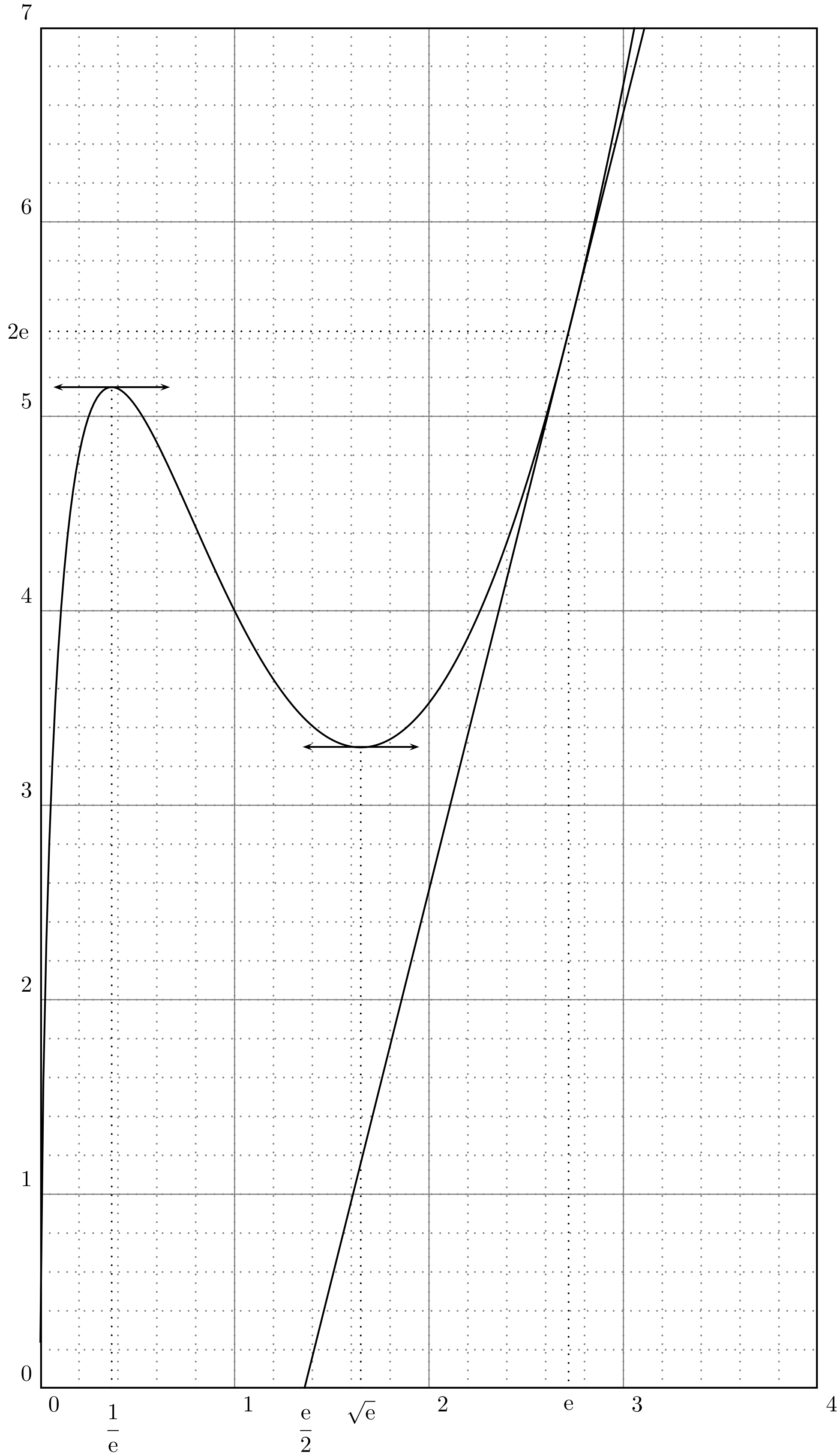
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (c) Montrer pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$ l'égalité : $f'(x) = 2(\ln x + 1)(2\ln x - 1)$.
   (d) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

Partie C

1. Tracer, dans le repère $(O\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath})$ du graphe ci-joint, la courbe représentative Γ de la fonction g étudiée en partie **A**.
2. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} - 1} - 1$.
   (b) Calculer, et exprimer en unités d'aire, l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{4}$ et $x = 2$.
3. Soit φ la fonction définie sur $[0,1\,;\,0,3]$ par $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.
   (a) Montrer que, pour tout x appartenant à $[0,1\,;\,0,3]$, on a $\varphi'(x) > 0$.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède une solution unique α sur $[0,1\,;\,0,3]$ et déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie D

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.
2. On définit la fonction h sur $]0\,;\,+\infty[$ par l'expression suivante : $h = g \circ f$.
   (a) Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de h.
   (b) Déterminer le sens de variation de h sur $]0\,;\,+\infty[$.
   (c) Montrer que $h(\alpha) = g \circ g(\alpha)$. Déterminer une valeur approchée de $h(\alpha)$ à 10^{-4} près.



Exercice 25 Polynésie, Septembre 2002

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, toutes les courbes demandées seront tracées dans ce repère (unité graphique 4 cm).

Partie A – Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1},$$

Γ est sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.

1. Étudier la parité de f.
2. Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $-1 < f(x) < 1$.
3. Quelles sont les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$? En déduire les équations des asymptotes éventuelles à Γ.
4. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation, en déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
5. (a) α étant un nombre appartenant à $]-1\,;\,1[$, montrer que l'équation $f(x) = \alpha$ admet une solution unique x_0. Exprimer alors x_0 en fonction de α.

   (b) Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$, donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

Partie B – Tangentes à la courbe

1. Déterminer une équation de la tangente Δ_1 à Γ au point d'abscisse 0.
2. Montrer que pour tout nombre t réel, $f'(t) = 1 - [f(t)]^2$. En déduire un encadrement de $f'(t)$.
3. Pour x positif ou nul, déterminer un encadrement de $\displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$, puis justifier que $0 \leqslant f(x) \leqslant x$. Quelles sont les positions relatives de Γ et Δ_1 ?
4. Déterminer une équation de la tangente Δ_2 à Γ au point A d'ordonnée $\dfrac{1}{2}$.
5. Montrer que le point B de la courbe Γ, d'ordonnée positive, où le coefficient directeur de la tangente est égal à $\dfrac{1}{2}$ a pour coordonnées :

$$\left(\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\,;\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

6. Tracer Γ, Δ_1 et Δ_2. On placera les points A et B.

Partie C – Calcul d'intégrales

1. Montrer que $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, en déduire une primitive de f.
2. Quelle est l'aire en cm^2 de la surface comprise entre Γ, la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
   Hachurer cette surface sur la représentation graphique.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.
4. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x\left(1 - [f(x)]^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} - \ln\left(\frac{e^2 + 1}{2e}\right).$$

   En déduire $\displaystyle\int_0^1 x[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Exercice 26 Amérique du Nord, Juin 2002

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_k(x) = \ln(\mathrm{e}^x + kx) - x.$$

Soit $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Étude préliminaire – Mise en place d'une inégalité

On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

1. Étudier le sens de variation de g.
2. En déduire que pour tout réel a positif ou nul, $\ln(1+a) \leqslant a$.

Partie A – Étude de la fonction f_1 définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f_1(x) = \ln(\mathrm{e}^x + x) - x$

1. Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1.
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $f_1(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$.

   En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f_1.

Partie B – Étude et propriétés des fonctions f_k

1. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k.
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $f_k(x) = \ln\left(1 + k\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$.

   En déduire la limite de f_k en $+\infty$.
3. (a) Dresser le tableau de variation de f_k.

   (b) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a $f_k(x) \leqslant \dfrac{k}{\mathrm{e}}$.
4. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}_k$ à $\mathscr{C}_k$ au point O.
5. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_p$ et $\mathscr{C}_m$.
6. Tracer les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ainsi que leurs tangentes respectives $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ en O.

Partie C – Majoration d'une intégrale

Soit λ un réel strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_k$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$.

1. Sans calculer $\mathcal{A}(\lambda)$, montrer que $\mathcal{A}(\lambda) \leqslant k\displaystyle\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ (on pourra utiliser le résultat de la question préliminaire).

2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
3. On admet que $\mathcal{A}(\lambda)$ admet une limite en $+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda) \leqslant k$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 27 Antilles-Guyane, Juin 2002

Pour tout entier naturel n, on considère les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{(1-n)x}}{1+\mathrm{e}^x}.$$

Partie A – Étude de f_0 et de f_1

On appelle f_0 la fonction définie par $f_0(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
On appelle $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ les courbes représentatives respectivement de f_0 et de f_1 dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ (unité graphique 5 cm).

1. Déterminer la limite de f_0 en $-\infty$ puis en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f_0 et étudier son sens de variation.
3. Montrer que le point $I\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_0$.
4. Déterminer une équation de la tangente en I à $\mathscr{C}_0$.
5. Montrer que pour tout réel x, $f_1(-x) = f_0(x)$.
6. Par quelle transformation simple $\mathscr{C}_1$ est-elle l'image de $\mathscr{C}_0$? Construire $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

Partie B – Calcul d'une aire

1. Montrer que pour tout réel x, $f_0(x) + f_1(x) = 1$.
2. Soit a un réel positif ou nul. Calculer $\int_0^a f_0(x)\,\mathrm{d}x$, puis $\int_0^a f_1(x)\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire l'aire $\mathcal{A}(a)$ de la partie du plan définie par $\left\{\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & a \\ f_1(x) & \leqslant y \leqslant & 1 \end{array}\right.$.
4. Déterminer la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

Partie C – Étude d'une suite

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que pour tout entier n, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{\mathrm{e}^n - 1}{\mathrm{e}^n}$.
3. En déduire la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $u_{n+1} + u_n$.
4. Montrer que pour tout réel x de $[0\,;\,1]$:

$$\frac{\mathrm{e}^{(1-n)x}}{1+\mathrm{e}^x} \geqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^x}.$$

5. En déduire le sens de variation de la suite (u_n), puis la limite de (u_n).

Exercice 28 Asie, Juin 2002

Partie A

On définit la fonction u sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$u(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln|x|.$$

1. Étudier les variations de la fonction u sur $\mathbb{R}^*$. Préciser la valeur de l'extremum relatif de u.
2. Étudier les limites de u en 0, et en $+\infty$.
3. On considère l'équation $u(x) = 0$.
   (a) Montrer qu'elle n'admet qu'une seule solution sur $\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$ et en déduire qu'elle est la seule sur $\mathbb{R}^*$; cette solution sera notée α.
   (b) Donner un encadrement de α par deux nombres rationnels de la forme $\frac{n}{10}$ et $\frac{n+1}{10}$, avec n entier.
4. En déduire le signe de $u(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

Partie B

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.

1. Étudier les limites de f en 0, en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Pour tout x réel, déterminer le nombre dérivé $f'(x)$.
3. En utilisant les résultats déjà établis, donner les variations de la fonction f et le tableau de variation de f.
4. (a) Démontrer que $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$.
   (b) En utilisant l'encadrement de α trouvé à la partie **A.3.**, prouver que $1,6 < f(\alpha) < 2,1$.
   La construction de $\mathscr{C}$ n'est pas demandée.

Partie C

Soit M le point de coordonnées $(x\,;\,y)$ et M' le point de coordonnées $(x'\,;\,y')$ dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, où M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.

1. Déterminer x' et y' en fonction de x et y.
2. (a) Démontrer qu'une équation de la courbe Γ à laquelle appartient M' lorsque M décrit la courbe $\mathscr{C}'$ est la suivante : $y = -2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$.
   (b) Étudier la position relative des courbes Γ et $\mathscr{C}$.

Partie D

On considère un réel m supérieur ou égal à 1.

1. On note $\mathcal{A}(m)$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^m [2x - f(x)]\,\mathrm{d}x$. Calculer $\mathcal{A}(m)$. (On utilisera une intégration par parties.)
2. Déterminer, si elle existe, la limite de $\mathcal{A}(m)$ quand m tend vers $+\infty$.

Exercice 29 Centres étrangers, Juin 2002

Pour chaque entier naturel n, on définit, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ la fonction notée f_n par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} + n \ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A – Étude du cas particulier $n = 0$

f_0 est donc la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f_0(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.

1. Construire dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la fonction exponentielle, puis tracer sa tangente au point d'abscisse 0.
2. Résolution graphique d'une inéquation :
   (a) Justifier graphiquement l'inégalité suivante : pour tout réel u, $\mathrm{e}^u \geqslant u + 1$.
   (b) En déduire que pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} + x - 1 \geqslant 0$, puis que $1 + (x-1)\mathrm{e}^x \geqslant 0$.
3. Limites :
   (a) Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.
   (b) Déterminer la limite de f_0 en 0.
4. Sens de variation :
   (a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a :
   $$f_0'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(x-1) + 1}{x^2}.$$
   (b) En déduire le sens de variation de f_0 sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
5. On appelle $\mathscr{C}_0$ la courbe représentative de f_0 dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ pour lequel l'unité graphique est 2 cm.
   Tracer $\mathscr{C}_0$ dans ce repère et placer le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$.

Partie B – Étude de la famille de fonctions f_n pour $n \geqslant 1$

On appelle $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ précédent.

1. Déterminer le sens de variation de f_n sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer les limites de f_n en $+\infty$ et en 0.
   En déduire que $\mathscr{C}_n$ possède une asymptote qu'on précisera.
3. Étudier les positions respectives des courbes $\mathscr{C}_{n+1}$ et $\mathscr{C}_n$.
4. Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par un même point B dont on précisera les coordonnées.
5. (a) Montrer qu'il existe un unique réel α_1 appartenant à l'intervalle $[0,2\,;\,0,9]$ tel que $f_1(\alpha_1) = 0$.
   (b) Montrer que $f_n(\alpha_1) < 0$ pour tout entier naturel $n > 1$.

(c) Pour tout entier naturel $n > 1$, montrer qu'il existe un unique réel α_n appartenant à l'intervalle $[\alpha_1\,;\,1]$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

(a) En utilisant la partie **A**, montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1]$:

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \leqslant \mathrm{e} - 1.$$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, $\ln(\alpha_n) \geqslant \dfrac{1-\mathrm{e}}{n}$, puis que, $\alpha_n \geqslant \mathrm{e}^{\frac{1-\mathrm{e}}{n}}$.

(c) Déterminer la limite de la suite (α_n).

6. Construire sur le graphique précédent, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

Partie C – Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on appelle I_n l'intégrale :

$$I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.
2. Étudier le sens de variation de la suite (I_n).
3. Démontrer que l'aire comprise entre les courbes $\mathscr{C}_{n+1}$ et $\mathscr{C}_n$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \dfrac{3}{2}$ est constante.

Exercice 30 France, Juin 2002

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[(x + (1-x)\mathrm{e}^{2x}\right].$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, (unité graphique 2 cm).

1. (a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
   Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
3. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 + (1-2x)\mathrm{e}^{2x}$.
   (a) Étudier le sens de variation de u.
   (b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   Déterminer une valeur décimale approchée par excès de α à 10^{-2} près.
   (c) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

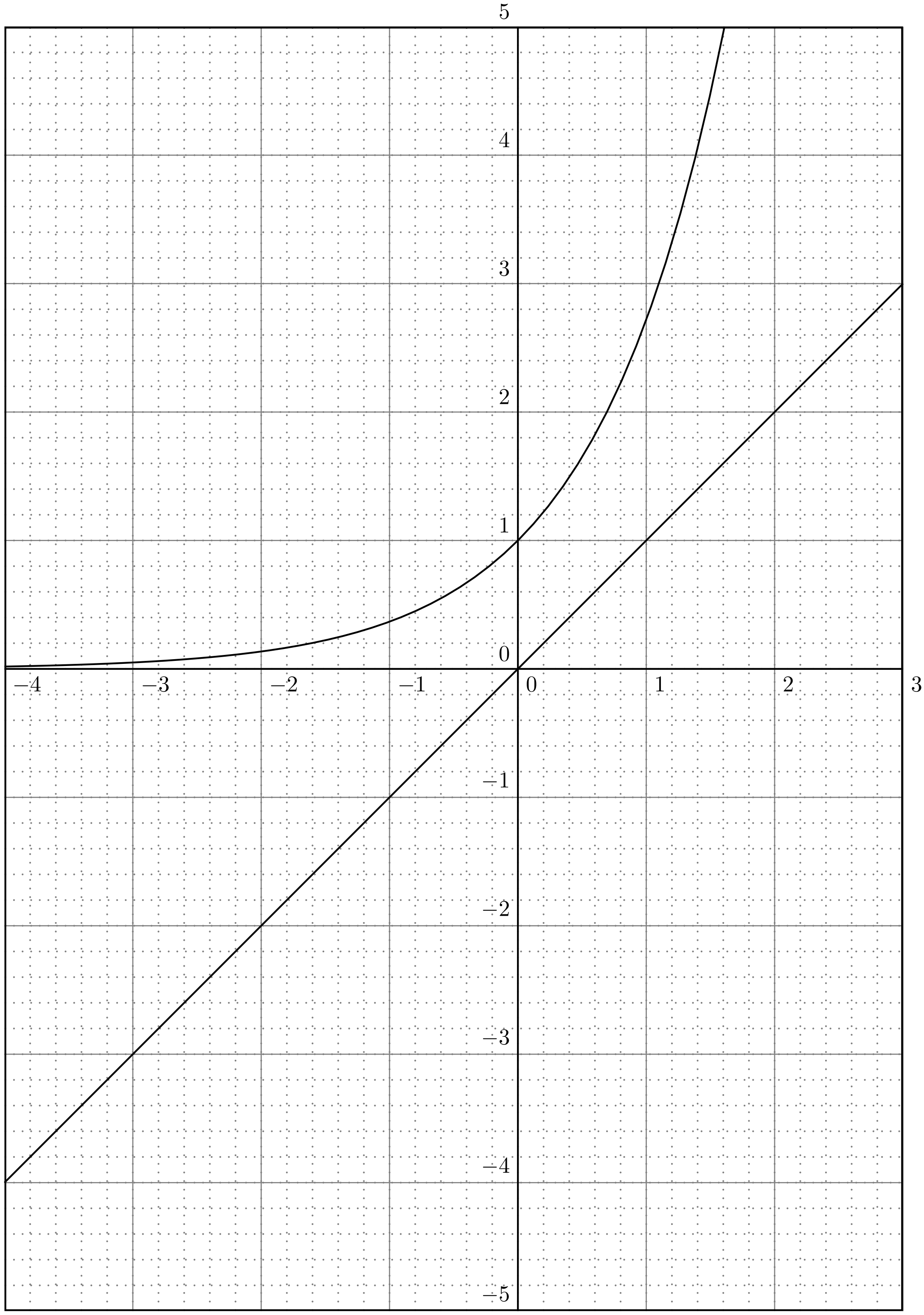
Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, on considère la courbe Γ d'équation $y = \mathrm{e}^x$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$. Les courbes Γ et $\mathscr{D}$ sont tracées sur le graphique ci-joint.

1. Soit t un réel ; on désigne par M_t le point de Γ d'abscisse t.
   La tangente à Γ au point M_t coupe l'axe des ordonnées au point N_t.
   Déterminer les coordonnées du point N_t.
2. On désigne par P_t le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse t et par G_t l'isobarycentre des points O, M_t, P_t et N_t. Le point G_t est donc le barycentre des points pondérés $(O\,;\,1)$, $(M_t\,;\,1)$, $(P_t\,;\,1)$ et $(N_t\,;\,1)$.
   (a) Placer les points M_{-2}, P_{-2}, et N_{-2} puis construire, en justifiant, le point G_{-2} sur le graphique ci-dessous.
   (b) Déterminer en fonction de t les coordonnées du point G_t.
3. Quel est l'ensemble des points G_t quand t décrit $\mathbb{R}$?

Partie C

1. Construire la courbe $\mathscr{C}$ de la partie **A** sur le graphique ci-dessous.
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2, du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ (on pourra utiliser une intégration par parties).



Exercice 31 La Réunion, Juin 2002

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

1. Étudier la parité de f. Que peut-on en déduire comme propriété géométrique pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Étudier la limite de f en $+\infty$ et les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Représenter graphiquement la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.

Partie B

On considère le point A du plan de coordonnées $(1\,;\,0)$ et on s'intéresse au minimum de la distance AM, où M est un point de la courbe $\mathscr{C}$.

1. M étant un point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}$, calculer en fonction de x la distance AM.
2. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x-1)^2 + \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)^2}{4}.$$

   (a) Calculer $g'(x)$.

   (b) On désigne par g'' la fonction dérivée seconde de g. Calculer $g''(x)$.
   Montrer que pour tout x réel :

$$g''(x) = e^{2x} + e^{-2x} + 2.$$

   (c) En déduire les variations de g' sur $\mathbb{R}$.

   (d) Montrer qu'il existe un unique nombre réel α de l'intervalle $[0\,;\,1]$ vérifiant $g'(\alpha) = 0$.
   Vérifier l'inégalité suivante : $0,46 \leqslant \alpha \leqslant 0,47$.
   Déterminer le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x.

   (e) Déterminer les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$). Quel est le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction g ?

3. Établir que la distance AM est minimum au point M_0 d'abscisse α de la courbe $\mathscr{C}$.
   Placer le point M_0 sur le graphique.
4. En utilisant la définition de α, montrer les égalités :

$$\alpha - 1 = -\frac{1}{2} f(2\alpha)$$

   puis :

$$g(\alpha) = \frac{1}{4}\left[f(2\alpha)\right]^2 + \left[f(\alpha)\right]^2.$$

   Utiliser les variations de f et le résultat suivant : $0,46 \leqslant \alpha \leqslant 0,47$ pour encadrer $g(\alpha)$; en déduire un encadrement de la distance AM_0 d'amplitude $2 \cdot 10^{-2}$.

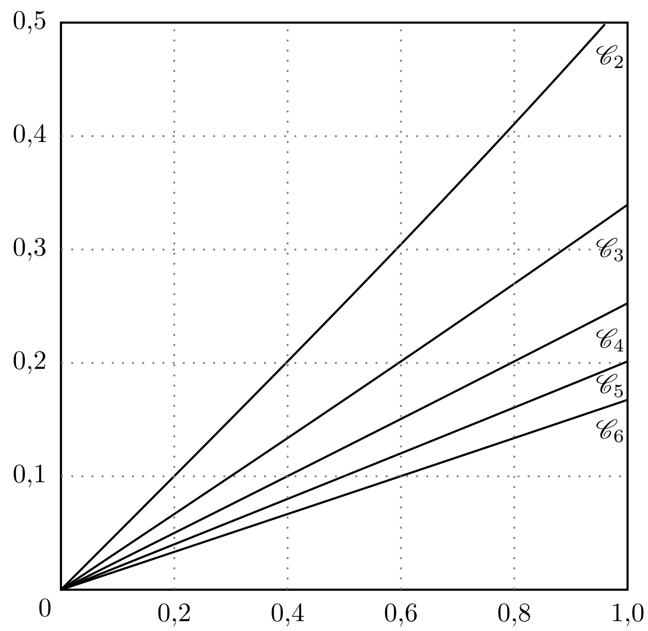
Partie C

Soit n un entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^{\frac{x}{n}} - e^{-\frac{x}{n}}}{2}.$$

On appelle $\mathscr{C}_n$ la courbe représentant f_n dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.
On donne ci-dessous les représentations graphiques des fonctions f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6 soit respectivement les courbes $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_4$, $\mathscr{C}_5$ et $\mathscr{C}_6$ obtenues à l'aide d'un logiciel.

1. Calculer l'intégrale $I_1 = \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.
2. On considère pour n entier naturel non nul l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
   Interpréter géométriquement I_n.
   Calculer pour n entier naturel quelconque, I_n en fonction de n.
3. Que peut-on conjecturer sur la convergence de la suite (I_n) ?
   Montrer que $I_n = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\dfrac{1}{n}\right)} - \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}-1}{\left(-\dfrac{1}{n}\right)}\right]$ et en déduire la limite de la suite (I_n) en $+\infty$.



Exercice 32 Liban, Juin 2002

Partie A

Exercice 33 Polynésie, Juin 2002

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} - \mathrm{e}^{-x}$$

et l'on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 3 cm.

1. Calculer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f pour x appartenant à $[0\,;+\infty[$.

3. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique u. Montrer que u appartient à $[1\,;\,2]$ et déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de u.
5. Tracer $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$ sur la même figure.
6. (a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \neq -1$, $\dfrac{x-1}{x+1} = a + \dfrac{b}{x+1}$.

   (b) En déduire l'aire en cm^2 du domaine plan limité par $\mathscr{T}$, $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $x = 1$ (on admettra que $\mathscr{T}$ est au-dessus de $\mathscr{C}$).

Partie B

n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Calculer $f_n'(x)$ et donner son signe sur $[0\,;\,+\infty[$. Préciser $f_n(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

   Dresser le tableau de variation de f_n.
2. (a) Calculer $f_n(n)$; quel est son signe ?

   (b) Démontrer, par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{n+1} > 2n+1$.
   En déduire le signe de $f_n(n+1)$.

   (c) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $[n\,;\,n+1]$; cette solution sera notée u_n.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n}$.
4. (a) En remarquant que, pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$: $\dfrac{x-n}{x+n} = 1 - \dfrac{2n}{x+n}$, montrer que la valeur moyenne, M_n, de f_n sur $[0\,;\,u_n]$ est égale à :

$$1 - \frac{1}{u_n} + \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{u_n} - 2\left(\frac{n}{u_n}\right)\ln\left(\frac{u_n}{n} + 1\right).$$

   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$.